ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Автотракторный факультет

Кафедра «Теоретическая механика»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
контрольных работ

ПО ДИСЦИПЛИНЕ
теоретическая механика

Разработали: ст. преп. Вершинина И.П.

ст. преп. Малолетов А.В.

Зав. кафедрой: проф. Брискин Е.С.
«28» ноября 2007 г

Волгоград 2007 г.

Требования к оформлению контрольных работ

Каждая контрольная работа выполняется в обычной ученической тетради. На обложке указывается номер контрольной работы, название дисциплины, фамилия и инициалы студента, название учебной группы, шифр и полный домашний адрес. На первой странице указывается номер варианта и названия выполненных задач. Страницы тетради должны иметь поля шириной 2,5-3 см для замечаний рецензента.

Решение каждой задачи следует начинать с четной страницы. Указывается название задачи, записывается полностью ее условие. Рисунок выполняется карандашом с соблюдением масштаба и с применением чертежных инструментов. Для изображения некоторых элементов рисунка, например, векторов, желательно использовать цветные фломастеры.

Решение каждой задачи должно сопровождаться необходимыми пояснениями. Результат расчета сначала дается в виде формулы, затем приводится подстановка исходных данных и только после этого записывается результат с обязательным указанием размерности. Например:

$$R_A = F - P \cdot \cos 30^o = 25,38 - 12,36 \cdot 0.866 = 14,68 \text{ кН}$$

Достаточная точность расчетов - два знака после десятичной запятой.

Контрольная работа, выполненная с отступлениями от перечисленных требований, или содержащая ошибки в расчетах, не зачитывается. К контрольной работе, представляемой на повторную проверку, необходимо приложить незачтенную работу.

Срок проверки контрольной работы рецензентом – не более недели. Контрольная работа должна быть представлена на проверку не позже, чем за неделю до начала зачетно-экзаменационной сессии.

Методика выбора варианта на выполнение контрольных работ

Каждая задача имеет 30 вариантов. Номер варианта студент определяет самостоятельно по двум последним цифрам своего шифра с помощью таблицы 1.

Таблица 1.

	Последняя цифра шифра										
предпоследняя цифра шифра		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	2	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	3	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	4	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	5	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	6	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	7	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
	8	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
	9	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Задача С1

Определить реакции опор тела **АВ.** На это тело действуют силы **F** и **P,** равномерно распределенная нагрузка интенсивности **q** и пара сил с моментом **M**.

Расчетные схемы представлены на рис. 2 (а, б, в).

В таблице 2 заданы значения **F**, **P**, **M** и **q** и линейные размеры тела **АВ** - *a, b, r* (в метрах). Вес тела **АВ** не учитывать.

Указания

В этой задаче рассматривается равновесие тела под действием произвольной системы сил.

Рекомендуется следующий порядок решения:

1. Прикладываем к телу **АВ** активные силы. К ним относятся силы **F** и **P**, пара сил с моментом **M** и равномерно распределенная нагрузка интенсивности **q** на участке ***a***. Равномерно распределенную нагрузку следует заменить одной силой **Q=q*a**. Сила **Q** приложена в центре участка с распределенной нагрузкой.
2. Прикладываем к телу реакции связей.
3. Выбираем систему координат.
4. Составляем уравнения равновесия. в данной задаче действует произвольная плоская система сил, уравнения равновесия которой имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \sum_{i=1}^{n} M_{iA} = 0.$$

Точку, относительно которой составляется уравнение моментов желательно выбрать так, чтобы в ней пересекалось как можно больше сил, поскольку моменты этих сил относительно выбранной точки будут равны нулю. В тех случаях, когда сложно определить плечо силы, эту силу удобно представить ее проекциями на оси x и y и вычислить момент каждой из них.

5. Решаем полученную систему уравнений и находим неизвестные реакции связей. Отрицательное значение найденной реакции указывает на то, что действительное направление реакции противоположно выбранному.

Пример решения задачи

Определить реакции опор тела АВ (рис.1).

F = 10 кН, P = 20 кН, q = 8 кН/м, M = 15 кНм, a = 4 м , b = 6 м, r = 3 м.

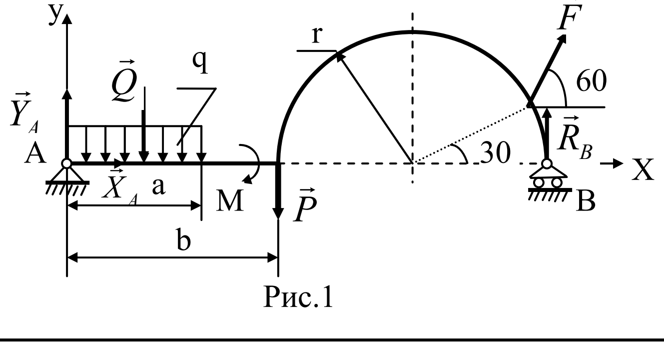


Рис.1

Прикладываем к телу активные силы: **F**, **P**, пару сил с моментом **M**. Распределенную нагрузку заменяем силой Q = $q*a$ = 8·4 = 32 кН.

Показываем реакции связей. Это составляющие $\mathbf{X_A}$ и $\mathbf{Y_A}$ реакции неподвижного шарнира **A** и реакция $\mathbf{R_B}$ подвижного шарнира **B**.

Выбираем систему координат *xAy* (см. рис.1) и составляем уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил:

$$\sum F_{ix} = 0\,;\ X_A + F\cdot\cos 60^o = 0\,; \qquad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0\,;\ Y_A - Q - P + F\cdot\sin 60^0 + R_B = 0\,; \qquad (2)$$

$$\sum M_{iA} = 0\,; \quad -Q\cdot 0,5\cdot a - M - P\cdot b - F\cdot\cos 60^0\cdot r\cdot\sin 30^0 +$$
$$+F\cdot\sin 60^0(b + r + r\cdot\cos 30^0) + R_B(b + 2r) = 0\,; \qquad (3)$$

Из уравнения (1) находим X_A:

$X_A = -F\cdot\cos 60^0 = -10\cdot 0,5 = -5$ кН

Из уравнения (3) находим R_B:

$$R_B = \frac{Q\cdot 0,5a + M + Pb + F\cos 60^o r\sin 30^o - F\sin 60^o(b + r + r\cos 30^o)}{b + 2r}$$

$$= \frac{32\cdot 0,5\cdot 4 + 15 + 20\cdot 6 + 10\cdot 0,5\cdot 3\cdot 0,5 - 10\cdot 0,866(6 + 3 + 3\cdot 0,866)}{6 + 2\cdot 3} = 8,84 \text{ кН}$$

Из уравнения (2) находим Y_A:

$Y_A = Q + P - F\sin 60^o - R_B = 32 + 20 - 10\cdot 0,866 - 8,84 = 34,5$ кН

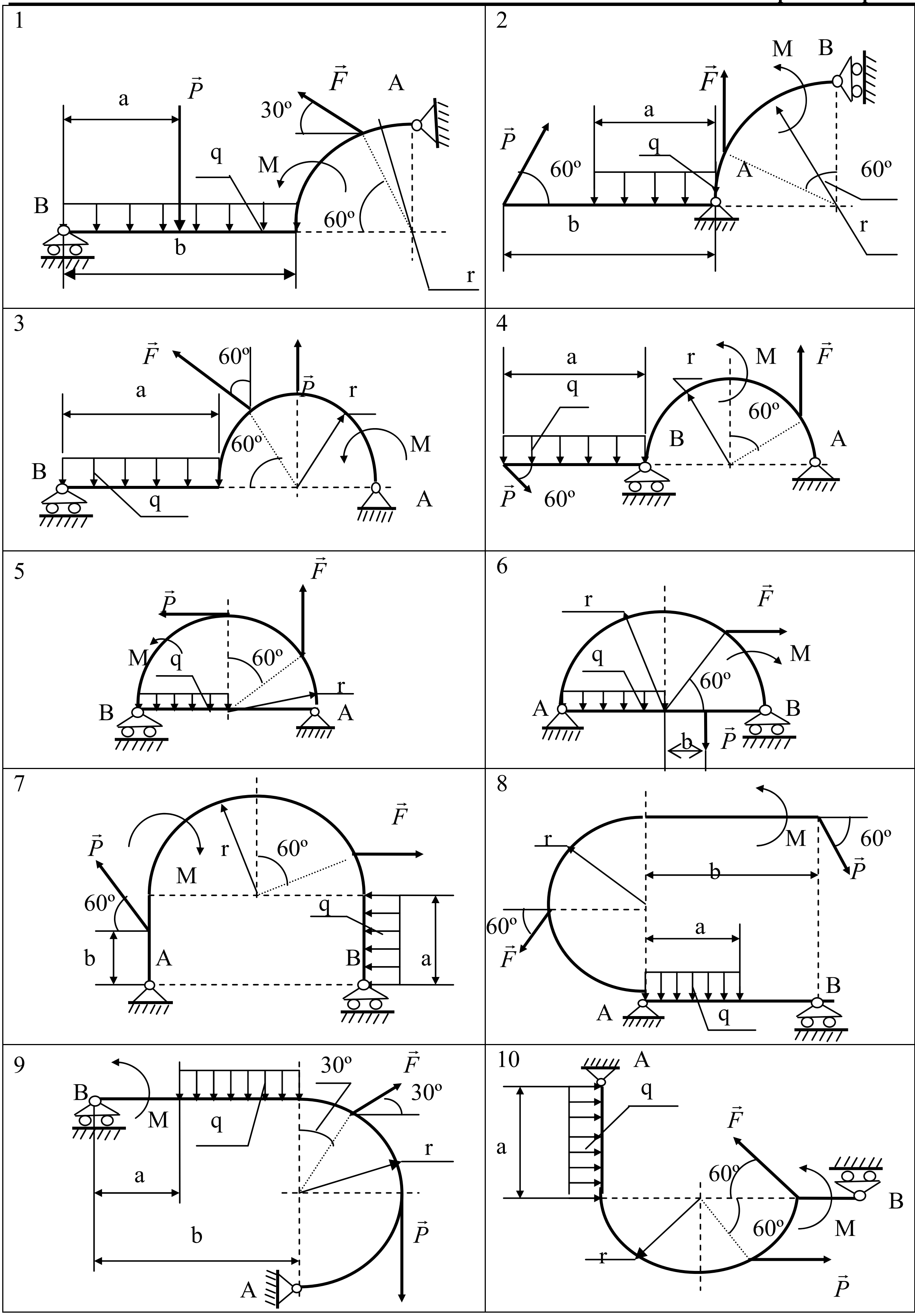

1
a
$\vec{P}$
$\vec{F}$
A
30º
q
M
B
60º
b
r
2
M
B
$\vec{F}$
a
$\vec{P}$
q
60º
A
60º
b
r
3
$\vec{F}$
60º
a
$\vec{P}$
r
60º
M
B
q
A
4
a
r
M
$\vec{F}$
q
60º
B
A
$\vec{P}$
60º
5
$\vec{F}$
$\vec{P}$
M
q
60º
r
B
A
6
r
$\vec{F}$
q
M
60º
A
B
b
$\vec{P}$
7
$\vec{F}$
$\vec{P}$
r
60º
M
60º
q
b
A
B
a
8
M
60º
r
$\vec{P}$
b
60º
a
$\vec{F}$
B
A
q
9
B
30º
$\vec{F}$
30º
M
q
r
a
b
$\vec{P}$
A
10
A
q
$\vec{F}$
a
60º
B
60º
M
r
$\vec{P}$

Рис. 2а

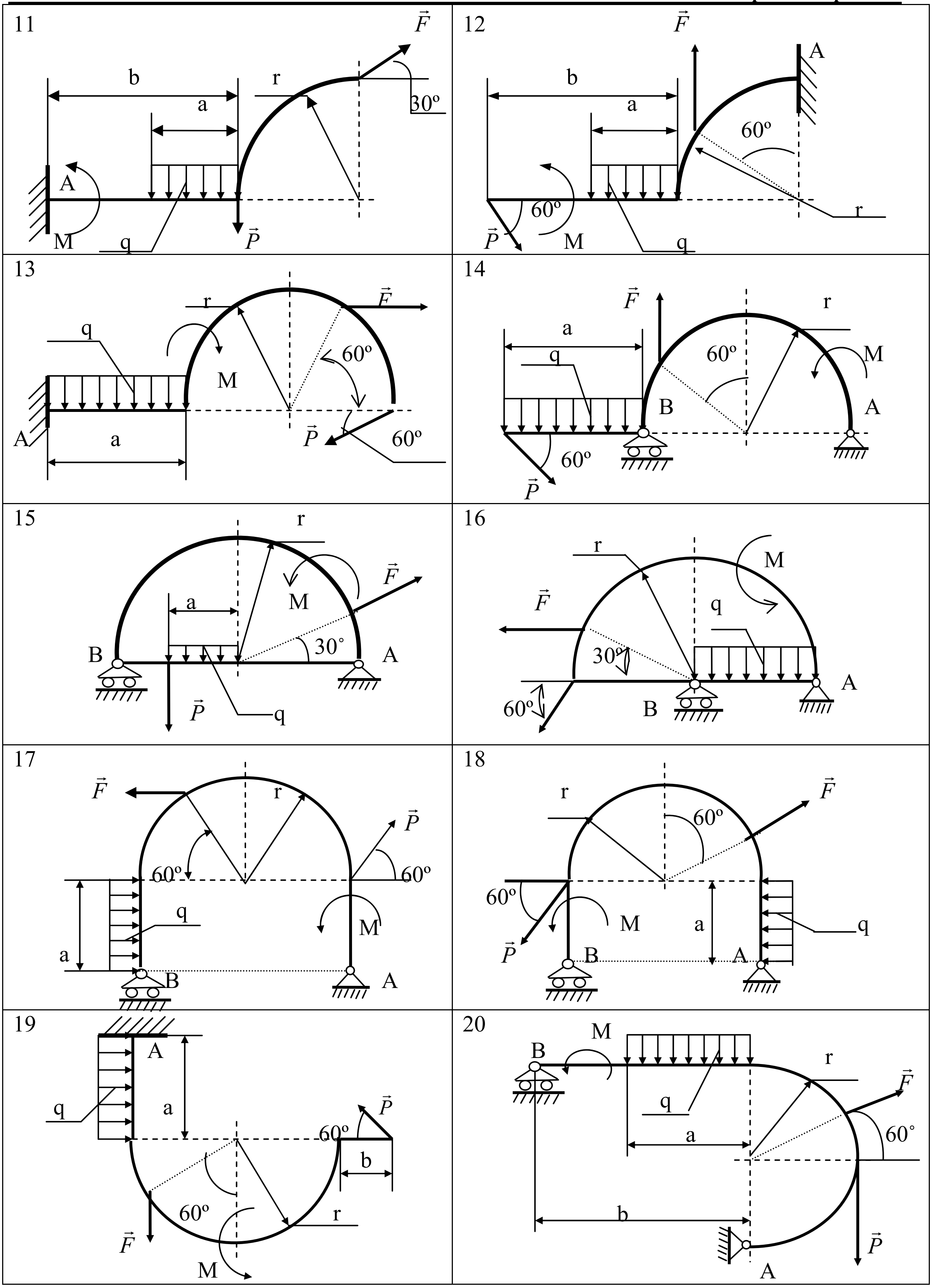


Рис. 2б

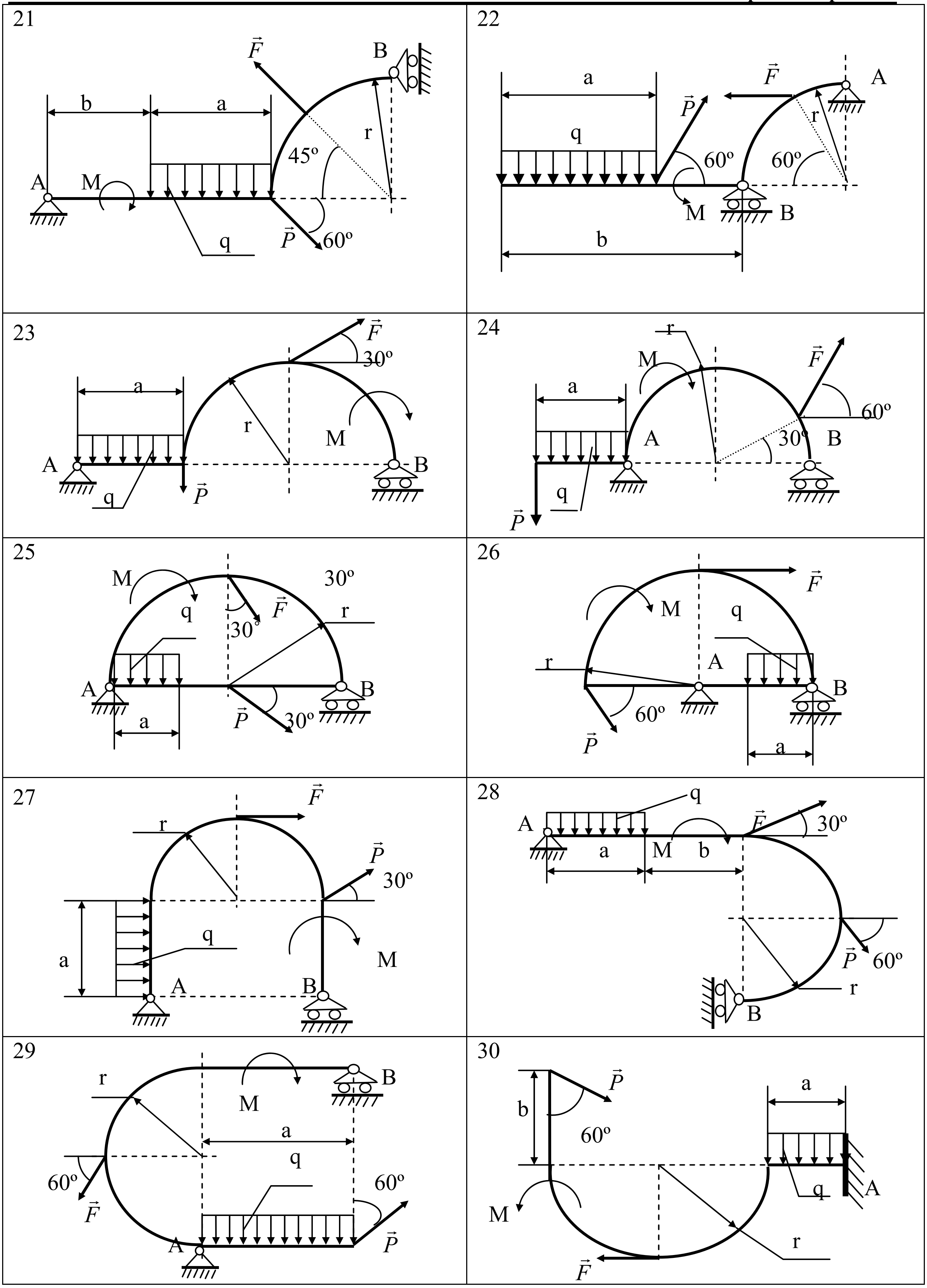


Рис. 2в

Таблица 2

Вариант	**F** кН	**P** кН	**M** кНм	**q** кН/м	*a* м	*b* м	*r* м
1	5	10	15	5	1,5	3	2
2	6	15	10	10	2	3	2
3	15	8	6	12	3	-	3
4	20	12	8	6	3	-	3
5	5	6	12	8	-	-	4
6	8	12	15	4	-	1,5	4
7	15	20	10	5	4	2	3
8	5	15	6	12	4	6	3
9	12	6	20	10	4	8	3
10	15	12	10	5	3	2	3
11	6	8	12	4	2	4	3
12	10	20	8	6	2	4	2
13	20	12	5	10	3	-	3
14	10	15	8	6	3	-	3
15	8	10	12	8	2	-	4
16	15	20	10	5	-	-	4
17	10	15	8	6	4	-	3
18	12	10	6	5	4	-	3
19	10	20	15	4	3	2	3
20	10	8	20	4	4	8	3
21	8	12	10	6	2	2	2
22	10	20	15	6	2	4	2
23	15	10	15	8	3	-	3
24	20	12	10	12	3	-	3
25	16	15	8	5	3	-	4
26	10	10	12	4	3	-	4
27	12	8	15	6	4	-	3
28	10	20	12	4	4	4	3
29	15	15	10	4	8	-	3
30	20	12	8	5	2	3	3

Задача С2

Определить реакции внешних и внутренних связей составной конструкции, состоящей из двух тел. Расчетные схемы представлены на рис. 5 (а,б,в), где линейные размеры указаны в метрах. На составную конструкцию действуют силы **F** и **P**, распределенная нагрузка интенсивности **q** и пара сил с моментом **M**. Их значения для различных вариантов приведены в таблице 3. Силы тяжести тел АС и ВС не учитывать.

Указания

Составная конструкция – это совокупность нескольких связанных между собой тел. Связи, наложенные на составную конструкцию делятся на внешние и внутренние.

Особенность расчета реакций связей составной конструкции заключается в следующем: конструкцию нужно условно разделить по внутренним связям на отдельные тела. К каждому телу нужно приложить активные силы и реакции внешних и внутренних связей и составить уравнения равновесия, как это делалось в задаче С1.

Во всех вариантах задачи С2 конструкция состоит из двух тел, к каждому из которых приложена произвольная плоская система сил. Решая систему из шести уравнений равновесия, находим реакции внешних и внутренних связей. Системы координат независимы друг от друга. Следует иметь в виду, что реакции внутренней связи для каждого тела равны по величине и противоположны по направлению.

Пример решения задачи

Определить реакции внешних внутренних связей составной конструкции (см. рис. 3).
F = 20 кН, P = 10 кН, M = 25 кНм, q = 5 кН/м, r = 2 м.

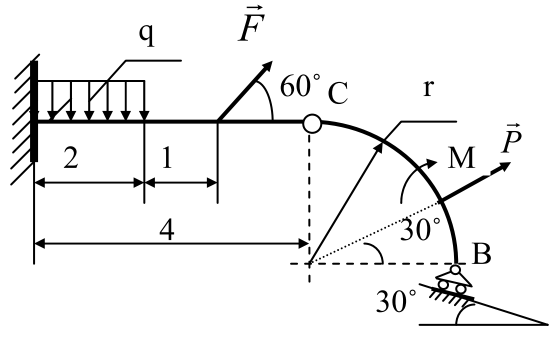


Рис. 3

Разъединяем составную конструкцию по внутренней связи (шарнир С) на два отдельных тела АС и СВ (см. рис. 4 а,б).

К каждому телу прикладываем активные силы. На тело АС действует сила **F** и равномерно распределенная нагрузка интенсивности **q** , которую заменяем силой **Q** .= **q***2 = 5·2 = 10 кН. На тело СВ действует пара сил с моментом **M** и сила **P**.

Показываем оси координат *xAy* и *xOy.*

Прикладываем реакции внешних связей. Для тела АС это реакции заделки А - $\mathbf{X_A}$, $\mathbf{Y_A}$ и реактивный момент $\mathbf{M_A}$. Для тела СВ реакцией внешней связи будет реакция $\mathbf{R_B}$ неподвижного шарнира В.

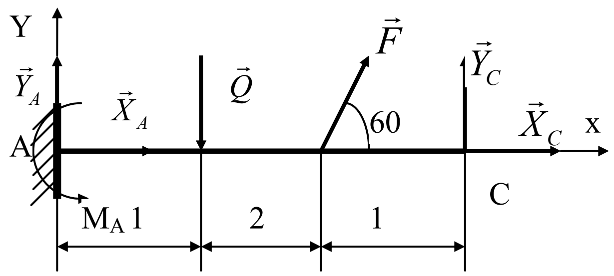


Рис. 4а

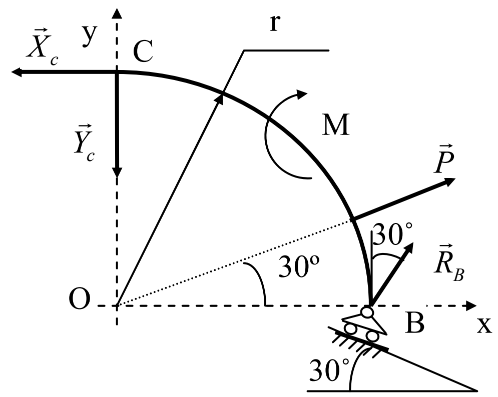


Рис. 4б

Реакцию внутренней связи (шарнира С) представим ее составляющими $\mathbf{X_c}$ и $\mathbf{Y_c}$.

Составляем уравнения равновесия.

Для тела АС (рис. 4а):

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_A + F\cos 60^o + X_C = 0; \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = 0; \; Y_A - Q + F\sin 60^o + Y_C = 0; \tag{2}$$

$$\sum M_{iA} = 0; \; M_A - Q\cdot 1 + F\sin 60^o \cdot 3 + Y_C \cdot 4 = 0; \tag{3}$$

Для тела ВС (рис.4б):

$$\sum F_{ix} = 0; \; -X_C + P\cos 30^o + R_B \cdot \sin 30^o = 0; \tag{4}$$

$$\sum F_{iy} = 0; \; -Y_C + P\sin 30^o + R_B \cdot \cos 30^o = 0; \tag{5}$$

$$\sum M_{ic} = 0; \; -M + P\cos 30^o \cdot 2 + R_B \sin 30^o \cdot 2 + R_B \cos 30^o \cdot 2 = 0. \tag{6}$$

Из уравнения (6) находим R_B:

$$R_B = \frac{M - P\cos 30^o \cdot 2}{2\sin 30^o + 2\cos 30^o} = \frac{25 - 10\cdot 0,866\cdot 2}{2\cdot 0,5 + 2\cdot 0,866} = 2,81 \text{ кН}$$

Из уравнения (5) находим Y_c:

$$Y_C = P\sin 30^o + R_B cos 30^\circ = 10\cdot 0,5 + 2,81\cdot 0,866 = 7,43 \text{ кН}$$

Из уравнения (4) найдем X_C:

$X_C = P\cos 30^o + R_B \cdot \sin 30^o = 10\ 0,866 + 2,81 \cdot 0,5 = 10,07$ кН

Из уравнения (3) найдем M_A:

$M_A = Q \cdot 1 - F\sin 60^o \cdot 3 - Y_C \cdot 4\ = 10 - 20 \cdot 0,866 \cdot 3 - 7,43 \cdot 4 = 71,68$ кН.

Из уравнения (2) найдем Y_A:

$Y_A = Q - F\sin 60^o - Y_C = 10 - 20 \cdot 0,866 - 7,43 = -14,75$ кН.

Из уравнения (1) найдем X_A:

$X_A = F\cos 60^o - X_C = -20 \cdot 0,5 - 10,07 = -20,07$ кН.

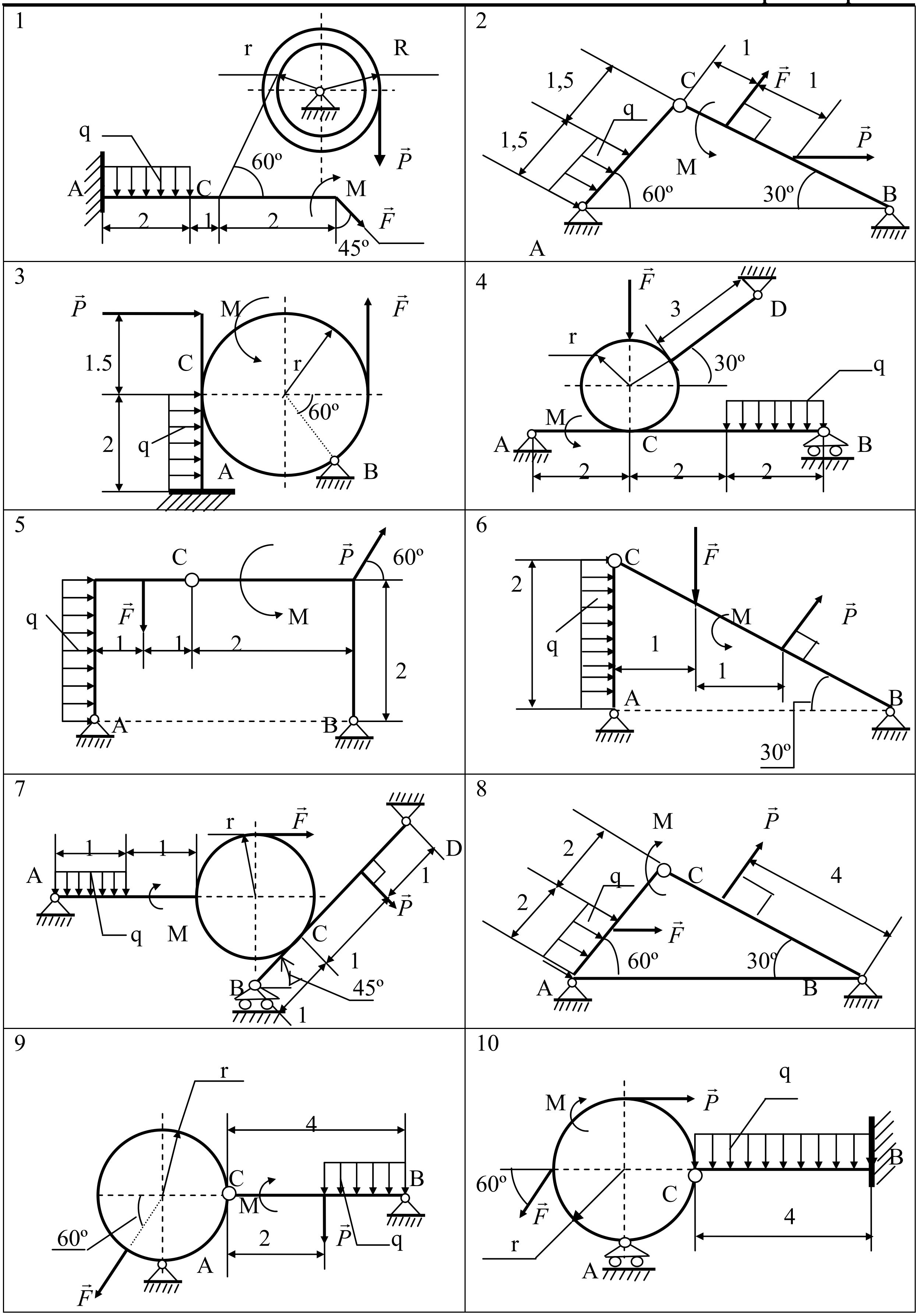
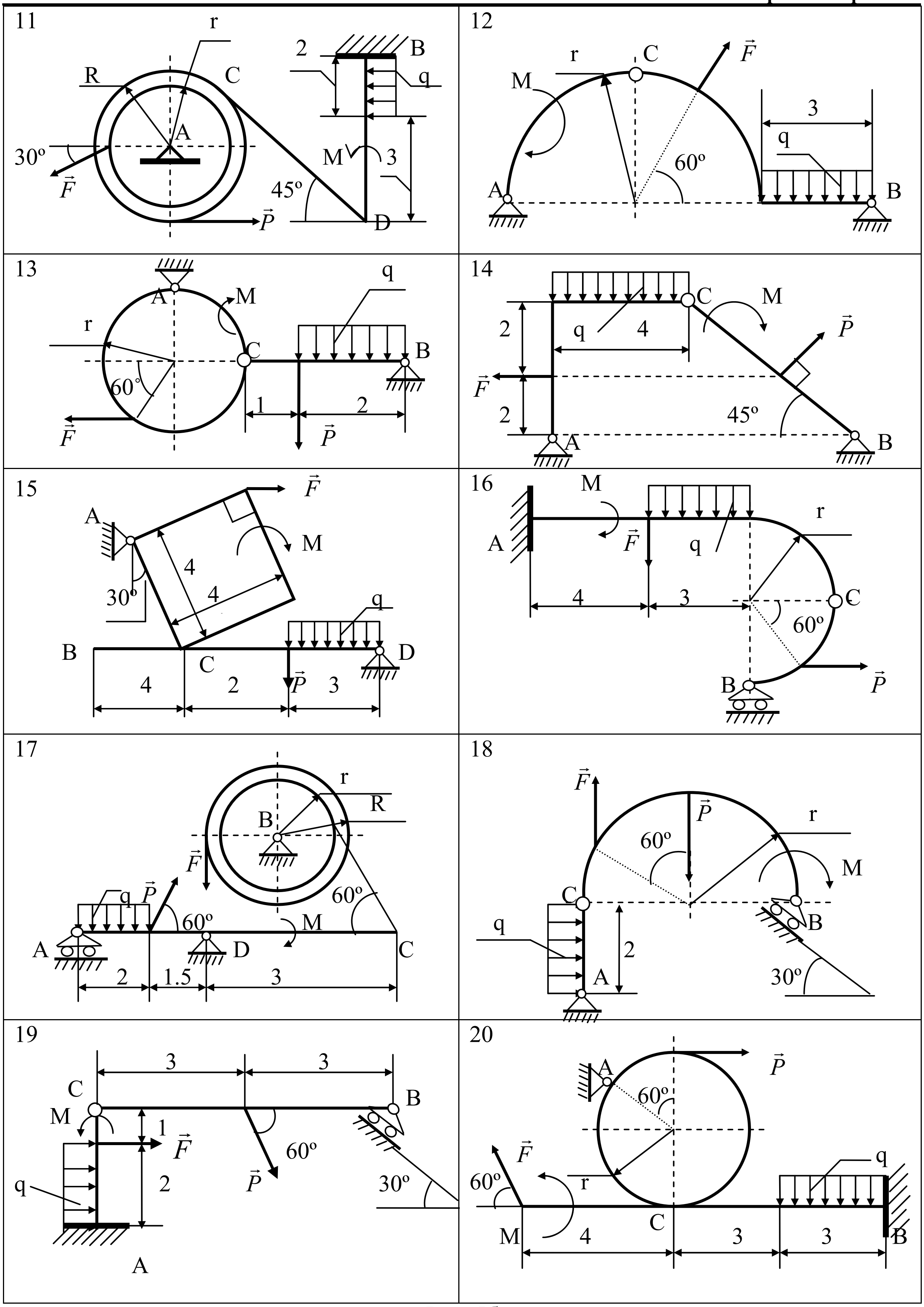

1
r
R
q
A
C
60º
M
$\vec{P}$
$\vec{F}$
2
1
2
45º
2
1,5
1,5
C
1
$\vec{F}$
1
q
$\vec{P}$
M
60º
30º
B
A
3
$\vec{P}$
M
$\vec{F}$
1.5
C
r
60º
2
q
A
B
4
$\vec{F}$
3
D
r
30º
q
M
A
C
B
2
2
2
5
C
$\vec{P}$
60º
q
$\vec{F}$
M
1
1
2
2
A
B
6
C
$\vec{F}$
2
M
$\vec{P}$
q
1
1
A
B
30º
7
r
$\vec{F}$
D
1
1
A
1
$\vec{P}$
q
M
C
1
B
45º
1
8
M
$\vec{P}$
2
C
4
q
2
$\vec{F}$
60º
30º
A
B
9
r
4
C
B
M
60º
2
$\vec{P}$
q
A
$\vec{F}$
10
q
M
$\vec{P}$
B
60º
C
$\vec{F}$
4
r
A

Рис. 5а


11
r
R
C
A
2
B
q
30º
M
3
45º
D
12
r
C
M
3
q
60º
A
B
13
A
M
q
r
C
B
60°
1
2
14
C
M
2
q
4
2
45º
A
B
15
A
M
4
4
30º
q
B
C
D
4
2
3
16
M
A
q
r
4
3
C
60º
B
17
r
R
B
q
60º
60º
M
A
D
C
2
1.5
3
18
r
60º
M
C
q
B
2
A
30º
19
3
3
C
B
M
1
60º
q
2
30º
A
20
A
60º
q
60º
r
M
4
C
3
3
B
Рис. 5б

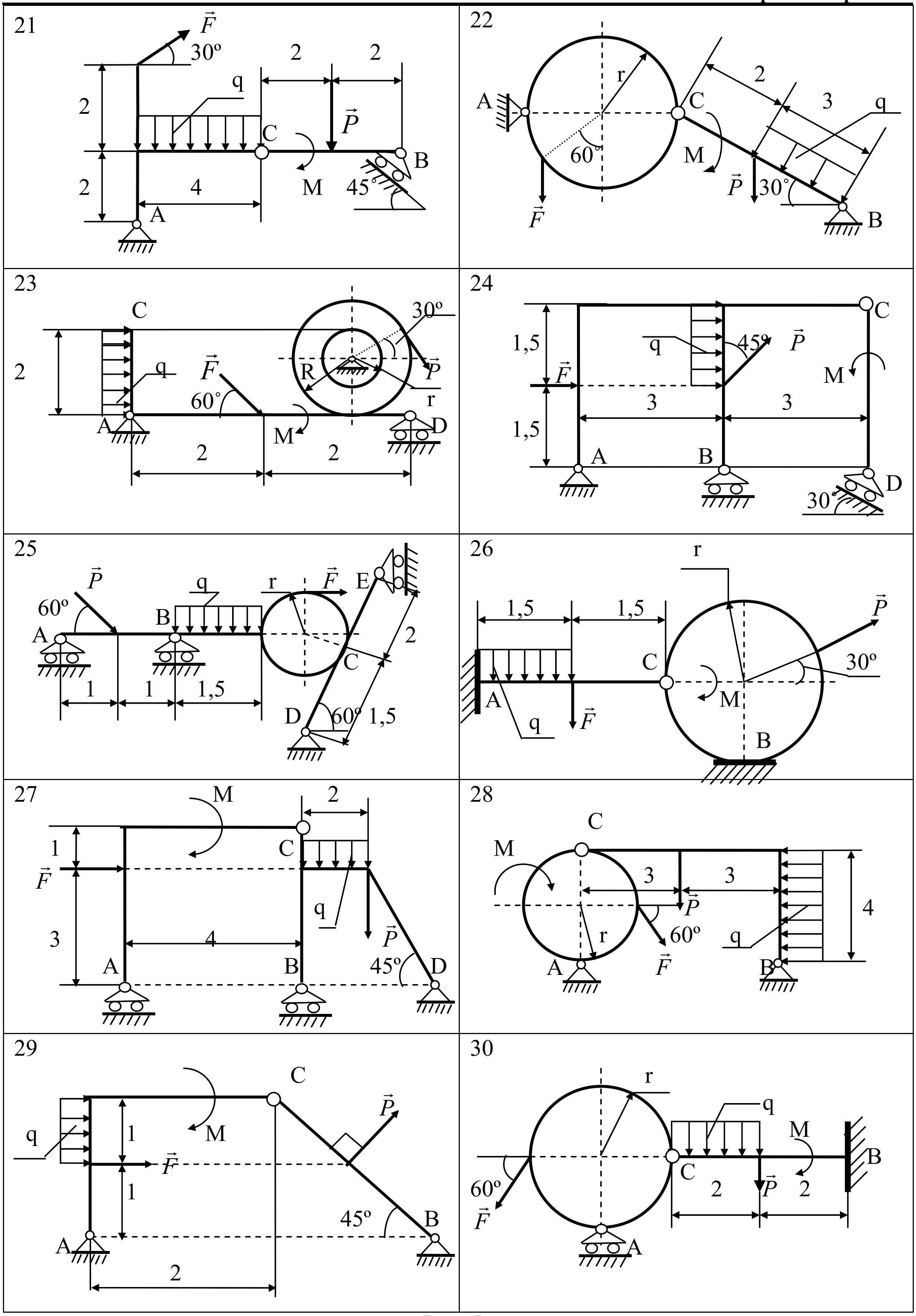

21
F
30º
2
2
q
2
C
P
2
4
M
45°
B
A
22
r
A
C
2
3
q
60°
M
P
30°
F
B
23
C
30º
2
q
F
R
P
60°
r
A
M
D
2
2
24
C
1,5
q
45º
P
F
M
3
3
1,5
A
B
D
30°
25
P
q
r
F
E
60º
B
A
2
C
1
1
1,5
D
60º
1,5
26
r
P
1,5
1,5
C
30º
A
M
q
F
B
27
M
2
1
C
F
q
3
4
P
A
B
45º
D
28
C
M
3
3
P
4
r
60º
q
A
F
B
29
C
P
q
1
M
F
1
45º
B
A
2
30
r
q
M
B
60º
C
2
P
2
F
A

Рис. 5в

Таблица 3

Вариант	F кН	P кН	M кНм	q кН/м	R м	r м
1	20	12	8	5	1,5	1
2	15	15	10	4	-	-
3	10	20	12	4	-	1,5
4	12		15	6	-	1,0
5	10	10	12	4	-	-
6	16	15	8	5	-	-
7	20	12	10	12	-	0,75
8	15	10	15	8	-	-
9	10	20	15	6	-	2,0
10	8	12	10	6	-	2,0
11	10	8	20	4	3,0	2,0
12	10		15	4	-	3,0
13	12	10	6	5	-	1,5
14	10	15	8	6	-	-
15	16	20	19	5	-	-
16	8	10	12	8	-	3,0
17	10	15	8	6	1,5	1,0
18	20	12	5	10	-	3,0
19	10	20	8	6	-	-
20	6	8	12	4	-	2,0
21	15	12	10	5	-	-
22	12	6	20	10	-	3,0
23	5	15	6	12	1,5	1,0
24	15	20	10	5	-	-
25	8	12	15	4	-	1,0
26	5	6	12	8	-	2,0
27	20	12	8	6	-	-
28	15	8	6	12	-	1,0
29	6	15	10	8	-	-
30	5	10	15	5	-	1,5

Задача К3

Тело, которому принадлежат точки A, B и C, (см. рис. 10а,б,в) движется в плоскости чертежа. Кинематические параметры и размеры приведены в таблице 4.

Определить:

1. Скорости точек A, B и C;
2. Угловую скорость и угловое ускорение тела ABC;
3. Ускорения точек A и B.

Указания

Расчет скоростей:

Для расчета скоростей удобно пользоваться понятием мгновенного центра скоростей (МЦС). МЦС (т. P) – это точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Если эту точку принять за полюс, то скорость любой точки фигуры можно найти как ее вращательную скорость вокруг МЦС: $V_A = \omega AP$, где ω – угловая скорость фигуры.

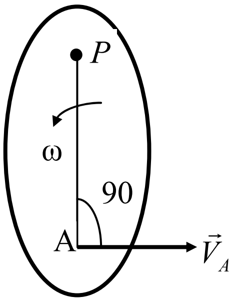


Рис. 6

Способы определения МЦС:

1. Если известны направления скоростей двух точек или линии их действия, то МЦС находится на пересечении перпендикуляров к этим векторам или линиям их действия;

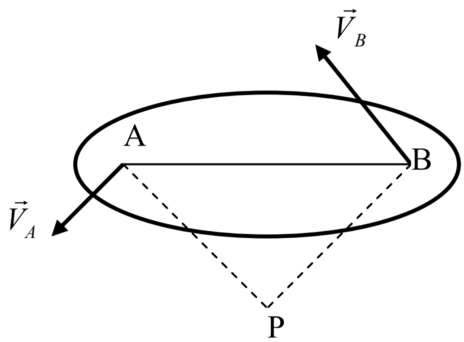


Рис. 7а

2. Если скорости двух точек параллельны друг другу и перпендикулярны прямой, соединяющей эти точки, то МЦС находится из условия пропорциональности скоростей их расстояниям до МЦС;

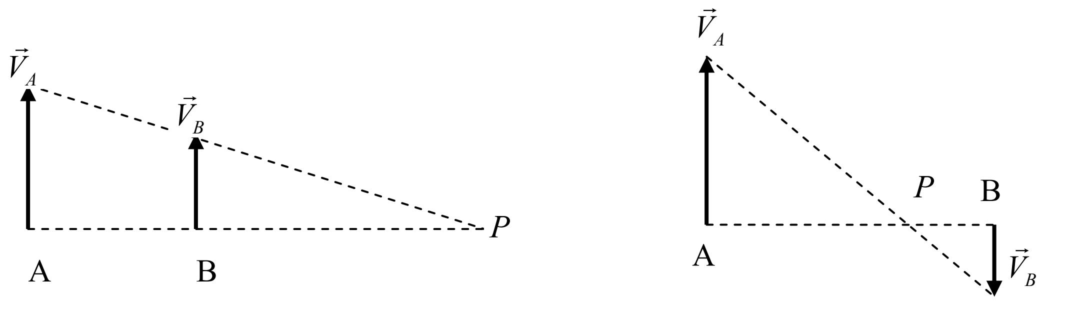


Рис. 7б

3. Если скорости двух точек параллельны друг другу и не перпендикулярны прямой, соединяющей эти точки, то МЦС находится в бесконечности, ω=0 и скорости всех точек одинаковы;

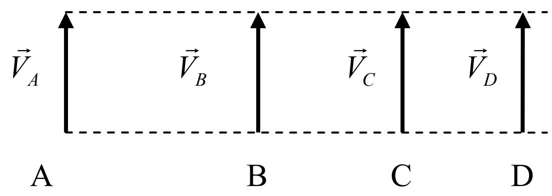


Рис. 7в

4. При качении фигуры без скольжения по неподвижной поверхности МЦС находится в точке соприкосновения фигуры с поверхностью.

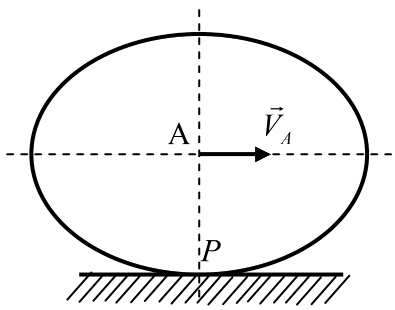


Рис. 7г

Расчет ускорений:

Если обозначить полюс точкой А, то ускорение любой точки плоской фигуры определяется по формуле:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}. \qquad (1)$$

Вращательное ускорение $\vec{a}_{BA}$ удобно представить как ускорение точки В при условно остановленном полюсе:

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{ц} + \vec{a}_{BA}^{вр}.$$

Здесь $\vec{a}_{BA}^{ц}$ и $\vec{a}_{BA}^{вр}$ - центростремительная и касательная составляющие вектора вращательного ускорения $\vec{a}_{BA}$. Вектор $\vec{a}_{BA}^{ц}$ должен быть направлен к полюсу (точке А), а вектор $\vec{a}_{BA}^{вр} \perp \vec{a}_{BA}^{ц}$ и его направление определяется направлением углового ускорения фигуры ε.

Пример решения задачи

Для кривошипно-шатунного механизма (рис.8) найти:
1. Скорости точек А, В, С,
2. Ускорения точек А и В,
3. Угловую скорость и угловое ускорение звена АВС.

OA=3 см, AC=BC=5 см, $\varphi = 30^o$, ω_{OA}=2 c^{-1}=const.

Расчет скоростей:

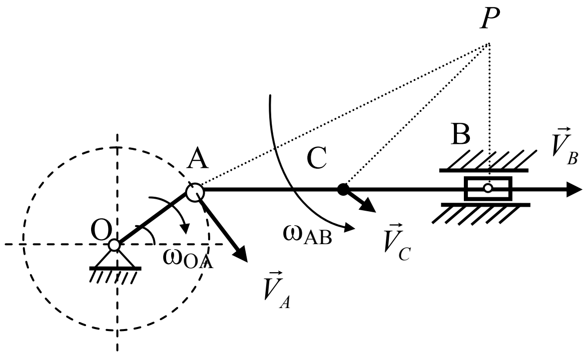


Рис. 8

Принимаем за полюс точку А, так как ее движение определяется уравнением вращательного движения кривошипа ОА и ее скорость V_A находится по формуле:
$V_A = \omega_{OA}OA = 2*3 = 6$ см/с.

Точка В движется горизонтально и для нахождения МЦС (точки Р) не имеет значения в какую сторону она движется. Точка Р находится на пересечении перпендикуляров к направлениям скоростей точек А и В.

Находим величину и направление угловой скорости ω_{AB} звена АВ.

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} \; ; \; AP = \frac{AB}{\cos 30^o} = \frac{10}{0,866} = 11,55 \text{ см} \; ; \; \omega_{AB} = \frac{6}{11,55} = 0,52 \text{ c}^{-1}.$$

Угловая скорость ω_{AB} звена АВ направлена против часовой стрелки, так как в этом направлении вектор скорости полюса $\vec{V}_A$ поворачивает вокруг точки Р отрезок АВ.

Скорость точки В:

$V_B = \omega_{AB}BP$;

$BP = 0,5AP = 0,5*11,55 = 5,78$ см

$V_B = 0,52*5,78 = 3,0$ см/с

Скорость точки С:

$V_C = \omega_{AB} CP$;

$CP = \sqrt{BP^2 + CB^2} = \sqrt{5,78^2 + 5^2} = 7,64$ см

$V_C = 0,52*7,64 = 3,97$ см/с

Векторы $\vec{V}_A$, $\vec{V}_B$ и $\vec{V}_C$ перпендикулярны отрезкам, соединяющим их с МЦС, и их направления определяются направлением угловой скорости ω_{AB} звена АВ.

Расчет ускорений:

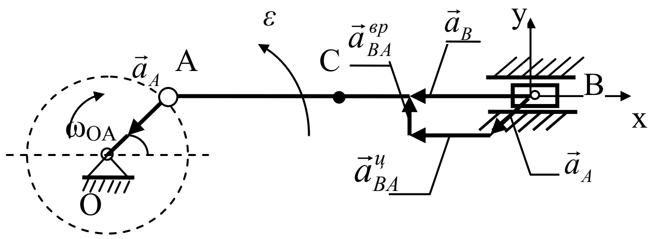


Рис.9

Для точки В векторное уравнение (1) в этой задаче имеет вид;

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{ц}_{BA} + \vec{a}^{вр}_{BA} . \qquad (2)$$

Здесь:

$a_A = \omega^2_{OA} OA =$ $2^2 *3 = 12$ см/с^2 - ускорение полюса (точки А)

$a^{ц}_{AB} = \omega^2_{AB} AB$ $=0,52^2*10 = 2,7$ см/с^2- центростремительное ускорение точки В относительно полюса А.

Вектор $\vec{a}^{вр}_{BA} \perp \vec{a}^{ц}_{BA}$, неизвестный по величине, замыкает векторный многоугольник ускорений (2), определяя величину и направление вектора ускорения точки В $\vec{a}_B$.

Чтобы не выполнять сложных и неточных векторных построений, спроектируем уравнение (2) на оси координат xВy. Одну из этих осей удобно направить вдоль траектории точки В.

$$a_{BX} = - a_A cos30^o - a_{BA}{}^{ц} , \qquad (3)$$

$$a_{BY} = - a_A sin30^o + a_{BA}{}^{вр} = 0 . \qquad (4)$$

Из уравнения (3) находим a_B:

$a_B = a_{BX} =$ - 12*0,866 - 2,7 = - 13,09 см/с^2

Из уравнения (4) находим $a_{BA}{}^{вр}$

$a_{BA}{}^{вр} = a_A sin30^o$ = 12*0,5 = 6 см/с^2 .

Вектор $\vec{a}^{вр}_{BA}$ позволяет найти величину и направление углового ускорения ε_{AB} звена АВ:

$\varepsilon_{AB} = \dfrac{a_{BA}^{вр}}{AB} = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$ с$^{-2}$.

Вектор $\vec{a}_{BA}^{вр}$ ориентирован относительно полюса (точки А) против часовой стрелки и это определяет направление углового ускорения ε_{AB} звена АВ.

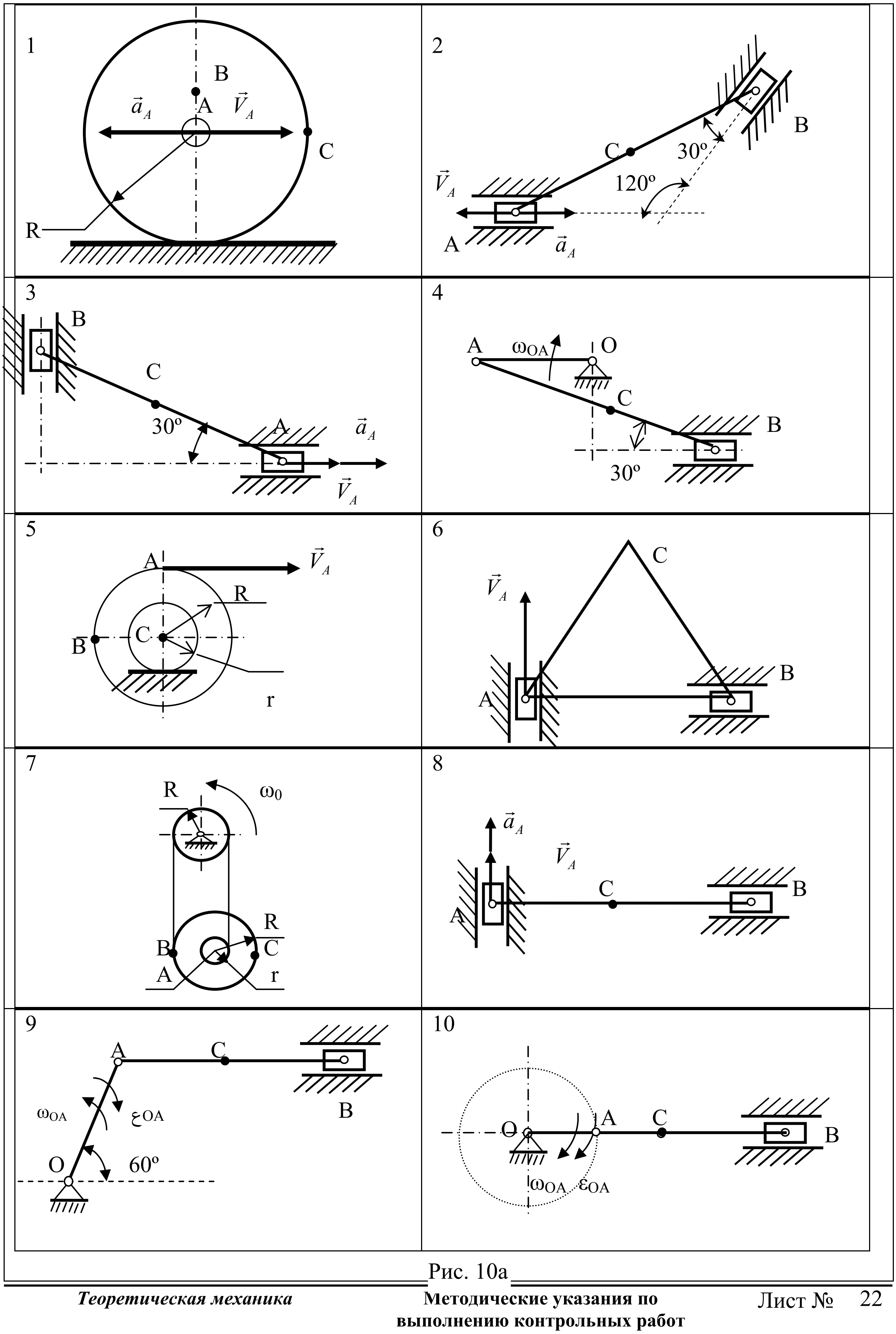

1
B
A
C
R
2
B
C
30º
120º
A
3
B
C
30º
A
4
A
O
C
B
30º
5
A
R
C
B
r
6
C
B
A
7
R
ω0
R
B
C
A
r
8
C
B
A
9
A
C
B
ωOA
εOA
O
60º
10
O
A
C
B
ωOA
εOA

Рис. 10а

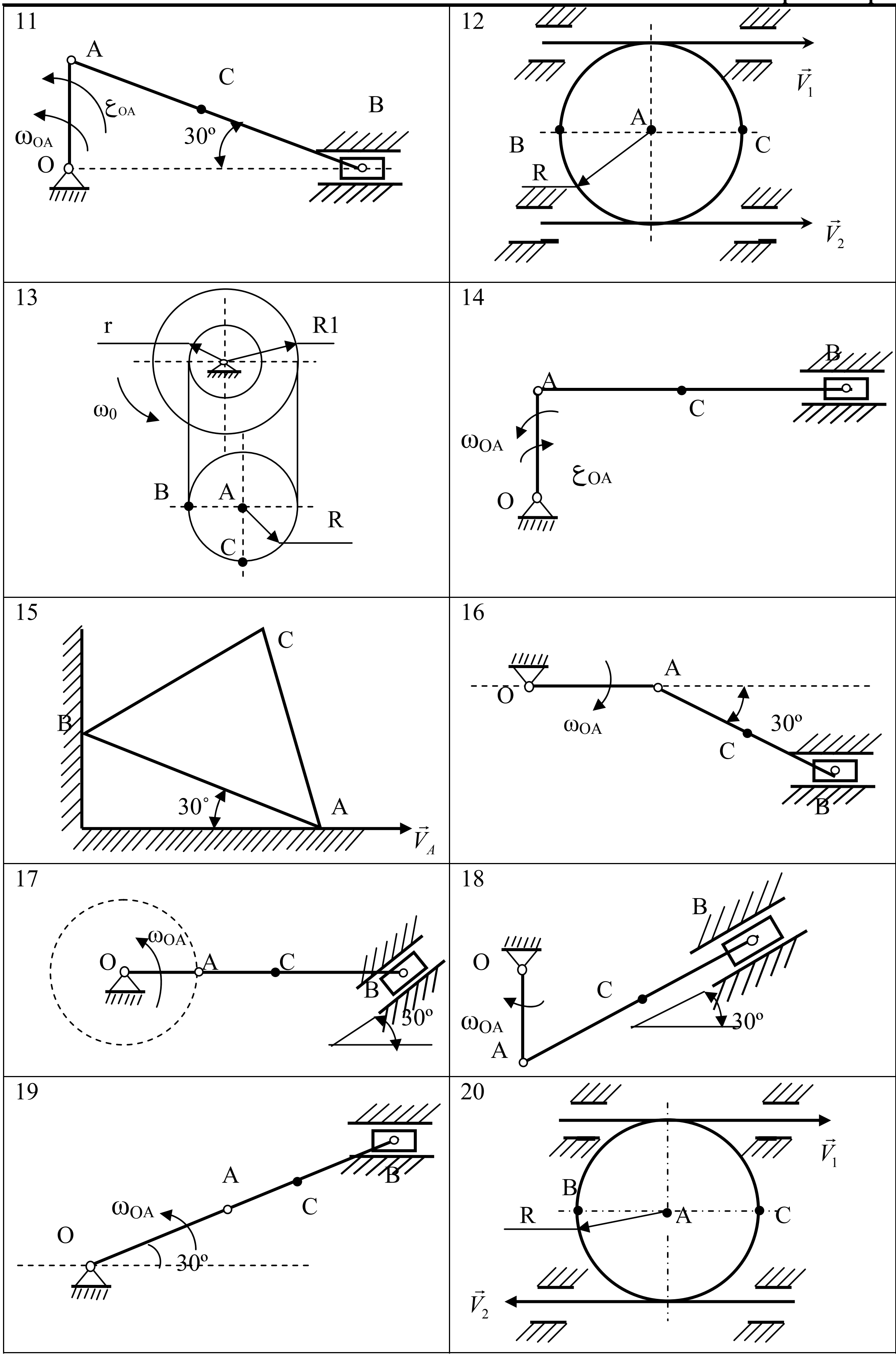

11
A
C
B
ε_{OA}
ω_{OA}
30º
O
12
$\vec{V}_1$
A
B
C
R
$\vec{V}_2$
13
r
R1
ω_0
B
A
R
C
14
B
A
C
ω_{OA}
ε_{OA}
O
15
C
B
30˚
A
$\vec{V}_A$
16
A
O
ω_{OA}
30º
C
B
17
ω_{OA}
O
A
C
B
30º
18
B
O
C
ω_{OA}
30º
A
19
A
B
ω_{OA}
C
O
30º
20
$\vec{V}_1$
B
R
A
C
$\vec{V}_2$

Рис. 10б

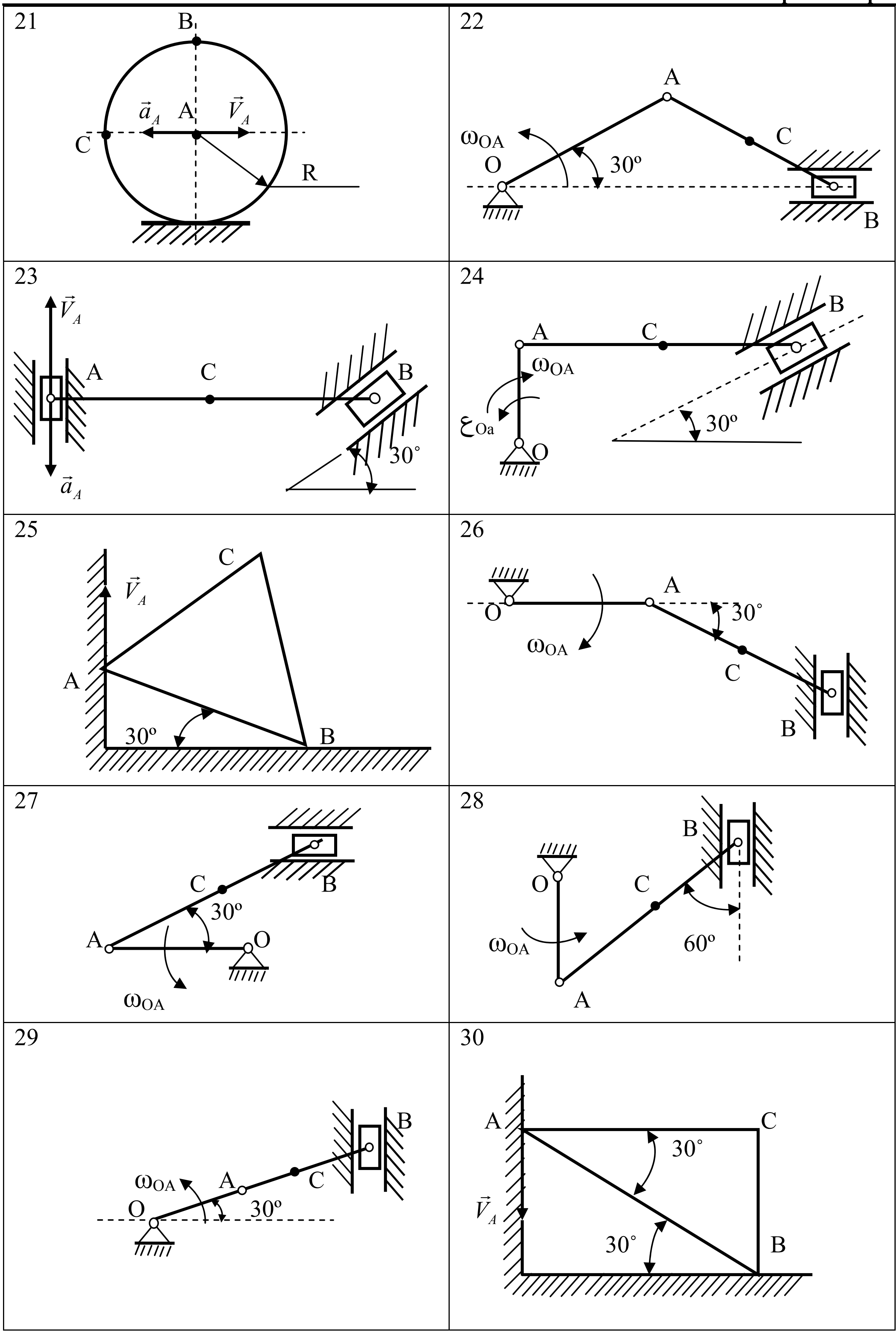

21
B
$\vec{a}_A$ A $\vec{V}_A$
C
R
22
A
ω_{OA}
C
O
30º
B
23
$\vec{V}_A$
A
C
B
30°
$\vec{a}_A$
24
B
A
C
ω_{OA}
ε_{Oa}
30º
O
25
C
$\vec{V}_A$
A
30º
B
26
A
O
30°
ω_{OA}
C
B
27
B
C
30º
A
O
ω_{OA}
28
B
O
C
ω_{OA}
60º
A
29
B
ω_{OA}
A
C
O
30º
30
A
C
30°
$\vec{V}_A$
30°
B

Рис. 10в

Таблица 4

Вариант	ω_{OA} c^{-1}	ε_{OA} c^{-2}	V_A см/с	a_A см/с^2	OA см	AB см	AC см	Примечание
1			50	10		10		R = 20 см
2			50	10		20	10	
3			40	20		20	10	
4	5	0			10	30	15	
5			60					R =20см, r =10см
6			50	0		40		AB = AC = CB
7	R = 15 см, R_1 = 20 см, r_1 = 10 см,							ω_o= 5c^{-1}= const
8			50	10		50	25	
9	10	5			10	20	10	
10	5	2			10	20	10	
11	10	2			15	40	20	
12	V_1 = 50 см/с = 2V_2 = const, R = 20 см							
13	R=15см , R_1=20см, r_1 =10см							ω_o =5c^{-1}=const
14	10	5			10	20	10	
15	V_A = 30 см/с = const, AB = BC = AC = 30 см							
16	6	0			20	40	20	
17	8	0			20	40	20	
18	10	0			15	30	15	
19	5	0			10	30	15	
20	V_1 = 50 см/с = 2V_2 = const, R = 20 см							
21			50	10				R = 30 см
22	10	0			20	20	10	
23			40	10		40	20	
24	5	2			15	40	20	
25			50	0		30		AB = BC = AC
26	10	0			20	40	20	
27	5	0			10	30	15	
28	10	0			20	40	20	
29	8	0			10	30	15	
30			50	0		40		

Задача К4

На рис.13 (а,б,в) показано тело, совершающее вращательное движение по закону $\varphi_e = f_1(t)$. По поверхности этого тела перемещается точка M, ее относительное движение описывается уравнением $S_r = f_2(t)$. В момент времени $t = t_1$ найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M, Необходимые исходные данные приведены в таблице 4.

На рис.13 (а,б,в) положение точки M показано при положительном значении естественной координаты OM.

Указания

В задаче К.4 рассматривается сложное движение точки. Движение точки называется сложным, если она участвует одновременно в двух или более движениях.

При изучении сложного движения вводится понятие подвижной и неподвижной системы отсчета. Подвижная система отсчета связана с телом, по которому перемещается точка. Неподвижная система отсчета связана с некоторым условно неподвижным телом (для решения большинства задач таким телом следует считать землю).

Движение точки относительно подвижной системы отсчета называется относительным, а ее скорость и ускорение в этом движении – относительной скоростью и относительным ускорением ($\vec{V}_r$, $\vec{a}_r$).

Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной называется переносным, а скорость и ускорение точки в этом движении – переносной скоростью и переносным ускорением ($\vec{V}_e, \vec{a}_e$).

Движение точки относительно неподвижной системы отсчета называется абсолютным. а скорость и ускорение точки в этом движении абсолютной скоростью и абсолютным ускорением ($\vec{V}$, $\vec{a}$).

Абсолютная скорость точки:

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e .$$

Абсолютное ускорение точки:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c .$$

Перед расчетом абсолютной скорости и абсолютного ускорения необходимо определить положение точки M в заданный момент времени $t = t_1$ и в этом положении показать ее на рисунках. Для расчетов абсолютной скорости и абсолютного ускорения необходимо выполнить отдельные рисунки.

Пример решения задачи

Пластина вращается вокруг горизонтальной оси. $\varphi_e = 2t^3 - 5t$ - уравнение вращательного движения пластины. По криволинейному каналу радиуса R = 30 см, выполненному на поверхности пластины, перемещается точка M. $S_r = OM = 2{,}5\pi t^2$, см - уравнение относительного движения точки (см. рис.11). В момент времени $t = t_1 = 2$ с найти абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки.

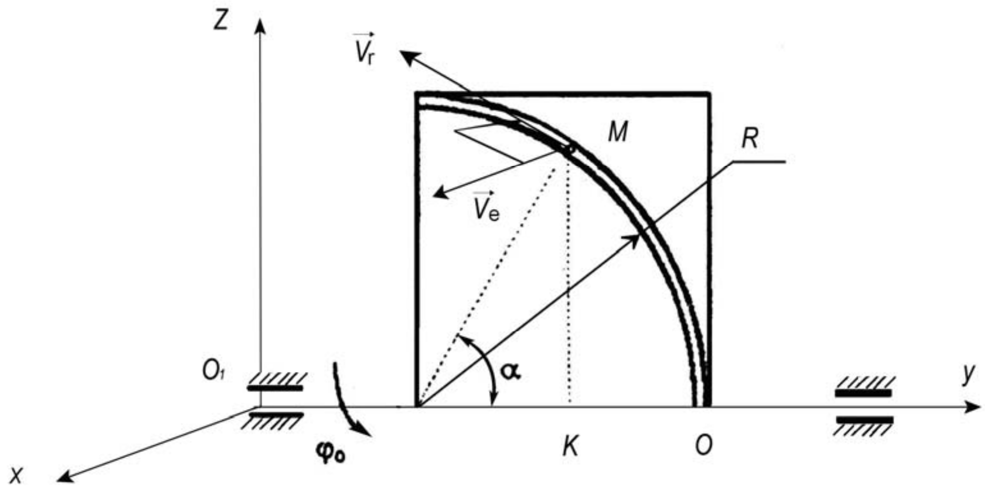


Рис. 11

Определяем относительное, переносное и абсолютное движения. Относительным является движение точки по поверхности пластины. Оно задано в естественной форме уравнением S_r = OM = $2{,}5\pi t^2$, см. Переносным является вращательное движение пластины вокруг оси O_1y

$\varphi_e = 2t^3 - 5t$ - уравнение переносного движения.

Абсолютным движением будет движение точки M в неподвижной системе координат xyz с началом в точке O_1.

Находим положение точки на поверхности пластины в заданный момент времени t_1 = 2 с:

$OM = 2{,}5\pi t_1^2 = 2{,}5\pi*2^2 = 10\pi$ см.

Положение точки на пластине удобно определить углом α:

$$\alpha = \frac{OM}{R} = \frac{10\pi}{30} = \frac{\pi}{3} = 60^o.$$

Определение абсолютной скорости точки (рис. 11):

Относительная скорость:

$$V_r = \frac{dS_r}{dt} = 5\pi t = 5\pi t_1 = 5\pi*2 = 31{,}4 \text{ см/с.}$$

Переносная скорость:

$$V_e = \omega_e MK .$$

Здесь:

$$\omega_e = \frac{d\varphi_e}{dt} = 6t^2 - 5 = 6t_1^2 - 5 = 6*2^2 - 5 = 19 \text{ с}^{-1}$$ - угловая скорость пластины;

$MK = R\sin\alpha = 30*0{,}866 = 25{,}98$ см - расстояние от точки M до оси вращения пластины.

$$V_e = 19*25{,}98 = 493{,}62 \text{ см/с.}$$

Вектора $\vec{V}_r$ и $\vec{V}_e$ перпендикулярны друг другу.

Абсолютная скорость точки M:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{31{,}4^2 + 493{,}62^2} = 494{,}62 \text{ см/с}$$

Определение абсолютного ускорения точки (рис. 12):

Относительное ускорение : $\vec{a}_r = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n}$.

Здесь $\vec{a}_r^{\tau}$ и $\vec{a}_r^{n}$ - касательная и нормальная составляющие вектора $\boldsymbol{a_r}$

$a_r^{\tau} = \dfrac{d^2S}{dt^2} = 5\pi = 15{,}71$ см/с^2,

$a_r^{n} = \dfrac{V_r^2}{R} = \dfrac{31{,}4^2}{30} = 32{,}87$ см/с^2.

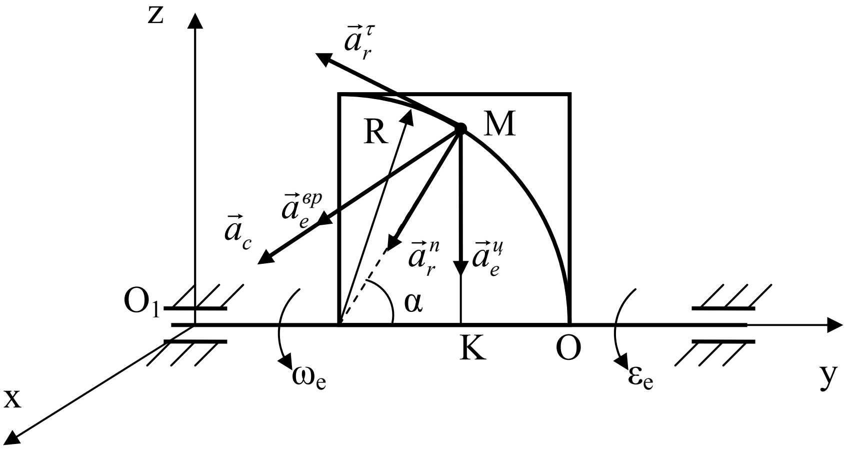


Рис. 12

Переносное ускорение : $\vec{a}_e = \vec{a}_e^{вр} + \vec{a}_e^{ц}$ **.**

Здесь $\vec{a}_e^{вр}$ и $\vec{a}_e^{ц}$ **-** вращательная и центростремительная составляющие вектора $\vec{a}_e$:

$a_e^{вр} = \varepsilon_e MK$ **;**

$\varepsilon_e = \dfrac{d^2\varphi_e}{dt^2} = 12t = 12*2 = 24$ с$^{-2}$ - угловое ускорение пластины.

$a_e^{вр} = 24*25{,}98 = 623{,}52$ см/с^2.

$a_e^{ц} = \omega_e^2 MK = 19^2*25{,}98 = 9378{,}78$ см/с^2.

Кориолисово ускорение:

$a_c = 2\omega_e V_r \sin 30^0 = 2*19*31{,}4*0{,}5 = 596{,}6$ см/с^2.

Абсолютное ускорение: $\vec{a} = \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_e^{вр} + \vec{a}_e^{ц} + \vec{a}_e$.

Это векторное уравнение удобно решать координатным способом, проецируя его на оси координат x, y , z:

$a_x = a_e^{вр} + a_c = 623{,}52 + 596{,}6 = 1220{,}12$ см/с^2

$a_y = - a_r^{\tau} \cdot sin60^o - a_r^{n} \cdot cos60^o = - 15{,}71*0{,}866 - 32{,}87*0{,}5 = - 30{,}04$ см/с^2

$a_z = - a_e^{ц} + a_r^{\tau}\cdot cos60^o - a_r^{n}\cdot sin60^o = - 9378{,}78 + 15{,}71*0{,}5 - 32{,}87*0{,}866 = - 9399{,}39$ см/с^2.

$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{120{,}12^2 + (-30{,}04)^2 + (-9399{,}39)^2} = 9478{,}3$ см/с^2.

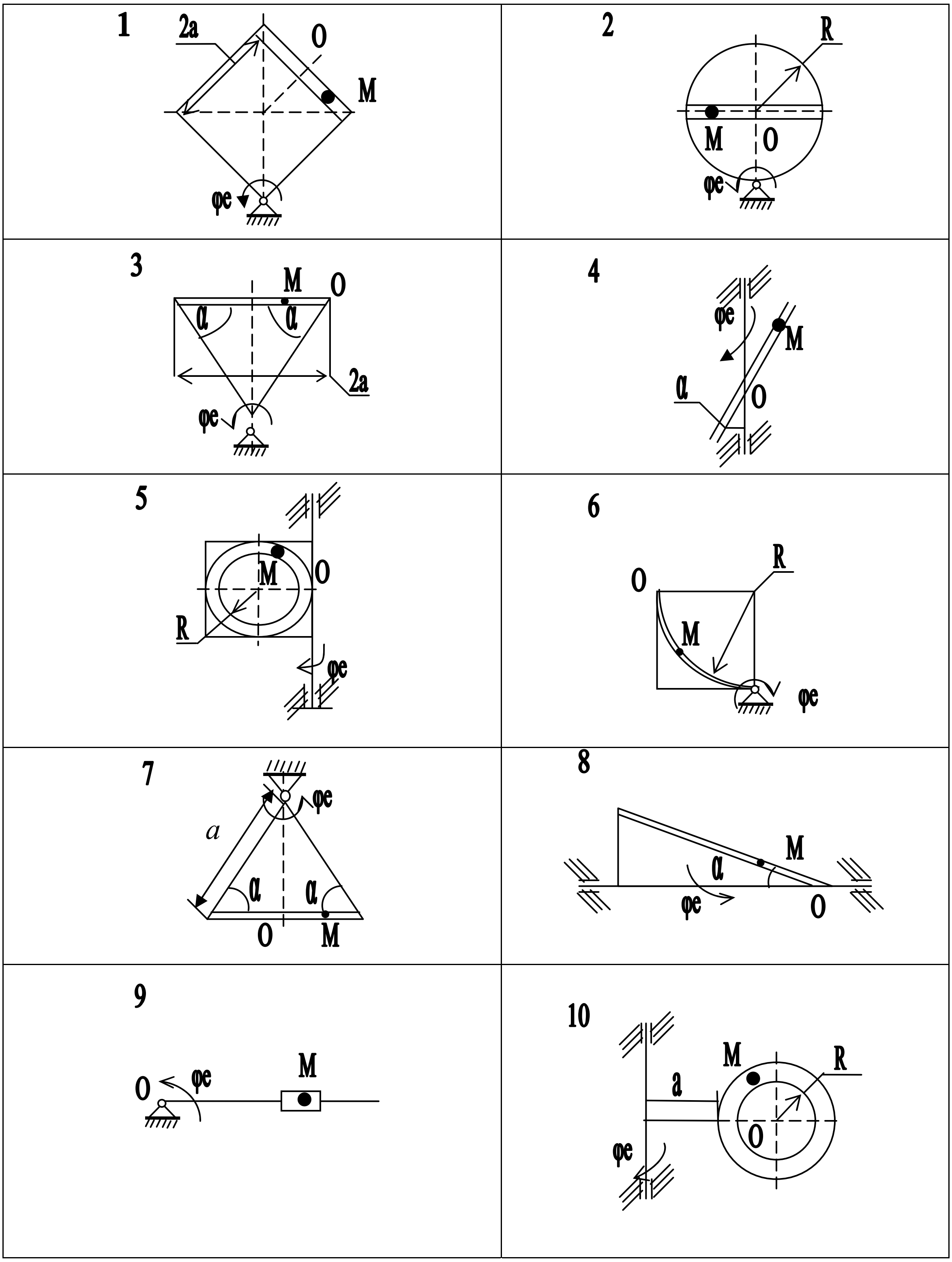

1
2a
O
M
φe
2
R
M
O
φe
3
M
O
α
α
2a
φe
4
φe
M
α
O
5
M
O
R
φe
6
R
O
M
φe
7
φe
a
α
α
O
M
8
M
α
φe
O
9
M
O
φe
10
M
R
a
O
φe

Рис. 13а

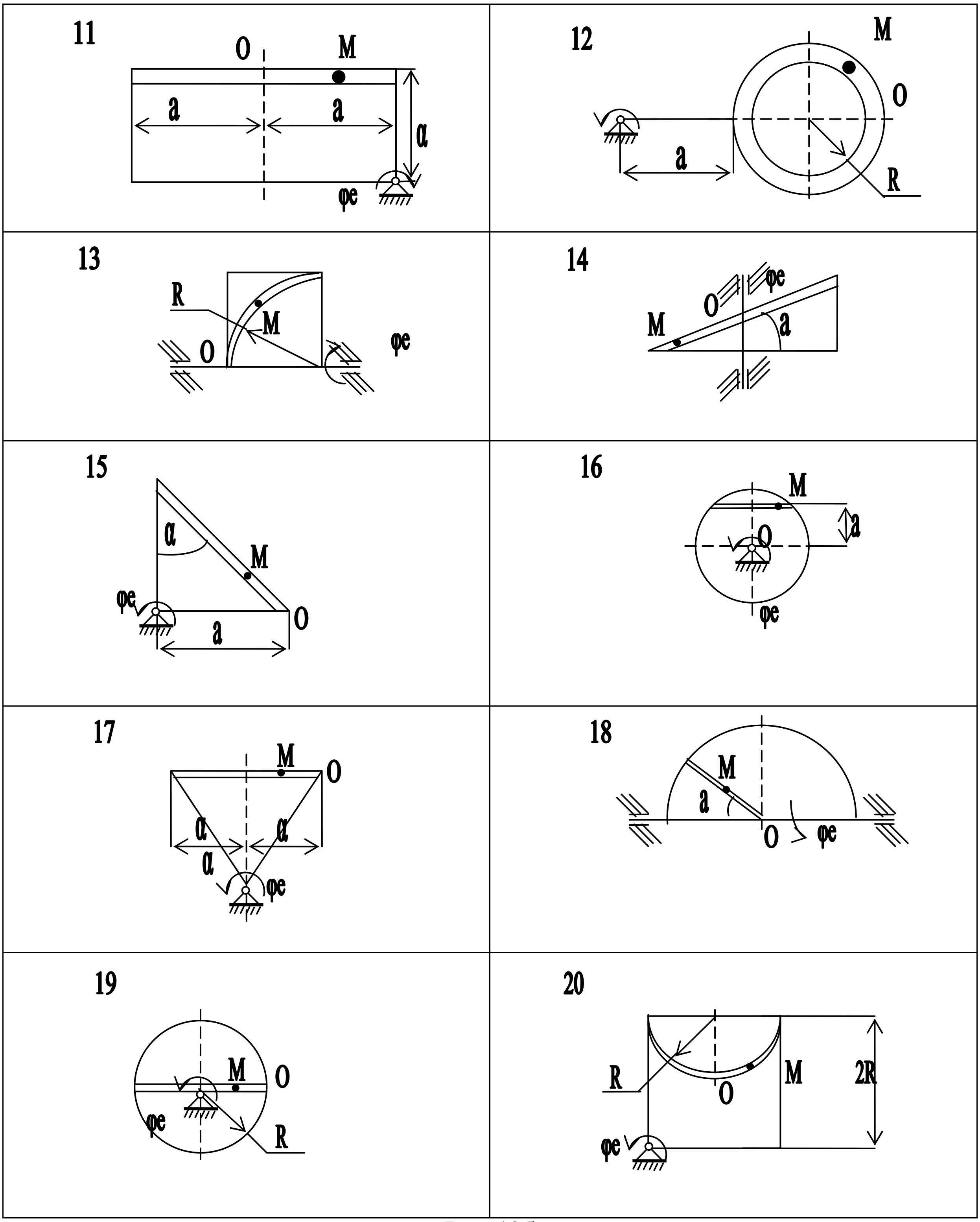

11
O
M
a
a
α
φe
12
M
O
a
R
13
R
M
O
φe
14
φe
O
M
a
15
α
M
φe
O
a
16
M
a
O
φe
17
M
O
α
α
α
φe
18
M
a
O
φe
19
M
O
φe
R
20
R
M
2R
O
φe

Рис. 13б

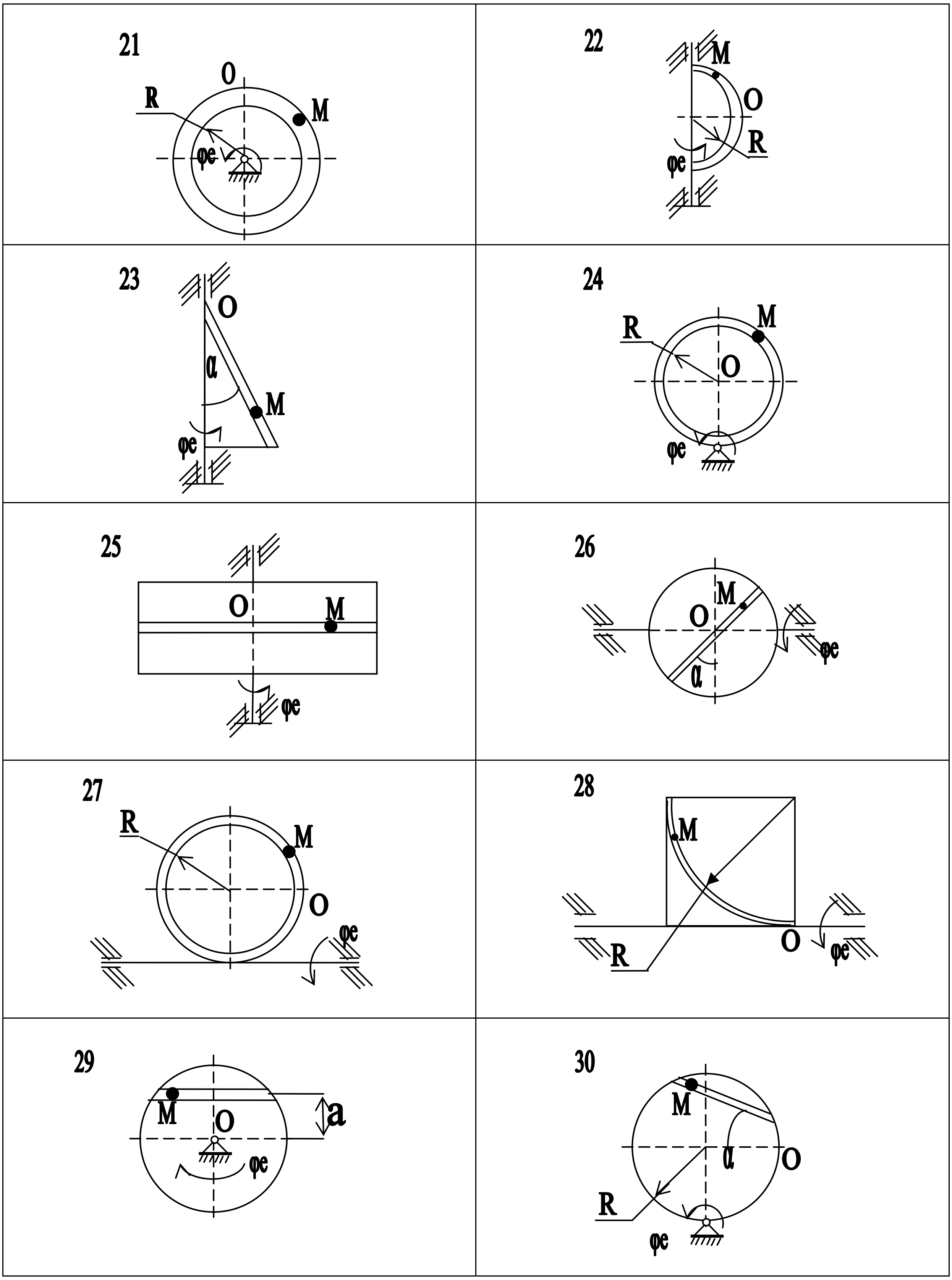

21
O
R
M
φe
22
M
O
R
φe
23
O
α
M
φe
24
R
M
O
φe
25
O
M
φe
26
M
O
φe
α
27
R
M
O
φe
28
M
R
O
φe
29
M
O
a
φe
30
M
α
O
R
φe

Рис. 13в

Таблица 5

Вари-ант	Уравнение переносного движения $\varphi_e = f_1(t)$, рад	Уравнение относительного движения $S_r = f_2(t)$, см	R см	a см	α град.	t_1 с
1	$2t^3 - t^2$	$18\sin(\pi t/4)$		20		2/3
2	$0{,}4t^2 + t$	$20\sin(\pi t/6)$	20			2
3	$2t + 0{,}5t^2$	$6t^3$		30	60	2
4	$0{,}6t^2$	$10\sin(\pi t/6)$			30	1
5	$3t - 0{,}5t^3$	$40\pi\cos(\pi t/6)$	30			2
6	$0{,}75t + 1{,}5t^2$	$150\pi t^2$	18			0,2
7	$0{,}5t^2$	$20\cos(\pi t/6)$		30	60	2
8	$t^3 - 5t$	$6(t + 0{,}5t^2)$			30	2
9	$4t + 1{,}6t^2$	$10(1 + \sin 2\pi t)$				1/8
10	$1{,}2t - t^2$	$20\pi\cos(\pi t/4)$	20	20		4/3
11	$2t^2 - 0{,}5t$	$25\sin(\pi t/3)$		25		2
12	$5t - 4t^2$	$10\pi t$	20	30		1
13	$4t - 2t^2$	$2{,}5\pi t^2$	40			2
14	$8t^2 - 3t$	$10\sin(\pi t)$			30	1/3
15	$0{,}2t^3 + t$	$6(t^2 + t)$		30	45	2
16	$t - 0{,}5t^2$	$15\sin(\pi t)$		20		1/3
17	t^2	$20t^2$		10	60	1
18	$8t - t^2$	$10t + t^3$			60	2
19	$t + 3t^2$	$6t + 4t^3$	40			2
20	$6t + t^2$	$15\pi\cos(\pi t/6)$	30			2
21	$2t - 4t^2$	$25\pi(t + t^2)$	50			1
22	$4t - 0{,}2t^2$	$10\pi\sin(\pi t/4)$	30			2
23	$2t - 0{,}25t^2$	$3t^2 + 4t$			30	2
24	$2t - 0{,}3t^2$	$7{,}5\pi(t + 3t^3)$	30			1
25	$10t - 0{,}5t^2$	$15\sin(\pi t/3)$				2
26	$2{,}5t^2$	$8\cos(\pi t/2)$			45	0,5
27	$t - 0{,}5t^3$	$10\pi t^2$	30			1
28	$2t^3 - 5t$	$2{,}5\pi t^2$	40			2
29	$0{,}6t^2$	$20\sin(\pi t/6)$		18		2
30	$2t^2 - 3t$	$20t^2$	20		30	1

Задача Д1.

Точка массой m = 5 кг движется в вертикальной плоскости из положения A с начальной скоростью V_A (см. рис. 14). На участке AB длиной *l* движение происходит по шероховатой плоскости (коэффициент трения скольжения f). На этом участке на точку действует постоянная сила F.

В положения B точка покидает плоскость и движется только под действием силы тяжести без учета сопротивления воздуха.

В задаче требуется:

1. Получить уравнение движения точки на участках AB и BC (системы координат показаны на рис. 14).

2. Найти время движения точки на участках AB и BC.

3. Определить координаты и скорость точки в положении C. Исходные данные приведены в таблице 6. отрицательные значения углов α и β следует отложить по часовой стрелке.

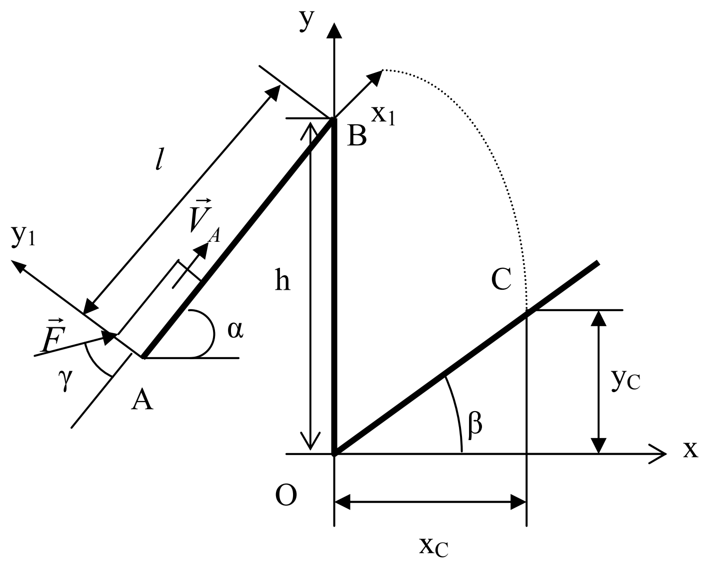


Рис. 14 (для всех вариантов)

Указания

Здесь рассматривается вторая (основная) задача динамики точки зная массу точки, действующие на нее силы и начальные условия движения, получить уравнение движения точки. Решение этой задачи связано с составлением и последующим решением дифференциальных уравнении движения второго порядка.

При выполнении задания нужно сначала получить уравнение движения точки на участке AB в системе координат x_1Ay_1, найти время ее движения τ_1 на этом участке и скорость V_B в положении B. После этого рассматривается движение точки на участке BC в системе координат xOy и находится время движения на этом участке τ_2 координаты точки в положении C x_C и y_C и скорость V_C.

Для того чтобы составить дифференциальное уравнение движения, нужно показать на рисунке точку в произвольной момент ее движения и приложить к ней все действующие на нее активные силы и реакции связей. При решении дифференциальных уравнений движения второго порядка постоянные интегрирования C_1 и C_2 находятся из начальных условий движения. Для этого в уравнение движения в

уравнение скорости нужно подставить значения координаты и скорости точки в начальный момент времени, т.е. при t = 0.

Пример решения задачи

Точка массой m = 10 кг движется в вертикальной плоскости. На участке АВ движение происходит по шероховатой поверхности (коэффициент трения скольжения f = 0,1) с начальной скоростью V_A = 2 м/с. В положении В точка покидает плоскость и движется только под действием силы тяжести без учета сопротивления воздуха.

$\alpha = 30^o$, $\beta = -30^o$, $\gamma = 30^o$, F = 100Н, l = 5 м, h = 6м.

В задаче требуется:
1. Получить уравнение движения точки на участке АВ и ВС.
2. Определить время движения точки на участках АВ и ВС.
3. Определить координаты и скорость точки в положении С.

Рассмотрим движение точки на участках АВ в системе координат x_1Ay_1 (см. рис. 15). На точку действуют силы тяжести Р, сила F, нормальная реакция плоскости N и сила трения $F_т$.

Определим начальные условия движения:

$x_{10} = 0$, $y_{10} = 0$, $\dot{x}_{10} = 2$, $\dot{y}_{10} = 0$.

Составим дифференциальное уравнение движения точки на участке АВ.

$$m\ddot{x} = \sum F(x) = F\cos\gamma - P\sin\alpha - F_т \qquad (1)$$

Сила трения $F_т = f * N$. Реакцию N найдем из уравнения:

$\sum F_{y1} = 0$, $N - F\sin\gamma - P\cos\alpha = 0$, $N = F\sin\gamma + mg\cos\alpha$
$F_т = f(F\sin\gamma + mg\cos\alpha) = 0.1\,(100 * 0.5 + 10 * 9.8 * 0.866) = 13.49$ Н
Подставляя численные значения F, $F_т$, m, α, γ в уравнение (1), получим:

$10\ddot{x}_1 = 100 * 0,866 - 10 * 9,8 * 0,5 - 13,49$; $\ddot{x}_1 = 2,41$ (2) – дифференциальное уравнение скольжения точки на участке АВ. Его решение:

$\dot{x}_1 = C_2 + 2,41 * t$ – уравнение скорости ,

$x_1 = C_1 + C_2 * t + 0,5 * 2,41 * t$ – уравнение движения.

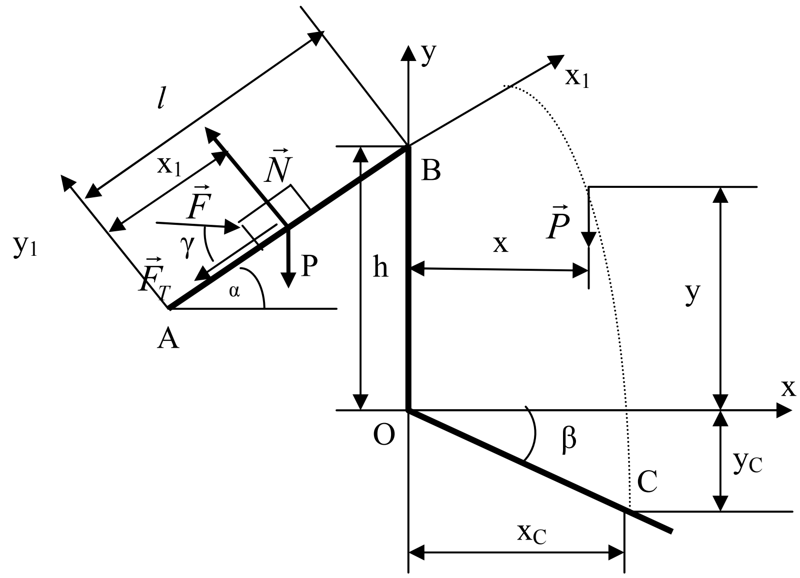


Рис. 15

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из начальных условий движения. При t = 0

$x_1 = x_{10} = C_1 = 0.$ $\dot{x}_1 = \dot{x}_{10} = C_2 = 2$

Таким образом, уравнение движения и уравнения скорости точки на участке АВ имеют вид:

$x_1 = 2 * t + 1{,}21 * t^2$ (3) – уравнение движения.
$\dot{x}_1 = 2 + 2{,}41 * t$ (4) – уравнение скорости.

Найдем время движения точки на участке АВ τ_1.

При t = τ x = l = 5м и уравнение (3) принимает вид:
$L = 2 * \tau_1 + 1.21\,\tau_1^2$, $1.21\,\tau_1^2 + 2\tau_1 - 5 = 0$

$$\tau_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4*1{,}21*5}}{2*1{,}21} = 1.37c$$

Отрицательное решение не имеет смысла и его в расчет не принимаем. Скорость точки в положении В найдем из уравнения (4), подставив в него t = τ = 1.37c
$V_B = 2 + 2{,}41\,\tau = 2 + 2{,}41 * 1{,}37 = 5{,}3$ м/с

Рассмотрим движение точки на участке ВС в системе координат xОy.
Начальные условия движения: $x_0 = 0$; $y_0 = h = 6$:
$\dot{x}_0 = V_B * \cos\alpha = 5.3 * 0.866 = 4.59$ $\dot{y}_0 = V_B * \sin\alpha = 5.3 * 0.5 = 2.65$

Составляем дифференциальное уравнение движения.

$m\ddot{x}$ = ∑F_{ix} = 0, $\ddot{x}$ = 0 (5)
$m\ddot{y}$ = ∑F_{iy} = - mg, y = - g = - 9.8 (6)

Уравнение (5) имеет решение y = C_1 + C_2 * t – 0.5 * gt². При t = 0

x = x_0 = C_1 = 0, $\dot{x}$ = $\dot{x}_0$ = C_2 = 4.59. таким образом, x = 4,59t (7) – уравнение движения и $\dot{x}$ = 4,59 (8) – уравнение скорости точки относительно оси Ox.

Уравнение (6) имеет решение y = C_1 + C_2 * t – 0,5 * gt².

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из начальных условий движения. При t = 0

y = y_0 = C_1 = 6, $\dot{y}$ = $\dot{y}_0$ = C_2 = 2.65.

таким образом, получим:

y = 6 + 2,65 t – 4,9t² (9) – уравнение движения и $\dot{y}$ = 2,65 – 9,8 t (10) – уравнение скорости точки относительно оси Oy.

Время движения точки на участке BC τ_2 и координаты точки в положении C Xc и Yc найдем из совместного решения уравнений (7) и (9), учитывая , что Xc и Yc связаны соотношением $y_C = -x_C tg30^o$.

При t = τ_2

$x_C = 0{,}59\tau_2$
$y_C = 6 + 2{,}6\,\tau_2 - 4{,}9\,\tau_2^2$
$y_C = -\,0{,}58\,x_C$

Решая эту систему уравнений, получим

x_C = 8,17 м, y_C = - 4,8 м, τ_2 = 1,78с.

Подставив τ_2 в уравнение (8) и (10), найдем скорость точки в положении С.

$\dot{x}_C$ = 4,59 м/с. $\dot{y}_C$ = 2,65 – 9,8 * 1,78 = - 14,79 м/с.

$$V_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = \sqrt{4{,}59^2 + \left(-14{,}79\right)^2} = 15{,}49 \text{ м/с.}$$

Таблица 6

Вариант	F Н	α град	β град	γ град	l м	h м	V_A м/с	f
1	50	-30	0	60	5	5	2	0,1
2	70	30	30	30	6	6	5	0,2
3	80	45	-30	0	10	12	10	0
4	100	45	30	45	12	20	12	0
5	100	60	-30	30	15	5	8	0,3
6	120	60	30	30	20	12	6	0
7	80	45	45	30	8	15	4	0
8	40	-30	30	60	6	10	10	0,3
9	50	30	-30	0	12	8	2	0,1
10	20	-45	30	90	15	12	10	0,3
11	80	45	60	0	12	20	10	0,1
12	60	30	0	45	5	15	10	0,2
13	120	60	30	0	8	15	8	0,1
14	40	30	-45	60	10	5	8	0,1
15	90	45	30	0	12	16	12	0,1
16	80	45	-30	30	6	10	15	0,1
17	50	30	-30	45	8	6	10	0,2
18	60	30	60	0	10	20	4	0,2
19	110	60	0	0	18	15	16	0,1
20	8	45	45	30	5	12	10	0,2
21	70	45	-30	30	6	5	12	0,1
22	90	45	30	0	10	10	12	0,1
23	60	30	-45	45	10	5	15	0,3
24	100	30	-30	60	8	6	10	0,1
25	120	30	-30	0	6	10	2	0,3
26	80	45	60	0	18	15	12	0,1
27	90	45	30	0	5	18	15	0,1
28	110	60	0	30	10	12	15	0
29	10	60	30	30	12	8	12	0
30	70	30	-30	45	6	6	10	0,3

Задача Д 4

Механическая система находится в вертикальной плоскости и приводится в движение силой **F** из состояния покоя. Учитывая трение скольжения и трение качения, определить скорость груза 1 в тот момент, когда он пройдет путь S = 2 м. Расчетные схемы для различных вариантов представлены на рис. 17 (а, б, в). Исходные данные приведены в табл.7. Нити, соединяющие тела системы, считать невесомыми и нерастяжимыми.

Указания

В этой задаче для динамического расчета механической системы используется теорема об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^j$$

Здесь T и T_o - кинетическая энергия системы в текущий и начальный моменты времени. Поскольку движение начинается из состояния покоя, $T_o = 0$. $\sum A_k^e$ и $\sum A_k^j$ – суммы работ внешних и внутренних сил. Трение скольжения в точках контакта колес и нерастяжимых нитей отсутствует, поэтому $\sum A_k^j = 0$. Таким образом, $T = \sum A_k^e$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий входящих в нее тел: $T = T_1 + T_2 + T_3$. Для тела, совершающего поступательное движение, $T = {mV^2}/{2}$, где m и V - масса и скорость тела в текущий момент времени, т е в тот момент, когда груз 1 пройдет путь S. При вращательном движении. $T = {I\omega^2}/{2}$. Здесь I - момент инерции тела относительно оси вращения, ω- угловая скорость тела. Для ступенчатых шкивов и катков, $I_C = mi_C{}^2$ где m- масса тела, i_C - радиус инерции тела относительно оси вращения. Значения радиусов инерции ступенчатых колес приводятся в табл. 7. Шкивы и колеса, для которых радиус инерции не указан, следует считать однородными дисками и находить момент инерции по формуле $I_C = 0,5mR^2$.

Для катка, совершающего плоское движение, кинетическая энергия находится как сумма кинетических энергий его поступательного движения и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

При определении суммы работ внешних сил следует иметь ввиду, что нормальная реакция катка должна быть смещена в направлении движения на величину коэффициента трения качения δ, а сила трения скольжения груза направлена в сторону, противоположную направлению его движения.

Перемещения катка и шкива нужно выразить через перемещение груза 1, составив уравнения связи этих тел, и подставить полученные соотношения в выражение суммы работ внешних сил. Угловые скорости катка и шкива и скорость центра масс катка нужно выразить через скорость груза, дифференцируя по времени уравнения связи, и получить кинетическую энергию системы как функцию скорости груза.

Пример решения задачи

Механическая система начинает движение из состояния покоя под действием силы F = 2кН, приложенной к грузу 1 (см. рис.16). Определить скорость груза 1 в тот момент, когда он переместится на величину S_1 = 2м.

m_1=:300 кг, m_2 = 200 кг, m_3 =100 кг, R_2=0,6 м, r_2=0,2 м, R_3= 0,4 м, i_2=0,5 м, $\alpha=30^o$, β = 45^o, f=0,3, δ =0,2 см.

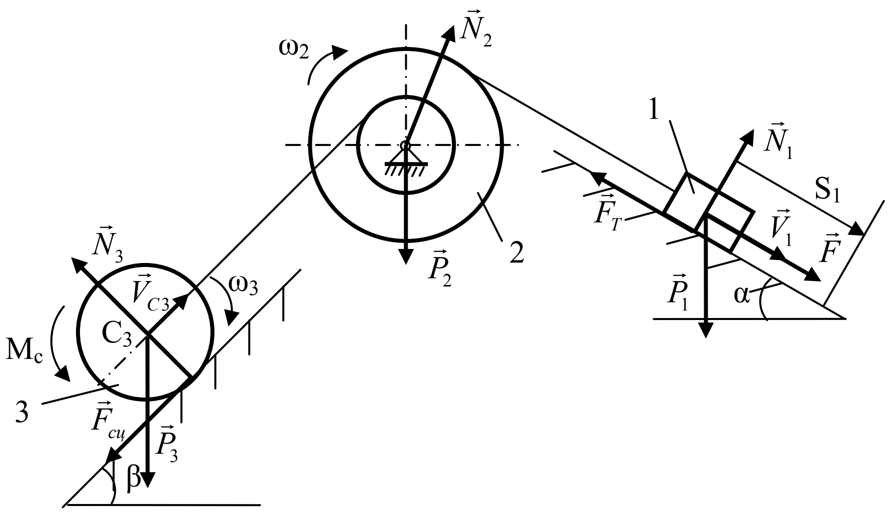


Рис.16

Составим уравнения связи груза 1, шкива 2 и катка 3:

$$\varphi_2 = \frac{s_1}{R_2};\ s_3 = \frac{s_1 r_2}{R_2};\ \varphi_3 = \frac{s_3}{R_3} = \frac{s_1 r_2}{R_2 R_3}$$

Определим кинетическую энергию системы в текущий момент времени, т. е. когда груз 1 пройдет путь S_1:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad (1)$$

$T_1 = \dfrac{m_1 V_1}{2}$ - кинетическая энергия груза 1.

$T_2 = \dfrac{I_2 \omega_2^2}{2} = \dfrac{m_2 i_2^2 \omega_2^2}{2}$ - кинетическая энергия колеса 2.

$T_3 = \dfrac{m_3 V_{C3}^2}{2} + \dfrac{I_3 \omega_3^2}{2} = \dfrac{m_3 V_{C3}^2}{2} + \dfrac{m_3 R_3^2 \omega_3^2}{2}$ - кинетическая энергия катка 3.

Дифференцируя по времени уравнения связи, получим:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2};\ V_{C3} = \frac{V_1 r_2}{R_2};\ \omega_3 = \frac{V_{C3}}{R_3} = \frac{V_1 r_2}{R_2 R_3}$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (1), получим

$$T = \left(\frac{m_1}{2} + \frac{m_2 i_2^2}{2R_2^2} + \frac{m_3 r_2^2}{2R_2^2} + \frac{m_3 r_2^2}{4R_2^2}\right)V_1^2 =$$

$$= \left(\frac{300}{2} + \frac{200*0,5^2}{2*0,6^2} + \frac{100*0,2^2}{2*0,6^2} + \frac{100*0,2^2}{4*0,6^2}\right)V_1^2 = 227,78V_1^2$$

Находим сумму работ внешних сил системы

$\sum A_i^e$ = A(F)+A(P_1)+A(F_T)+A(P_3)+A(N_3). (2)

A(F) =FS_1 --- работы силы F.

A(P_1)=$mgS_1\sin\alpha$ – работа сила тяжести P_1 груза 1.

A(F_T) =-$m_1gfS_1\cos\alpha$ – работа силы трения скольжения F_T.

A(P_3) = -$m_3gS_3\sin\beta$ – работа силы тяжести P_3 катка 3.

A(M_c) = -$\delta m_3 g\varphi_3$ – работа сил трения качения катка.

A(N_1)=A(P_2)=A(N_2)=A(N_3)=A($F_{сц}$)=0

Подставив в уравнение (2) S_3 и φ_3 , выраженные через S_1, получим:

$$\sum A_i^e = Fs_1 + m_1 g s_1 \sin\alpha - m_1 g f s_1 \cos\alpha - m_3 g \sin\beta \frac{s_1 r_2}{R_2} - \delta m_3 g \cos\beta \frac{s_1 r_2}{R_2 R_3} =$$

$$= 2000*2 + 300*9,8*2*0,5 - 300*9,8*0,3*2*0,866 - 100*9,8*0,707*\frac{2*0,2}{0,6} - \text{Находим}$$

$$-100*9,8*0,707*0,002*\frac{2*0,2}{0,6*0,4} = 4948,16$$

скорость груза V_1:

$T = \sum A_k^e$; 227,78V_1^2=4948,16.

$V_1 = \sqrt{\dfrac{4948,16}{227,78}}$ =4,66 м/с.

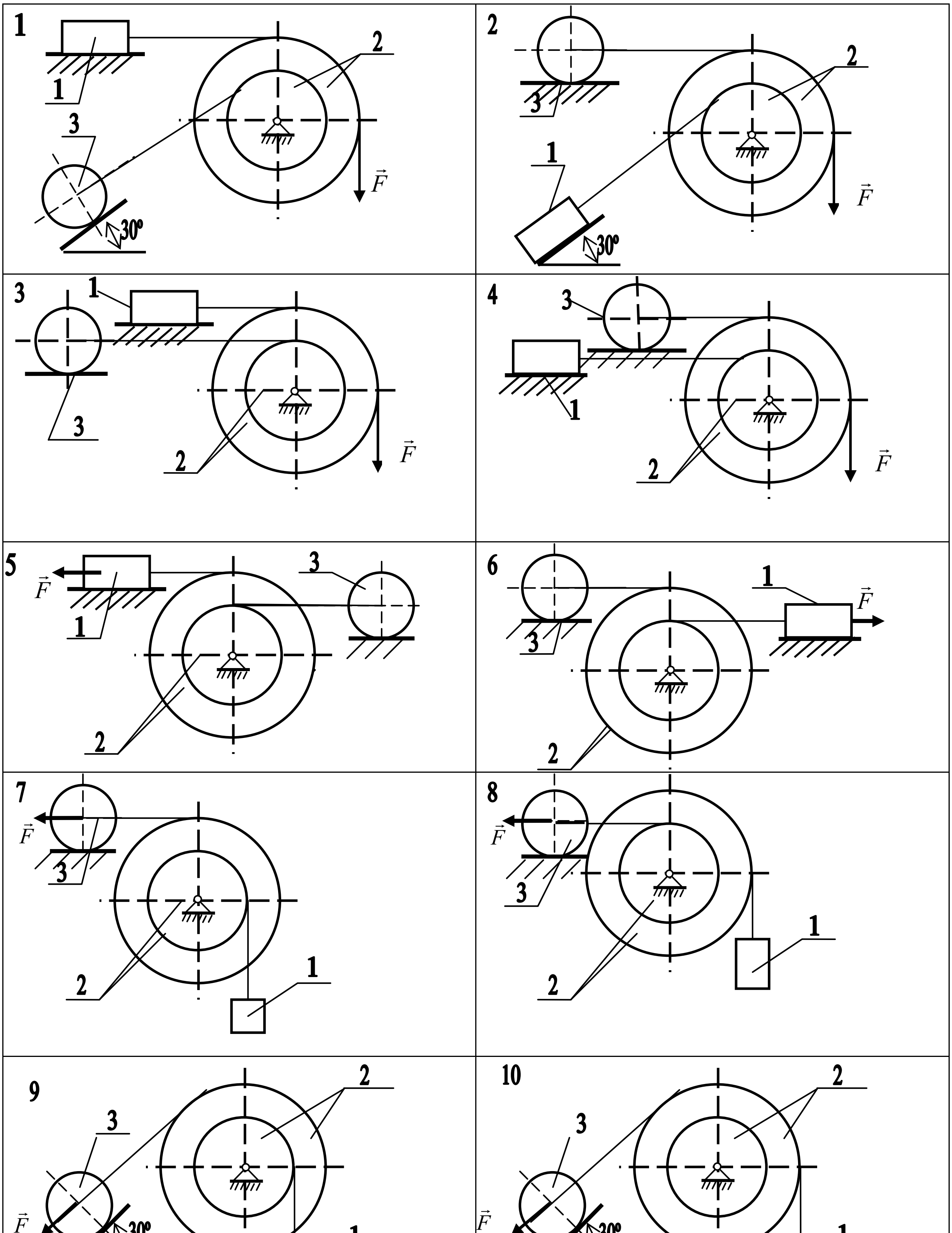

1
2
1
3
$\vec{F}$
30°
2
2
3
1
$\vec{F}$
30°
3
1
3
2
$\vec{F}$
4
3
1
2
$\vec{F}$
5
$\vec{F}$
3
1
2
6
1
$\vec{F}$
3
2
7
$\vec{F}$
3
2
1
8
$\vec{F}$
3
1
2
9
2
3
$\vec{F}$
30°
1
10
2
3
$\vec{F}$
30°
1

Рис. 17а

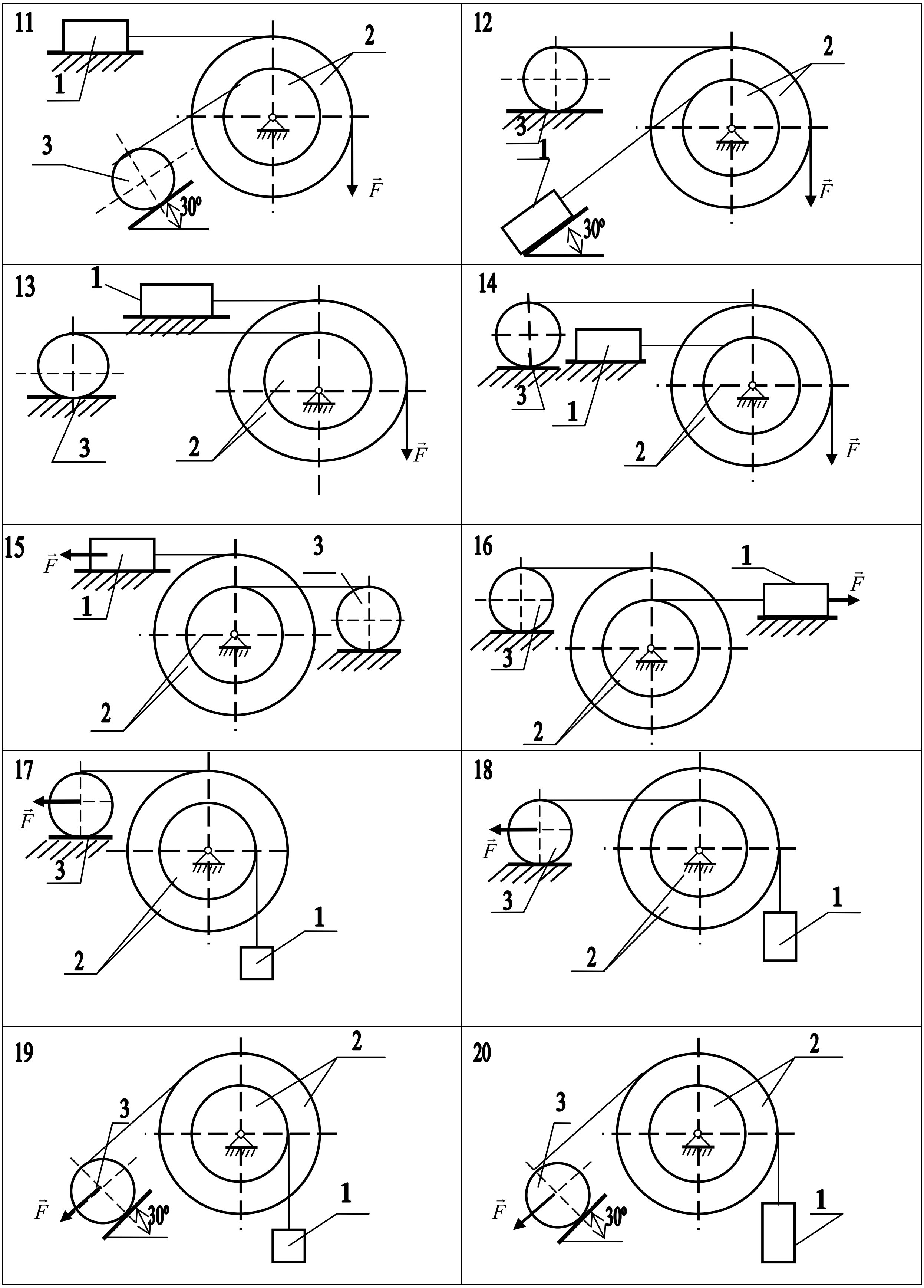


Рис. 17б

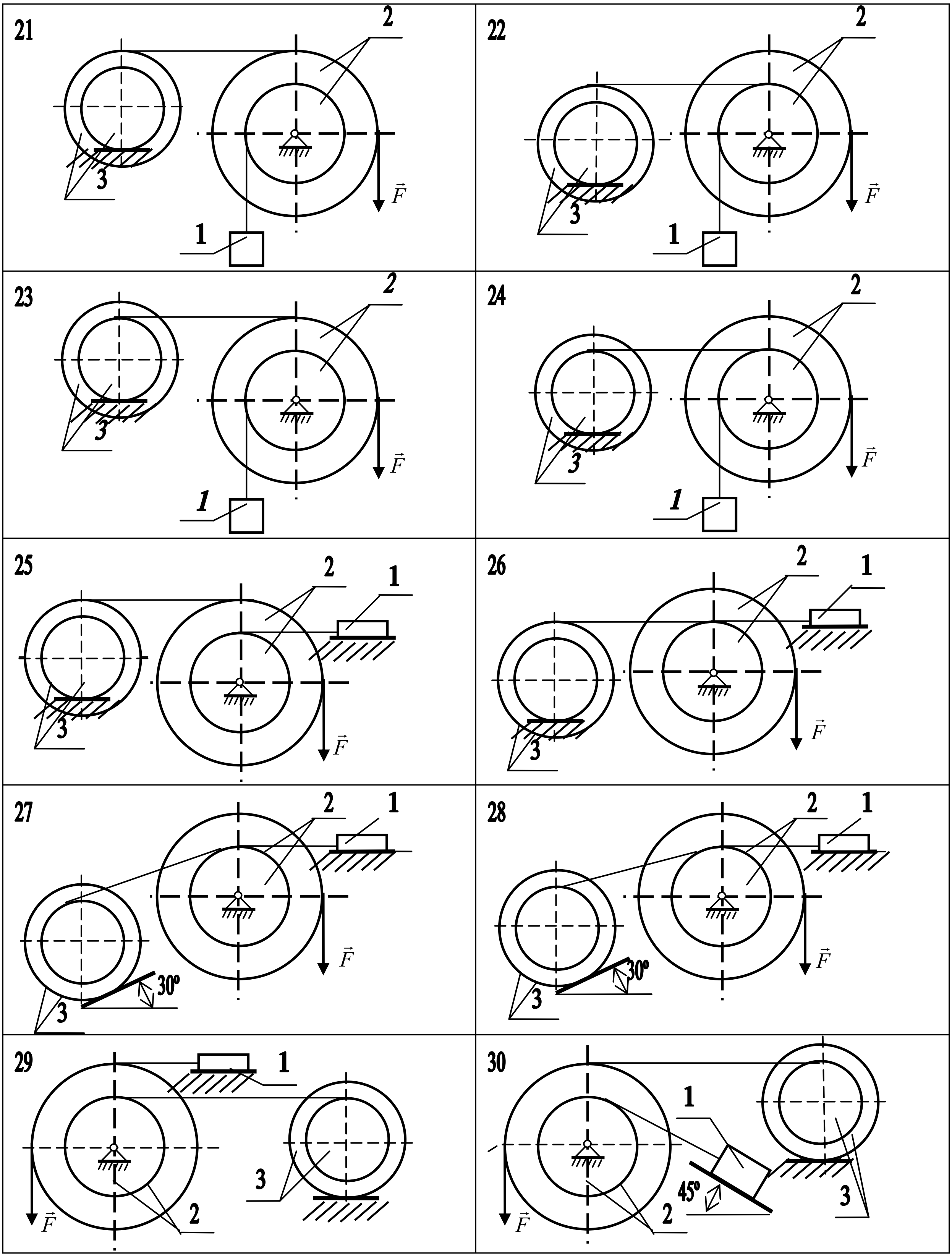


Рис. 17в

Таблица 7

Вари-ант	m_1 кг	m_2 кг	m_3 кг	R_2 м	r_2 м	R_3 м	r_3 м	i_{c2} м	i_{c3} м	f	δ см	F Н
1	100	200	300	0,6	0,3	0,2		0,5		0,1	0,5	3000
2	50	150	200	0,6	0,3	0,2		0,5		0,2	0,6	1000
3	200	300	100	0,6	0,3	0,2		0,5		0,3	0,8	1500
4	300	100	200	0,6	0,3	0,2		0,4		0,1	0,4	1500
5	100	150	300	0,6	0,3	0,2		0,5		0,2	0,6	1000
6	400	100	200	0,5	0,25	0,2		0,4		0,2	0,5	1500
7	100	100	300	0,5	0,25	0,2		0,4			0,6	2000
8	200	300	100	0,6	0,3	0,25		0,5			0,8	500
9	100	200	300	0,5	0,3	0,2		0,4			0,3	1500
10	500	100	200	0,5	0,3	0,2		0,4			0,4	2000
11	100	100	300	0,8	0,6	0,4		0,5		0,3	0,8	2500
12	200	300	500	0,5	0,3	0,2		0,4		0,2	0,6	2000
13	300	100	150	0,4	0,2	0,15		0,3		0,3	0,5	2500
14	300	200	100	0,6	0,3	0,2		0,5		0,2	0,4	2000
15	100	200	300	0,6	0,3	0,2		0,5		0,1	0,3	2000
16	100	200	300	0,5	0,3	0,2		0,4		0,2	0,6	2000
17	200	250	150	0,4	0,2	0,15		0,3			0,5	1800
18	200	200	100	0,5	0,3	0,2		0,4			0,6	2500
19	150	100	300	0,6	0,3	0,2		0,5			0,2	3000
20	100	50	50	0,5	0,3	0,2		0,4			0,4	3000
21	100	200	200	0,6	0,3	0,4	0,2	0,5	0,3		0,5	2000
22	150	300	100	0,5	0,3	0,4	0,3	0,4	0,35		0,6	2500
23	100	100	300	0,6	0,2	0,5	0,2	0,4	0,4		0,8	2000
24	200	200	100	0,6	0,3	0,4	0,2	0,5	0,3		0,6	3000
25	150	300	200	0,5	0,3	0,4	0,2	0,4	0,3	0,3	0,5	1500
26	200	100	100	0,5	0,3	0,4	0,2	0,4	0,3	0,2	0,4	2000
27	100	100	200	0,6	0,3	0,4	0,2	0,5	0,3	0,3	0,5	3000
28	200	100	200	0,6	0,3	0,4	0,2	0,5	0,3	0,1	0,8	2000
29	100	200	300	0,5	0,3	0,4	0,25	0,4	0,35	0,2	0,6	1500
30	50	100	300	0,6	0,3	0,4	0,3	0,5	0,35	0.1	0,5	1500

Задача Д5

Механическая система, состоящая из колес 1, 2 и груза 3, приводится в движение силой F. К одному из колес приложен момент сил сопротивления M_c.

Определить значение силы $F=F_0$, при котором система находится в состоянии покоя.

В некоторый момент времени сила F_0 увеличивается вдвое ($F=2F_0$) и система приходит в движение. Для этого состояния системы найти:

1. Ускорение груза и угловые ускорения колес;
2. Реакции внешних и внутренних связей.

Различные варианты систем представлены на рис. 21 (а,б,в). Исходные данные приведены в табл. 8.

Указания

В этой задаче нужно выполнить динамический расчет механической системы с помощью методов аналитической механики.

При выполнении расчета учесть следующие допущения:

1. Нити, соединяющие тела системы нерастяжимые и невесомые;
2. Колеса 1 и 2 не имеют относительного скольжения;
3. Трение в подшипниках колес отсутствует;
4. Усилие в точке контакта колес 1 и 2 считать направленными по касательной к их окружностям;
5. Колеса, для которых в табл. 8 не указан радиус инерции *i*, считать сплошными однородными дисками.

Порядок решения:

1. Выразим угловые перемещения колес 1 и 2 φ_1 и φ_2 через перемещение груза 3 s, составив уравнение связей этих тел.
2. Используя принцип возможных перемещений, находим значения силы $F=F_0$, при котором система находится в покое. К активным силам относится сила F_0, момент сил сопротивления M_c и сила тяжести груза P_3. Сообщаем системе возможное перемещение, при котором груз перемещается на величину δs, а колеса поворачиваются на углы $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Получив и приравняв к нулю сумму элементарных работ активных сил, используя уравнение связи, выразим возможные перемещения колес $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ через возможное перемещение груза δs и найдем значение силы F_0.
3. С помощью общего уравнения динамики находим ускорение груза и угловые ускорения колес при значении силы $F=2F_0$. Силы инерции груза приводятся к главному вектору $\overline{\Phi} = -m_3\overline{a}$, а силы инерции колес – к главным моментам $M_1^{\Phi} = -I_1\varepsilon_1$ и $M_2^{\Phi} = -I_2\varepsilon_2$, приведенных к их осям вращения. Знаки минус указывают на то, что $\overline{\Phi}$, M_1^{Φ}, M_2^{Φ} и соответствующие им ускорения имеют противоположные направления.
4. Используя принцип Даламбера, определим реакции внешних и внутренних связей. Будем рассматривать систему, к которой приложены активные силы и силы инерции, как неподвижную составную конструкцию. Условно разъединим ее по внутренним связям на отдельные тела и составим уравнения равновесия

для каждого тела, приложив к нему кроме активных сил и сил инерции реакции внешних и внутренних связей.

Пример решения задачи

Для механической системы (см. рис. 18) найти:
1. Значение силы $F=F_0$, при котором система находится в состоянии покоя.
2. Ускорение груза и угловые ускорения колес при $F=2F_0$.
3. Реакции внешних и внутренних связей при $F=2F_0$.

m_1=500 кг, m_2=200 кг, m_3=400 кг, M_C=600 Нм, R_1=0,6 м, R_2=0,5 м, r_2=0,25 м, i_2=0,4 м.

Решение:

Выразим угловые перемещения колес через перемещение груза s:

$$\varphi_2 = \frac{s}{r_2} \quad (1); \quad \varphi_1 = \frac{sR_2}{r_2 R_1}. \quad (2)$$

Определим значение силы $F=F_0$, при котором система находится в покое. Для этого воспользуемся принципом возможных перемещений. Сообщим системе возможное перемещение в направление действия силы F_0. При этом груз 3 поднимется на величину δs, колесо 2 повернется на угол $\delta\varphi_2$ по часовой стрелке, а колесо 1 – на угол $\delta\varphi_1$ против часовой стрелки. Находим сумму элементарных работ активных сил системы.

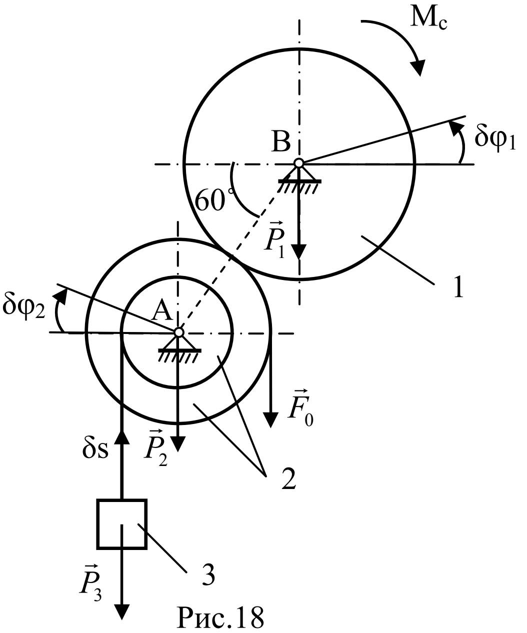


Рис.18

$$\sum \delta A_k^F = 0;$$

$$-m_3 g\delta s + F_0 R_2 \delta\varphi_2 - M_c \delta\varphi_1 = 0. \qquad (3)$$

Используя уравнения связи (1) и (2), выразим в уравнении (3) $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ через δs.

$$-m_3 g\delta s + F_0 R_2 \frac{\delta s}{r_2} - M_c \frac{\delta s R_2}{r_2 R_1} = 0.$$

Из этого выражения после элементарных преобразований найдем значение силы F_0:

$$F_0 = -m_3 g\frac{r_2}{R_2} + \frac{M_c}{R_1} = \frac{400*9,8*0,25}{0,5} + \frac{600}{0,6} = 2960$$

Н.

Чтобы найти ускорение груза и угловые ускорения колес, составим общее уравнение динамики. Для этого приложим к системе кроме активных сил главный вектор сил инерции груза и главные моменты сил инерции колес (см. рис. 19). При этом $F=2F_0$.

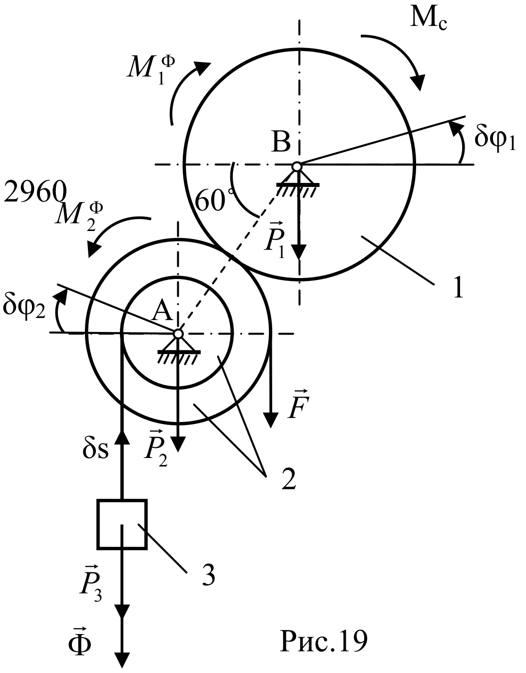


Рис.19

$\bar{\Phi} = -m_3 \bar{a}$ - главный вектор сил инерции груза 3;

$M_1^\Phi = -I_1 \varepsilon_1$ - главный момент сил инерции колеса 1;

$M_2^{\Phi} = -I_2\varepsilon_2$ - главный момент инерции колеса 2.

Здесь: $I_1 = \dfrac{m_1 R_1^2}{2}$; $I_2 = m_2 i_2^2$.

Сообщим системе возможное перемещение в направлении действия силы F и найдем сумму элементарных работ активных сил и сил инерции на этом перемещении:

$$\sum \delta A_k^F + \sum \delta A_k^{\Phi} = 0;$$

$$FR_2\delta\varphi_2 - M_c\delta\varphi_1 - m_3 g\delta s - \Phi\delta s - M_1^{\Phi}\delta\varphi_1 - M_2^{\Phi}\delta\varphi_2 = 0.$$

Подставим в это уравнение значения Ф, M_1^{Φ}, M_2^{Φ}:

$$FR_2\delta\varphi_2 - M_c\delta\varphi_1 - m_3 g\delta s - m_3 a\delta s - \frac{m_1 R_1^2}{2}\varepsilon_1\delta\varphi_1 - m_2 i_2^2\varepsilon_2\delta\varphi_2 = 0. \qquad (4)$$

Используя уравнения связей, выразим $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$ через δs. Дифференцируя дважды по времени уравнения связи, выразим угловые ускорения колес ε_1 и ε_2 через ускорение груза *a*:

$$\delta\varphi_2 = \frac{\delta s}{r_2};\ \delta\varphi_1 = \frac{\delta s R_2}{r_2 R_1};\ \varepsilon_2 = \frac{a}{r_2};\ \varepsilon_1 = \frac{aR_2}{r_2 R_1}.$$

Подставив эти соотношения в уравнение (4), получим:

$$FR_2\frac{\delta s}{r_2} - M_c\frac{\delta s R_2}{r_2 R_1} - m_3 g\delta s - m_3 a\delta s - \frac{m_1 R_1^2}{2}\frac{aR_2}{r_2 R_1}\frac{\delta s R_2}{r_2 R_1} - m_2 i_2^2\frac{a}{r_2}\frac{\delta s}{r_2} = 0.$$

Сократив на δs и проделав элементарные алгебраические преобразования, получим:

$$F\frac{R_2}{r_2} - M_c\frac{R_2}{r_2 R_1} - m_3 g = a\left(m_3 + \frac{m_1 R_2^2}{2r_2^2} - \frac{m_2 i_2^2}{r_2^2}\right);$$

$$\frac{5920*0,5}{0,25} - \frac{600*0,5}{0,25*0,6} - 400*9,8 = a\left(400 + \frac{500*0,5^2}{2*0,25^2} + \frac{200*0,4^2}{0,25^2}\right).$$

Откуда ускорение груза:

$a = 3,1$ м/с^2.

Угловые ускорения колес:

$$\varepsilon_1 = \frac{aR_2}{r_2 R_1} = \frac{3,1*0,5}{0,25*0,6} = 10,33 \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a}{r_2} = \frac{3,1}{0,25} = 12,4 \text{ рад/с}^2.$$

Определяем реакции внешних и внутренних связей системы. Будем считать систему, к которой приложены активные силы, реакции связей и силы инерции, неподвижной составной конструкцией. Условно разъединим эту конструкции. По внутренним связям на отдельные тела и составим уравнения равновесия для каждого тела.

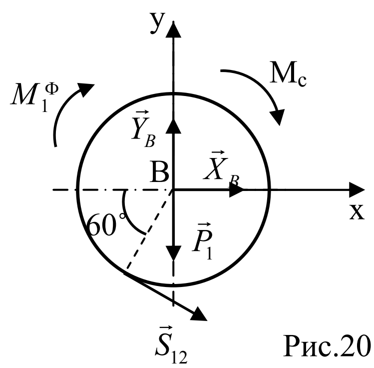


Рис.20

Для колеса 1 (рис.20):

$$\sum F_{ix} = 0;\ X_B + S_{12}\cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0;\ Y_B - P_1 - S_{12}\sin 30^\circ = 0; \qquad (5)$$

$$\sum M_{iB} = 0;\ S_{12}R_1 - M_c - M_1^{\Phi} = 0.$$

Решая систему уравнений (5), получим:

S_{12}=2549,5 Н; X_B=-2207,87 Н; Y_B=6174,75 Н.

Для груза 3 (рис.21):

$\sum F_{iy} = 0$; $S_{23} - P - \Phi = 0$. (6)

Решая (6), получим:

S_{23}=5160 Н

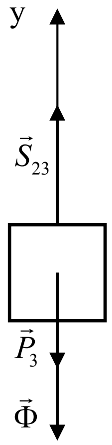


Рис.21

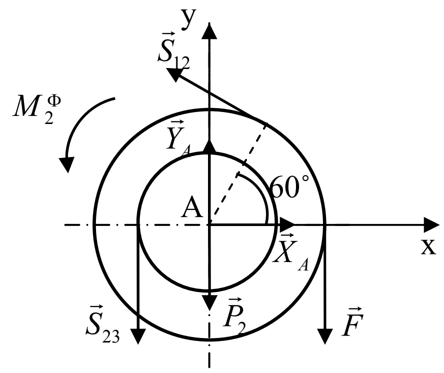


Рис.22

Для колеса 2 (рис.22):

$\sum F_{ix} = 0$; $X_A + S_{12}\cos 30^\circ = 0$;

$\sum F_{iy} = 0$; $Y_A - P_2 + S_{12}\sin 30^\circ - S_{23} - F = 0$; (7)

$\sum M_{iA} = 0$; $M_2^\Phi + S_{23}r_2 + S_{12}R_2 - FR_2 = 0$.

Решая систему уравнений (7), получим:

X_A=2207,87 Н; Y_A=11765,25 Н.

Уравнение $\sum M_{iA} = 0$ обращается в тождество, поскольку все реакции внешних и внутренних связей найдены. Оно может быть использовано для проверки правильности решения:

$396,8 + 5160 * 0,25 + 2549,5 * 0,5 - 5920 * 0,5 = 0$.

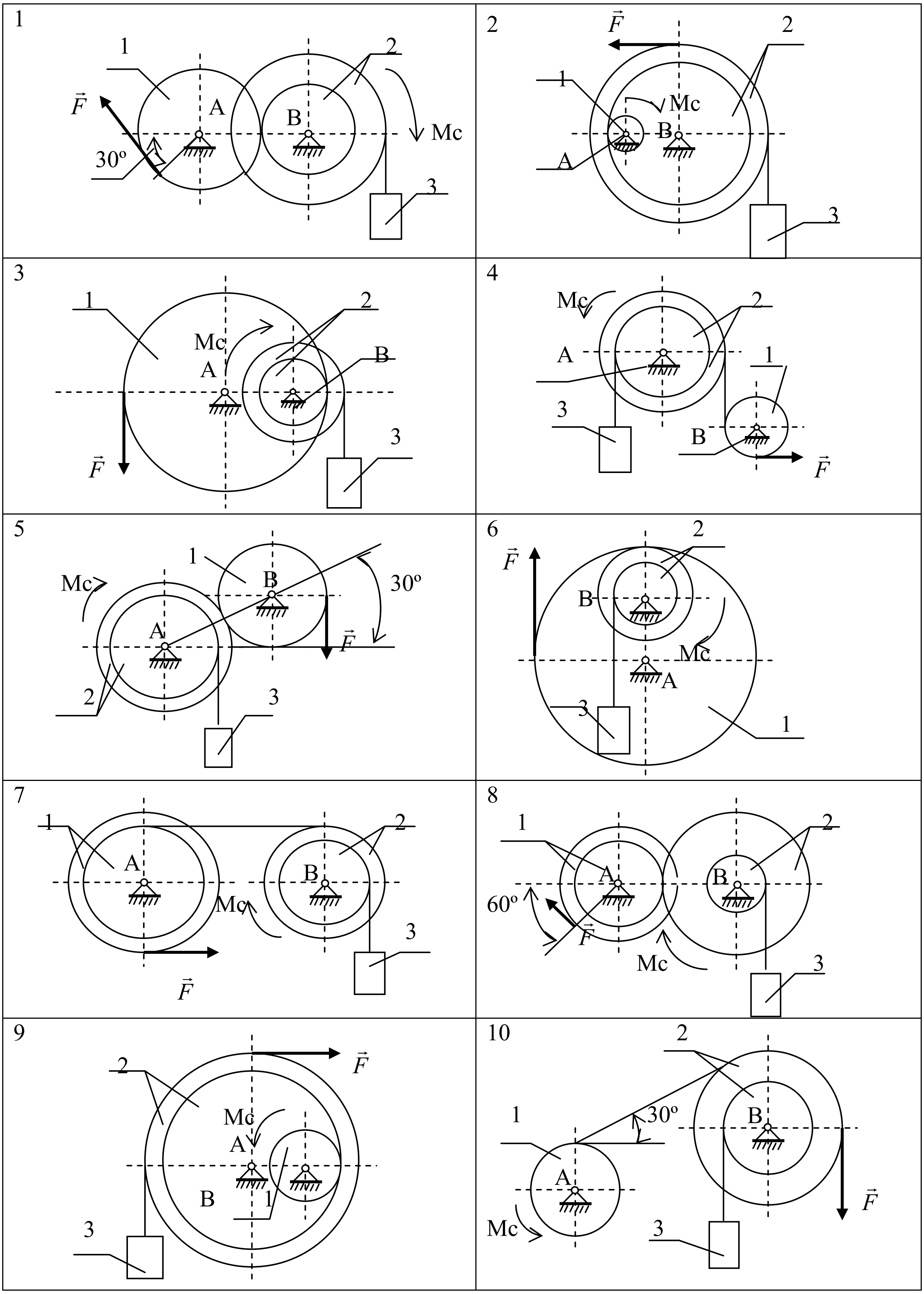

1
1
2
A
B
Mc
30º
3
2
2
1
Mc
B
A
3
3
1
2
Mc
A
B
3
4
Mc
2
A
1
3
B
5
1
B
30º
Mc
A
2
3
6
2
B
Mc
A
3
1
7
1
2
A
B
Mc
3
8
1
2
A
B
60º
Mc
3
9
2
Mc
A
B
1
3
10
2
1
30º
B
A
Mc
3

Рис. 23а

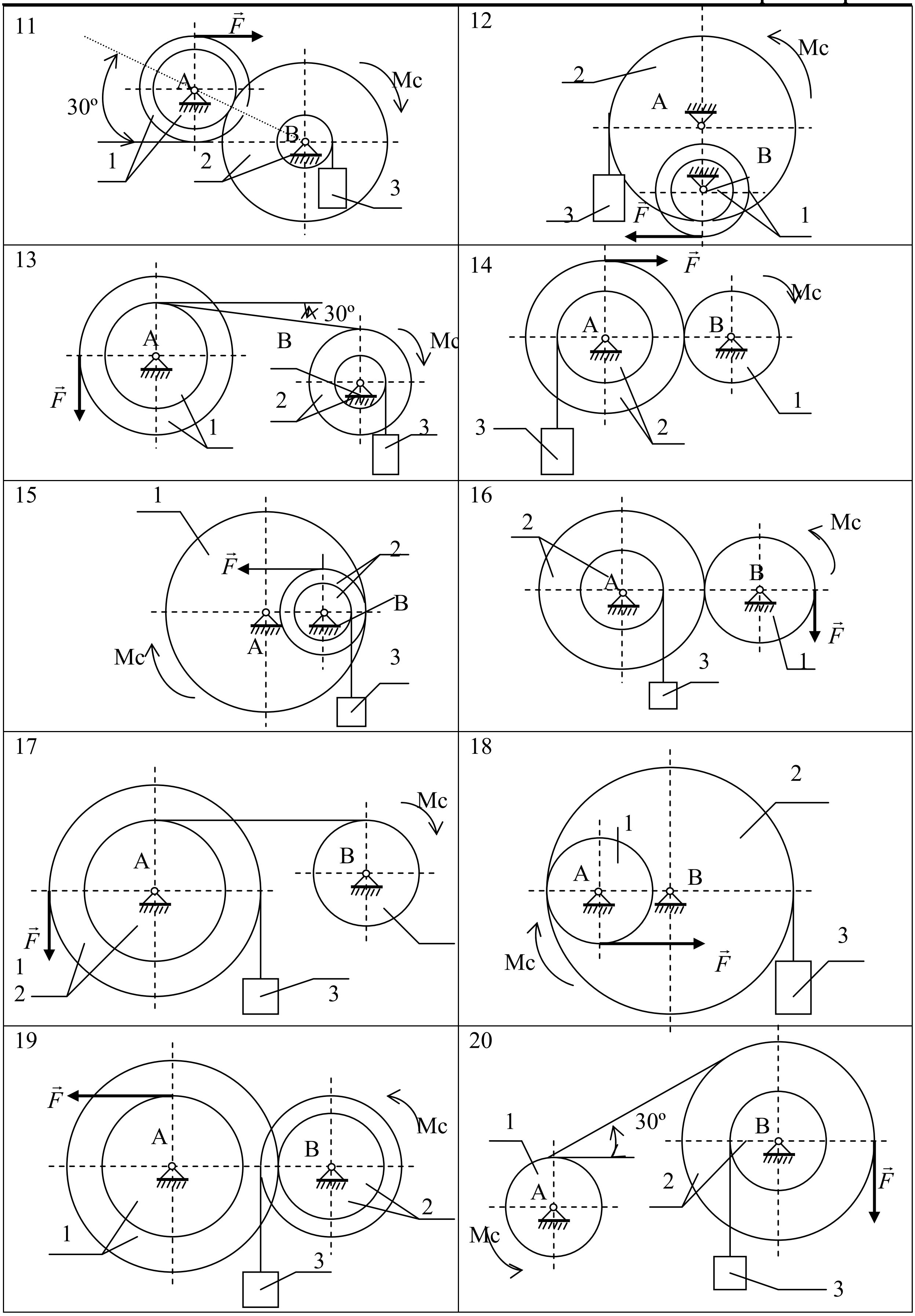


Рис. 23б

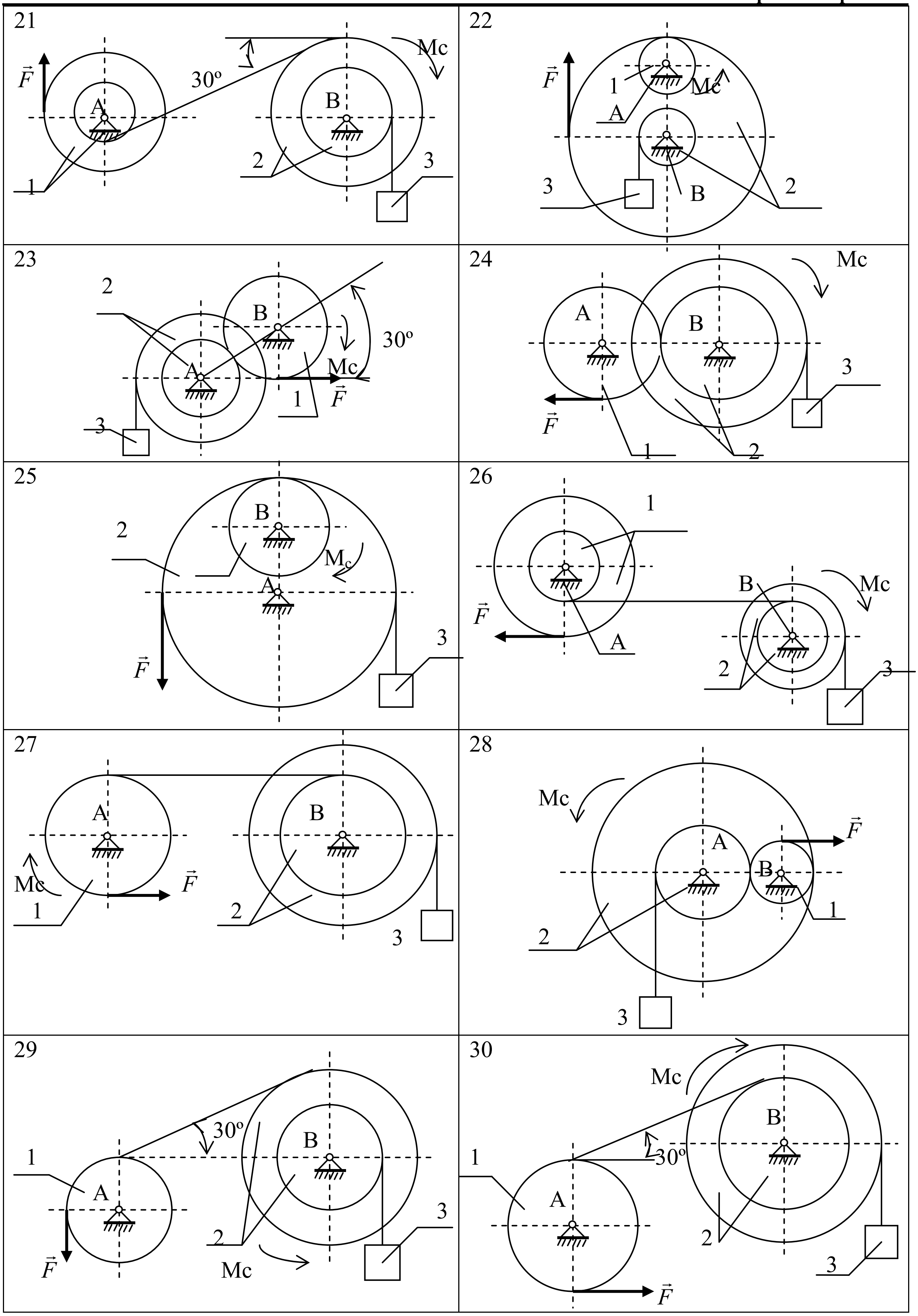


Рис. 23в

Таблица 8

Вари-ант	m_1 кг	m_2 кг	m_3 кг	R_1 м	r_1 м	R_2 м	r_2 м	i_1 м	i_2 м	M_c Нм
1	100	300	500	0,5		0,6	0,3		0,5	1000
2	300	600	500	0,1		0,6	0,5		0,4	600
3	100	300	400	0,6		0,2	0,1	0,2	0,5	800
4	200	100	400	0,4		0,6	0,4		0,5	1400
5	150	300	600	0,4		0,6	0,4		0,5	1500
6	100	300	600	0,6		0,2	0,1	0,5	0,2	800
7	300	200	400	0,6	0,4	0,4	0,2	0,5	0,3	500
8	300	250	700	0,5	0,3	0,6	0,2	0,4	0,5	500
9	100	300	500	0,2		0,8	0,6		0,7	600
10	150	300	400	0,3		0,7	0,4		0,5	1200
11	150	300	700	0,5	0,4	0,7	0,5	0,6	0,5	1000
12	100	200	600	0,2	0,1	0,8		0,3	0,6	1500
13	200	100	300	0,6	0,4	0,4	0,3	0,5	0,4	400
14	100	200	400	0,4		0,6	0,3		0,5	400
15	300	150	500	0,6		0,2	0,1	0,5	0,1	300
16	200	300	700	0,4		0,6	0,3		0,5	1200
17	300	100	800	0,3		0,8	0,5		0,5	1000
18	200	100	800	0,2		0,6			0,5	1500
19	300	200	400	0,6	0,3	0,5	0,4	0,5	0,4	500
20	100	400	800	0,3		0,6	0,4		0,5	1200
21	100	200	300	0,5	0,3	0,6	0,4	0,4	0,5	800
22	100	300	800	0,2		0,6	0,1		0,5	800
23	200	300	400	0,4		0,6	0,3		0,3	900
24	200	300	500	0,5		0,6	0,4		0,5	500
25	100	400	500	0,2		0,6			0,5	800
26	300	200	500	0,6	0,4	0,5	0,3	0,5	0,4	600
27	100	300	500	0,4		0,6	0,3		0,6	600
28	100	300	900	0,1		0,6	0,2		0,5	1500
29	200	100	500	0,4		0,6	0,4		0,5	1000
30	100	400	600	0,3		0,6	0,3		0,5	700