

Московский технологический университет

Математический анализ

4 семестр

Учебно-методическое пособие

Для студентов очно-заочной и заочной форм обучения

Институты РТС и Электроники

Москва 2016

Составители: Т.Р. Игонина, О.А. Малыгина, Н.С. Чекалкин

Введение

Пособие содержит типовые задания, теоретические вопросы по курсу математического анализа 4-го семестра. Содержание данного курса включает теорию функций комплексного переменного, а также вопросы, связанные с приложениями интегралов, зависящих от параметра. В пособии приведены примерные образцы контрольных работ, типовой образец экзаменационного (зачетного) билета, представлен список рекомендуемой литературы.

Выполнение заданий, приведенных в пособии, позволит учащимся полноценно усвоить материал курса математического анализа 4-го семестра, успешно написать контрольные работы, выполнить типовой расчет, сдать экзамен (зачет).

Пособие предназначается для студентов очно-заочной и заочной форм обучения институтов РТС и Электроники.

Теоретические вопросы по курсу

1. Комплексные числа. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа. Действия с комплексными числами (сложение, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

2. Основные элементарные функции комплексного переменного, их свойства. Примеры. Предел, непрерывность и дифференцируемость функции комплексного переменного.

3. Определение аналитической функции, ее свойства. Условия Коши-Римана. Примеры аналитических и неаналитических функций.

4. Определение интеграла функции комплексного переменного вдоль кусочно-гладкой кривой, свойства. Теоремы Коши для односвязной и многосвязной области.

5. Степенной ряд, область его сходимости. Ряд Тейлора аналитической функции, основные разложения. Ряд Лорана аналитической функции. Примеры разложения в ряд Лорана.

6. Изолированные особые точки (и.о.т.). Классификация и.о.т. по главной части ряда Лорана и на основе поведения функции в окрестности особой точки. Ноль аналитической функции, его кратность. Связь полюса с нулем обратной функции. Примеры.

7. Вычет аналитической функции в и.о. т. Определение вычета по ряду Лорана. Вычисление вычета в устранимой особой точке, в простом и кратном полюсе.

8. Основная теорема о вычетах. Примеры вычисления контурных интегралов с помощью вычетов.

9. Вычисление несобственных интегралов по прямой и полупрямой. Лемма Жордана. Примеры использования леммы Жордана.

10. Теорема Руше и ее применение.

11. Использование теории вычетов при решении задачи Коши операторным методом в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений (нахождение оригинала с помощью вычетов).

12. Интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Определение Гамма-функции, ее свойства. Бета-функция, ее выражение через гамма-функцию. Применение гамма и бета-функций.

Методические указания

Для успешного усвоения содержания курса математического анализа 4-го семестра рекомендуется выполнить типовые задания, представленные в настоящем пособии. Данные задания составляют содержание *типового расчета*.

Преподаватель назначает каждому студенту группы номер варианта. Студент в соответствии с номером варианта выполняет задания из пособия в отдельной тетради. Решение каждой задачи должно быть подробным с указанием использованных теоретических положений.

Выполнение типового расчета – обязательное условие допуска студента на экзамен (зачет).

Приведем типовые образцы контрольных работ по курсу и экзаменационных (зачетных) билетов.

Примерный вариант контрольной работы по теме «Аналитические функции. Решение уравнений»

- 1) Вычислить: а) $(-5 + 5i)^{100}$; б) $(3 - i\sqrt{3})^{-2i}$.
- 2) Решить уравнения: а) $z^3 + 27i = 0$; б) $\sin 2z = 2$. Ответы изобразить на комплексной плоскости.
- 3) Проверить аналитичность следующих функций: а) $f(z) = iz^2 + 27i + 3\bar{z}$; б) $f(z) = e^{iz} + 2i$.
- 4) Изобразить на комплексной плоскости $\operatorname{Re}(2/z) > 1$.

Примерный вариант контрольной работы по теме «Классификация и.о.т. Вычеты. Приложения вычетов»

1. Функцию $f(z) = \frac{1}{2z + 5}$ разложить в ряд Лорана в области $|z| > 5/2$.
2. Указать особые точки, их тип, найти вычеты в особых точках:

$$\text{а) } f(z) = (z - 3)^3 \cdot e^{\frac{7}{z-3}}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{e^{3z} - 1}{z^2(z^2 + 4)}$$

$$3. \text{ Вычислить: а) } \int_L \frac{\cos 5z - 1}{z^2(z^2 + 1)} dz, \quad L: |z + i| = 1,5.$$

$$\text{Б) } \int_L \frac{z}{\sin z} dz, \quad L: |z + 2| = 3.$$

$$4. \text{ Вычислить: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 25)(x^2 + 1)} dx.$$

Примерный вариант экзаменационного (зачетного) билета

$$1. \text{ Решить уравнение: а) } z^5 + 32i = 0; \quad \text{б) } \sin 4z = 3.$$

$$2. \text{ Установить, является ли функция аналитической: } f(z) = |ie^{3z}|.$$

3. Указать особые точки, их тип, найти вычеты в особых точках:

$$f(z) = \left(\frac{5}{z-2} + z - 2 \right) \cdot e^{\frac{6}{z-2}}.$$

$$4. \text{ Вычислить: } \int_L \frac{\cos 9z - 1}{z^3(z^2 - 4)} dz, \quad L: |z - i| = 2.$$

$$5. \text{ Вычислить: } \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 5x}{x^2 + 4} dx.$$

$$6. \text{ С помощью вычетов найти оригинал изображения: } F(p) = \frac{p}{p^4 - 1}.$$

7. Теоретический вопрос (из списка, приведенного выше).

Замечание: по усмотрению преподавателя количество задач контрольной работы или билета может быть изменено.

Курс математического анализа (4 семестр) базируется на материале курсов математического анализа 1-го, 2-го и 3-го семестров (теория пределов, теория дифференцирования, теория интегрирования, теория рядов), на материале курса алгебры, на материале курса дифференциальных уравнений.

Список рекомендуемой литературы

1. Аксененкова И.М., Малыгина О.А., Чекалкин Н.С., Шухов А.Г. Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения. М.: URSS, 2009.

2. Бугров Я.С, Никольский С.М. Сборник задач по высшей математике. М., 2001.

3. Ильин В.А, Позняк Э.Г. Основы математического анализа. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика. Том 1- 4. М.: URSS, 2005.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1 и 2. М.: Дрофа, 2004.
6. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Г., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. М.: Физматлит, 2003.
7. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Лань, 2005.
8. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис Пресс, 2004.
9. Аксененкова И.М., Игонина Т.Р., Малыгина О.А., Улуханян А.Р., Унучек С.А. Математический анализ (4 семестр). Учебно-методическое пособие. МИРЭА, 2014.
10. Гущина Е.Н., Игонина Т.Р., Евсеева О.А., Кольцова Е.В., Кузнецова Е.Ю., Малыгина О.А., Морозова Т.А., Немировская-Дутчак О.Э., Новикова А.И., Приходько В.Ю., Руденская И.Н., Татаринцев А.В., Унучек С.А., Фаркова Н.А., Чекалкин Н.С. Календарно-тематические планы для очно-заочного и заочного отделений факультетов РТС, Электроники, Информационных технологий. М.: МИРЭА. 2014. 64 с. // электронное издание. Рег. Свидетельство № 35184.
11. Боярчук А.К. Справочное пособие по высшей математике. Том 4. Функции комплексного переменного (теория и практика). М.: URSS, 1999.
12. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Мир, 2009.
13. Шабунин М.И., Сидоров Ю.В. Теория функций комплексного переменного. М.: ЮНИМЕДИАСТАЙЛ, 2002.
14. Эйдерман В.Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления. М.: Физматлит, 2002.

Интернет-ресурсы

15. Евграфов М.А. Аналитические функции. <http://reslib.com/book/617>
16. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. <http://reslib.com/book/40561>
17. Киселёв В.Ю., Пяртли А.С., Калугина Т.Ф. Высшая математика. Интерактивный компьютерный учебник. http://webmath.exponenta.ru/s/vm_1_index.html

Основные типы задач по курсу математического анализа 4-ый семестр

Задача №1.

Представить данное комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

№		№	
1	$(2 - 2i)^7$	2	$(-\sqrt{3} - 3i)^3$
3	$((-1 + i)(-3 + \sqrt{3}i))^4$	4	$((1 + i^3)(2 - 2^5i))^{10}$
5	$(-i^7(2 - 2\sqrt{3}i))^{11}$	6	$(i^{11}(-\sqrt{2} - \sqrt{6}i))^{13}$
7	$(-\sqrt{3} - i)^9(1 + i^{17})^7$	8	$\left(\frac{1 - i}{1 + i}\right)^8$
9	$\left(\frac{1 - i^5}{\sqrt{3} + i}\right)^{21}$	10	$\left(\frac{-1 + \sqrt{4}i}{1 + i^3}\right)^8$
11	$\left(\frac{-1 + i^{15}}{-\sqrt{3} - i^3}\right)^{15}$	12	$\frac{(1 + \sqrt{3}i)^6}{(1 + i)^2}$
13	$\frac{(\sqrt{5} + \sqrt{15}i^7)^{10}}{(\sqrt{3} + 3i^3)^4}$	14	$\frac{(7i^4 + 5i^{10})^{10}}{(-7i^2 - 7i^3)^2}$
15	$\frac{(\sqrt{17} - \sqrt{51}i^3)^6}{(20i^8 + 3i^{18})^4}$	16	$(3 - i\sqrt{3})^{200} \cdot (2 + 2i)$

Задача №2.

Решить уравнение. Корни уравнения изобразить на комплексной плоскости.

№		№	
1	$e^z + 3i = 0$	2	$e^z + 5\sqrt{2} - 7 = 0$

3	$e^{2z} + 3e^z - 4 = 0$	4	$\sin z = 2$
5	$\cos z = -3$	6	$shz = -5$
7	$chz = 6$	8	$\sin z = -3i$
9	$\cos z = 2i$	10	$shz = -4i$
11	$tgz = -2i$	12	$thz = 3$
13	$\sin z + \cos z = 2$	14	$\sin z - \cos z = 3$
15	$2chz + shz = 4$	16	$z^4 + 64i = 0$

Задача №3.

Проверить, является ли функция $f(z)$ аналитической, используя условия Коши-Римана.

№		№	
1	$f(z) = ie^{3z-i^2}$	2	$f(z) = z^2 + 5\bar{z} - 7i$
3	$f(z) = \cos(iz - 1)$	4	$f(z) = \cos(i\bar{z} - 1)$
5	$f(z) = sh2z + i$	6	$f(z) = \frac{i}{z} + z^2$
7	$f(z) = (iz)^2 + 5z + 3i$	8	$f(z) = z z + i$
9	$f(z) = ie^{(iz-1)}$	10	$f(z) = \sin(zi + 2)$
11	$f(z) = ch3z - i$	12	$f(z) = z\bar{z} + z^2 + 4$
13	$f(z) = 3z^2 - 4z + 2i$	14	$f(z) = shiz + \operatorname{Re}z$
15	$f(z) = ie^{5z} + z$	16	$f(z) = i z - z^2$

Задача №4.

Получить все разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана по степеням

$(z - z_0)$. Если z_0 — особая точка, указать тип этой особой точки и найти $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.

№	z_0	$f(z)$
1	-1	$\frac{z-1}{z(z+1)}$
2	-2	$\frac{z^2+2z-4}{z^2(z-2)}$
3	2	$\frac{2z^2-5z+4}{z(z-2)^2}$
4	1	$\frac{\sin z}{z-1}$
5	1	$\frac{z+2}{z^2-1}$
6	2	$\frac{z}{(z+2)(z+3)}$
7	-1	$\frac{3z-1}{z^2-2z-3}$
8	0	$\frac{z}{z^2+4}$
9	1	$\frac{2z^2-z+1}{z^3-z}$
10	0	$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$
11	-2	$\frac{2z^2+z+2}{z^2(z+2)}$
12	-1	$\frac{z^3+3z^2+2z+1}{z^2(z+1)^2}$

13	1	$\frac{e^z}{(z-1)^2}$
14	1	$\frac{3z^2-1}{z(z^2-1)}$
15	2	$\frac{z^2-3z+5}{(z+1)(z-2)^2}$
16	3	$\frac{1}{z^2-7z+12}$

Задача №5.

Найти все особые точки функции $f(z)$ и установить их тип.

№		№	
1	$f(z) = \frac{z^3}{1+z^4}$	2	$f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$
3	$f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$	4	$f(z) = z^2 \left(\frac{1}{z} - \sin \frac{1}{z} \right)$
5	$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3}$	6	$f(z) = \frac{1}{z+z^2}$
7	$f(z) = \frac{z+1}{z^4+16}$	8	$f(z) = \frac{1}{(1-z)^3(z+2)^2}$
9	$f(z) = \frac{1}{z+2} e^{\frac{1}{z+2}}$	10	$f(z) = \frac{e^z}{1+z^2}$
11	$f(z) = \frac{\sin z}{z(z^3+1)}$	12	$f(z) = \frac{1}{z^5-4z^3}$
13	$f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z-1)^3}$	14	$f(z) = \frac{e^z-1}{z^2(z+1)}$
15	$f(z) = \frac{\cos z}{(z^3+1)z^2}$	16	$f(z) = \frac{z^3+1}{(z+3)^2(z+1)}$

Задача №6.

Вычислить интеграл по замкнутому контуру $\int_L f(z) dz$ с помощью вычетов.

№	$f(z)$	L
1	$\frac{\cos \pi z}{(2z-1)^2}$	$ z =1$
2	$\frac{sh \pi z}{(z+4)(z^2+4)}$	$ z =5$
3	$\frac{1}{z^4+16}$	$ z-2 =2$
4	$\frac{z}{z^3+8}$	$ z-2 =2\sqrt{2}$
5	$\frac{e^z}{z(z^2+2z+5)}$	$ z+1-2i =1$
6	$\frac{\sin 2z}{z^2(z^2+4)}$	$ z =1$
7	$\frac{\sin z}{z^2(z-2)^2}$	$ z =1$
8	$\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$	$ z-2 =\frac{1}{2}$
9	$\frac{\cos z}{z^3-z^2-2z}$	$ z+1 =2$
10	$\frac{sh z}{z(z^2+2z+5)}$	$ z+1+2i =1$
11	$\frac{e^z}{z(z-1)^2(z-4)}$	$ z =2$
12	$\frac{\cos z}{z^2(z+1)}$	$ z =\frac{1}{2}$
13	$\frac{e^z}{z(z-\pi i)}$	$ z-3i =1$
14	$\frac{z+1}{z(z-1)^2(z-3)}$	$ z =2$
15	$\frac{e^z}{(z-1)^2 z}$	$ z-2 =\frac{3}{2}$
16	$\frac{1}{(z+2)^2(z-3)^2}$	$ z+2 =1$

Задача №7.

Вычислить несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ с помощью вычетов.

№	$f(x)$	(a, b)
1	$\frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$	$(0, +\infty)$
2	$\frac{(x^2 + 2)}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$	$(-\infty, +\infty)$
3	$\frac{x - 3}{x^4 + 5x^2 + 4}$	$(-\infty, +\infty)$
4	$\frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}$	$(-\infty, +\infty)$
5	$\frac{x^2}{(x^2 + 4)^2}$	$(-\infty, +\infty)$
6	$\frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$	$(0, +\infty)$
7	$\frac{1}{(x^2 + 9)(x^2 + 1)^2}$	$(-\infty, +\infty)$
8	$\frac{1}{(x^2 + 1)^3}$	$(0, +\infty)$
9	$\frac{(x^2 + 1)}{(x^2 + 9)(x^2 + 16)}$	$(-\infty, +\infty)$
10	$\frac{x^2}{(x^2 + 4)^3}$	$(0, +\infty)$
11	$\frac{x^2 + 5}{x^4 + 5x^2 + 6}$	$(-\infty, +\infty)$
12	$\frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12}$	$(-\infty, +\infty)$

13	$\frac{1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 16)}$	$(-\infty, +\infty)$
14	$\frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$	$(-\infty, +\infty)$
15	$\frac{2x^2 + 13x}{x^4 + 13x^2 + 36}$	$(-\infty, +\infty)$
16	$\frac{x^2 + 2}{x^4 + 7x^2 + 12}$	$(-\infty, +\infty)$

Замечание: по усмотрению преподавателя список типовых задач курса может быть расширен, в частности, путем введения задач, связанных с применением Гамма и Бета-функций.