3,7	3,5	4,0	3,7	4,3	3,7	3,9	3,8	4,0	3,9
3,6	4,0	3,5	4,2	4,0	4,0	3,8	4,0	3,7	3,8
3,9	3,6	4,0	3,9	3,6	3,9	4,3	3,9	4,4	4,2
3,9	4,0	3,6	4,0	4,I	3,8	3,9	3,7	4,2	3,9
3,8	3,7	4,0	3,9	3,7	4,0	4,4	4,4	3,9	4,2
3,8	3,8	3,7	4,I	3,8	3,9	3,7	4,2	4,0	3,9
4,1	3,9	3,8	3,8	4,3	4,I	4,0	3,9	4,0	4,0
4,0	4,0	3,9	4,I	3,9	4,I	4,0	4,4	4,0	4,0
4,0	4,I	3,9	4,2	4,2	4,3	4,1	4,2	4,2	4,0

Таблица П.7

40,I	40,5	40,3	40,7	40,6	40,2	40,6	40,4	40,8	40,7
40,3	40,I	40,7	40,3	40,6	40,5	40,8	40,6	40,6	40,4
40,5	40,6	40,I	40,6	40,2	40,5	40,3	40,5	40,4	40,6
40,5	40,3	40,7	40,5	40,9	40,8	40,5	40,6	40,7	40,6
40,6	40,2	40,6	40,6	40,5	40,3	40,8	40,4	40,5	40,4
40,4	40,7	40,6	40,2	40,6	40,9	40,3	40,7	40,6	40,6
40,7	40,6	40,5	40,8	40,5	40,6	40,8	4I,0	40,4	4I,0
40,6	40,4	40,8	40,2	40,9	40,4	40,5	40,3	40,5	40,7
40,7	40,5	40,5	40,8	40,3	40,9	40,6	4I,0	40,5	40,4
40,6	40,7	40,8	40,5	40,8	40,6	40,6	40,5	40,5	40,6

Таблица П.8

45	47	43	45	43	46	43	4I	46	44
45	42	46	48	45	44	45	48	49	46
48	45	44	45	45	48	45	44	46	50
4I	47	45	48	43	45	47	45	47	46
46	43	48	43	46	46	44	46	47	46
46	4I	44	45	46	47	45	46	46	50
43	45	47	45	42	45	43	46	49	49
47	43	46	43	48	45	46	48	46	49

44	43	43	46	42	44	48	48	44	46
44	48	45	46	44	48	45	50	50	44

Таблица П.9

29	27	25	30	32	34	28	34	3I	37
33	22	29	32	26	35	3I	26	3I	37
25	32	27	25	28	29	36	40	35	28
30	24	30	29	30	28	26	34	40	3I
24	33	29	27	30	28	3I	28	36	40
33	25	30	27	25	32	29	36	26	28
27	32	22	32	29	26	35	3I	39	3I
33	27	32	26	28	35	25	35	35	40
27	34	29	30	32	25	30	3I	39	26
33	29	27	32	34	30	36	3I	36	35

Таблица П.10

I,8	2,2	2,3	I,9	I,7	2,I	I,6	I,9	2,0	I,9
2,0	I,8	2,2	I,8	2,I	2,2	2,I	2,0	2,2	2,I
2,2	2,0	2,3	2,I	I,9	I,7	2,2	2,0	I,7	2,5
2,0	I,8	2,0	2,2	2,I	2,2	2,0	2,2	2,0	2,I
2,2	2,2	2,I	2,I	2,3	2,3	2,0	I,9	2,4	2,3
2,I	2,0	2,I	2,0	I,8	2,I	I,8	2,I	2,2	2,3
I,6	2,I	2,0	2,3	2,2	2,0	2,I	I,9	2,4	2,0
2,I	I,9	I,9	I,6	I,9	2,0	I,7	2,I	2,3	2,5
I,8	2,I	I,8	2,0	2,0	I,9	2,3	2,4	2,I	2,5
I,8	I,9	I,9	I,8	2,0	2,3	I,9	2,2	2,I	2,2

Таблица П.II

I5	I2	I6	I2	I3	I6	I0	I6	I4	I7
I3	I5	I3	I4	I3	I4	I5	I7	II	I5
I6	I5	I2	I3	II	I4	II	I5	I3	I2
9	I3	I3	I6	I4	II	I3	I4	I7	I5

Пример. При сверлении 80 отверстий одним и тем же сверлом и последующим измерением диаметров отверстий получены следующие данные (в мм):

40,26	40,35	40,44	40,35	40,39	40,40	40,42	40,32
40,37	40,35	40,44	40,35	40,30	40,34	40,31	40,32
40,33	40,41	40,35	40,30	40,33	40,38	40,33	40,33
40,28	40,30	40,40	40,36	40,32	40,32	40,42	40,35
40,29	40,33	40,31	40,33	40,36	40,34	40,30	40,30
40,41	40,40	40,33	40,37	40,34	40,30	40,43	40,34
40,35	40,34	40,34	40,31	40,43	40,36	40,34	40,34
40,28	40,44	40,32	40,34	40,31	40,31	40,36	40,34
40,29	40,39	40,39	40,37	40,37	40,38	40,36	40,41
40,27	40,38	40,37	40,37	40,36	40,35	40,32	40,36

Требуется: 1. Составить интервальные статистические ряды распределения частот и частостей наблюдаемых значений непрерывной СВ X — размера диаметров отверстий x_i.

2. Построить гистограмму и полигон частостей СВ X.

3. Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

4. Вычислить числовые характеристики выборки: среднее арифметическое, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса, выборочный коэффициент вариации.

5. По виду гистограммы и полигона частостей, а также по значениям выборочных коэффициентов асимметрии и эксцесса и исходя из механизма образования исследуемой СВ X сделать предварительный выбор вида закона распределения этой случайной величины.

6. Найти точечные оценки параметров нормального распределения (предполагается, что исследуемая случайная величина имеет нормальное распределение), записать плотность вероятности и функцию распределения СВ X.

7. Найти теоретические частоты нормального распределения, проверить согласие эмпирической функции распределения с модельной нормальной функцией распределения при помощи основных критериев согласия — критерия χ^2 и λ-критерия Колмогорова.

8. Найти интервальные оценки параметров нормального распределения (доверительную вероятность принять $(1-\alpha)=0{,}95$.

Решение. 1. Изучение непрерывных случайных величин начинается с группировки статистического материала, т. е. с разбиения интервала наблюдаемых значений СВ X на k частичных интервалов равной длины и подсчета частот попадания наблюдаемых значений СВ X в частичные интервалы. Количество интервалов выбирается произвольно. Обычно число интервалов бывает не менее 5 и не более 15 (в учебных целях рекомендуется выбирать число интервалов равным 5—6).

Разобьем весь диапазон наблюдаемых значений на 5 интервалов (разрядов). Длину частичного интервала определим по формуле

$$h=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{k}=\frac{40{,}44-40{,}26}{5}\approx 0{,}04.$$

За начало первого интервала принимаем величину, равную $a_0=40{,}26-0{,}02=40{,}24$, тогда первый интервал будет $[40{,}24\div 40{,}28[$, второй — $[40{,}28\div 40{,}32[$ и т. д. Шкала интервалов и группировка исходных статистических данных сведены в таблицу. В результате получили статистический ряд распределения частот $(n=\Sigma m_i=80)$:

Интервалы наблюдаемых значений СВ X, мм	[40,24; 40,28[	[40,28; 40,32[	[40,32;40,36[	[40,36;40,40[	[40,60;40,44]
Частота m_i	4	19	32	15	10

Для получения статистического ряда частостей разделим частоты m_i на объем выборки n. В результате получим интервальный статистический ряд распределений частостей $\left(\Sigma\dfrac{m_i}{n}=1\right)$:

Интервалы наблюдаемых значений СВ X, мм	[40,24; 40,28[	[40,28; 40,32[	[40,32;40,36[	[40,36;40,40[	[40,40;40,44]
Частости $\dfrac{m_i}{n}$	0,05	0,24	0,40	0,19	0,12
$F^*(x)$ (накопленные частости)	0,05	0,29	0,69	0,88	1,00

2. Для построения гистограммы частостей на оси Ox откладываются частичные интервалы, на каждом из них строится прямоугольник, площадь которого равна частости данного частичного интервала. Если частости отнести к серединам частичных интервалов, то полученная замкнутая линия образует полигон частостей. На рис. 9.1 изображены гистограмма и полигон частостей.

3. Значения эмпирической функции распределения выписаны в последней строке статистического ряда распределения частостей. Запишем значения эмпирической функции распределения в аналитическом виде:

$$F^*(x)=\begin{cases}0\ , \text{ если } & x\leqslant 40{,}24;\\ 0{,}05, \text{ если } & 40{,}24<x\leqslant 40{,}28;\\ 0{,}29, \text{ если } & 40{,}28<x\leqslant 40{,}32;\\ 0{,}69, \text{ если } & 40{,}32<x\leqslant 40{,}36;\\ 0{,}88, \text{ если } & 40{,}36<x\leqslant 40{,}40;\\ 1\ , \text{ если } & 40{,}40<x\leqslant 40{,}44;\\ 1\ , \text{ если } & x>40{,}44.\end{cases}$$

График эмпирической функции изображен на рис. 9.2.

4. В тех случаях, когда наблюдаемые значения случайной величины задаются многозначными числами и объем выборки достаточно велик $(n>25)$, вначале

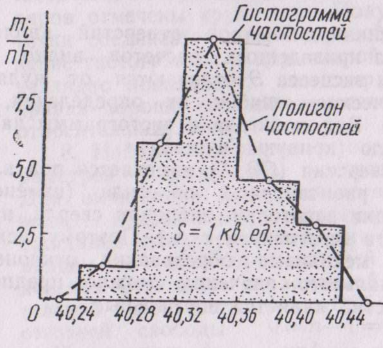


Рис. 9.1

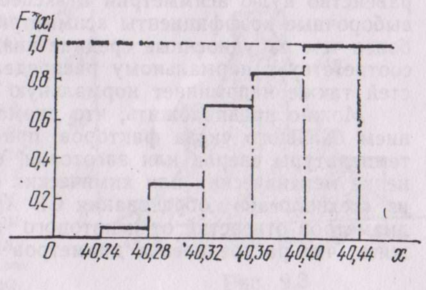


Рис. 9.2

целесообразно найти среднюю арифметическую по формуле $\bar{x}=(1/n)\Sigma x_i m_i$, а затем перейти к вычислению центральных моментов порядка $k(k=2, 3, 4)$:

Интервалы наблюдаемых значений СВ X, мм	Середины интервалов x_i	Частоты m_i	$(x_i-\bar{x})m_i$	$(x_i-\bar{x})^2m_i$	$(x_i-\bar{x})^3m_i$	$(x_i-\bar{x})^4m_i$
[40,24; 40,28[	40,26	4	−0,336	0,028	−0,002	0,0002
[40,28; 40,32[	40,30	19	−0,836	0,037	−0,002	0,0001
[40,32; 40,36[	40,34	32	−0,128	0,001	0,000	0,0000
[40,36; 40,40[	40,38	15	+0,540	0,019	+0,001	0,0000
[40,40; 40,44]	40,42	10	+0,760	0,058	+0,004	0,0003
		80	0	0,143	+0,001	0,0006

Следовательно,

$$\bar{x}=\frac{\Sigma m_i x_i}{n}=\frac{40,26\cdot 4+40,30\cdot 19+40,34\cdot 32+40,38\cdot 15+40,42\cdot 10}{80}=40,344;$$

$$\hat{D}(x)=s_x^2=\frac{\Sigma (x_i-\bar{x})^2 m_i}{n}=\frac{0,143}{80}=0,0018;$$

$$s_x=\sqrt{0,0018}=0,042;$$

$$\hat{A}=\frac{\Sigma (x_i-\bar{x})^3 m_i}{ns_x^3}=\frac{0,001}{80(0,042)^3}=0,17;$$

$$\hat{Э}=\frac{\Sigma (x_i-\bar{x})^4 m_i}{ns_x^4}-3=\frac{0,0006}{80(0,042)^4}-3=-0,68;$$

$$\hat{V}=\frac{s_x}{\bar{x}}100(\%)=\frac{0,042}{40,344}\cdot 100=0,104\ \%.$$

5. Для предварительного выбора закона распределения вычислим вначале средние квадратические ошибки определения асимметрии

$$s_A=\sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}=\sqrt{\frac{6\cdot 79}{81\cdot 83}}=0,266$$

и эксцесса

$$s_Э=\sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}=\sqrt{\frac{24\cdot 80\cdot 78\cdot 77}{79^2\cdot 83\cdot 85}}=0,512.$$

Критерием «нормальности» распределения диаметров отверстий является равенство нулю асимметрии и эксцесса. Из приведенных расчетов видно, что выборочные коэффициенты асимметрии $\hat{A}$ и эксцесса $Э$ отличаются от нуля не более чем на удвоенные средние квадратические ошибки их определения, что соответствует нормальному распределению. Вид полигона и гистограммы частостей также напоминает нормальную кривую (кривую Гаусса).

Можно предположить, что диаметр отверстия (СВ X) изменяется под влиянием большого числа факторов, примерно равнозначных по силе (изменение температуры сверла или заготовки, вибрации заготовки, вибрации сверла, изменение механических или химических свойств заготовки и т. д.). Поэтому, исходя из «технологии» образования СВ X, т. е. механизма образования отклонений диаметров отверстий от некоторого номинального значения, можно предположить, что распределение диаметров отверстий является нормальным.

6. Плотность вероятности нормального распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Найдем точечные оценки параметров a и σ нормального распределения методом моментов:

$$\hat{a}=\bar{x}=\frac{\Sigma x_i m_i}{n}=40,344 \text{ мм};$$

$$\hat{\sigma}=s=\sqrt{\frac{\Sigma (x_i-\bar{x})^2 m_i}{n}}=0,042 \text{ мм}.$$

Следовательно, плотность вероятности предполагаемого нормального распределения имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{0,042\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-40,344)^2}{0,0036}\right).$$

Функция распределения предполагаемого нормального распределения

$$F(x)=\frac{1}{0,042\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{(x-40,344)^2}{0,0036}\right)dx.$$

Используя нормированную функцию Лапласа $\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, функцию нормального распределения можно записать в виде

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x-40,344}{0,042}\right).$$

7. Проведем проверку гипотезы о нормальном распределении СВ X (диаметра отверстий) с помощью критерия согласия χ^2. Для этого интервалы наблюдаемых значений нормируют, т. е. выражают их в единицах среднего квадратического отклонения $s: u_i=(x_i-\bar{x})/s$, причем наименьшее значение u_i полагают равным $-\infty$, наибольшее $-+\infty$. Далее вычисляют вероятности попадания СВ X, имеющей нормальное распределение, с параметрами $a=40,344$, $\sigma=0,042$ в частичные интервалы $]x_{i-1};\ x_i[$ по формуле

$$p_i=P(x_{i-1}<X<x_i)=\frac{1}{2}(\Phi(u_i)-\Phi(u_{i-1})),$$

где

$$\Phi(u_i)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{u_i}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Например, вероятность того, что СВ X (диаметр отверстий) попадает в первый частичный интервал $]-\infty;\ 40,28[$, равна

$$p_1=P(-\infty<X<4028)=\frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{40,28-40,344}{0,042}\right)-\Phi\left(\frac{-\infty-40,344}{0,042}\right)\right)=\frac{1}{2}(\Phi(-1,52)-\Phi(-\infty))=$$

$$=\frac{1}{2}(\Phi(\infty)-\Phi(1,52))=\frac{1}{2}(1-0,8714)=0,064.$$

Аналогично

$$p_2 = P(40{,}28 \leqslant X < 40{,}32) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{40{,}32-40{,}344}{0{,}042}\right) - \Phi\left(\frac{40{,}28-40{,}344}{0{,}042}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(-0{,}57) - \Phi(-1{,}52)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(-0{,}4314 + 0{,}7914) = 0{,}220$$

и т. д. После этого вычисляют теоретические (модельные) частоты нормального распределения $n_{теор} = np_i$ и наблюдаемое значение критерия χ^2

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Затем по таблицам квантилей распределения χ^2 (прил. 4) по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1$ (k — число интервалов; r — число параметров предполагаемого распределения СВ X) находят критическое значение $\chi^2_{0,05;\nu}$.

Если $\chi^2_{набл} \leqslant \chi^2_{0,05;\nu}$, то считают, что нет оснований для отклонения гипотезы о нормальном распределении диаметров отверстий.

В противном случае, т. е. если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{0,05;\nu}$, считается, что гипотеза нормального распределения диаметров отверстий не согласуется с экспериментальными данными.

Вычисления, необходимые для определения наблюдаемого значения выборочной статистики χ^2, приведем в таблице:

Интервалы наблюдаемых значений СВ X, мм	Частоты m_i	Нормированные интервалы $[u_i,\ u_{i+1}[$	p_i	np_i	$(m_i - np_i)^2$	$\frac{(m_i-np_i)^2}{np_i}$
[40,24; 40,28[	4	$]-\infty;\ -1{,}52[$	0,064	5,1	1,21	0,24
[40,28; 40,32[	19	$[-1{,}52;\ -0{,}57[$	0,220	17,6	1,96	0,11
[40,32; 40,36[	32	$[-0{,}57;\ 0{,}38[$	0,364	29,1	8,41	0,29
[40,36; 40,40[	15	$[0{,}38;\ 1{,}33[$	0,260	20,8	17,64	0,85
[40,40; 40,44]	10	$[1{,}33;\ \infty[$	0,092	7,4	6,76	0,91
Σ	80		1,000	80,0		$\chi^2_{набл} = 2{,}40$

Замечание. Наименьшее значение стандартизованной переменной $\frac{40{,}24-40{,}344}{0{,}042} = -2{,}48$ заменено $-\infty$, наибольшее значение $\frac{40{,}44-40{,}344}{0{,}042} = +2{,}28$ заменено $+\infty$. Эта замена произведена для того, чтобы сумма теоретических (модельных) частот np_i была равна объему выборки.

В результате вычислений получили $\chi^2_{набл} = 2{,}40$. Найдем по таблице квантилей χ^2 распределения по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1 = 5 - 2 - 1 = 2$ критическое значение $\chi^2_{0,05;2} = 5{,}99$ (прил. 4). Так как $\chi^2_{набл} = 2{,}40 < 5{,}99$, то нет оснований для отклонения гипотезы о нормальном распределении диаметров отверстий.

Проверим гипотезу нормального распределения диаметров отверстий с помощью λ-критерия Колмогорова. С этой целью для каждого значения x_i находим модуль разности между эмпирической и модельной функциями распределения $|F^*(x) - F(x)|$ и вычисляем наблюдаемое значение выборочной статистики λ Колмогорова:

$$\lambda_{набл} = D\sqrt{n} = \max_x |F^*(x) - F(x)|\sqrt{n}.$$

Наблюдаемое значение статистики λ Колмогорова сравнивается с критическим значением, определяемым по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ (прил. 8). Если $\lambda_{набл} \leqslant \lambda_{0,05} = 1{,}36$, то считается, что гипотеза нормального распределения исследуемой случайной величины согласуется с экспериментальными данными, если $\lambda_{набл} > \lambda_{0,05}$ — не согласуется.

Пользуясь критерием согласия λ Колмогорова, проверим гипотезу нормального распределения диаметров отверстий. Все вспомогательные расчеты, необходимые для вычисления выборочной статистики $\lambda = D\sqrt{n}$, сведем в таблицу:

Интервалы наблюдаемых значений СВ X, мм	m_i	$m_{н.э.ч}$	p_i	$F^*(x) = \frac{m_{н.э.ч}}{n}$	$F(x) = p_{н.в}$	$\lvert F^*(x) - F(x)\rvert$
1	2	3	4	5	6	7
[40,24; 40,28[	4	4	0,064	0,050	0,064	0,014
[40,28; 40,32[	19	23	0,220	0,288	0,284	0,004
[40,32; 40,36[	32	55	0,364	0,688	0,648	0,040
[40,36; 40,40[	15	70	0,260	0,875	0,908	0,033
[40,40; 40,44]	10	80	0,092	1,000	1,000	0,000
Σ	80		1			

Здесь $m_{н.э.ч.}$ — накопленные эмпирические частоты; $p_{н.в}$ — накопленные вероятности.

Просматривая последний столбец таблицы, замечаем, что наибольший модуль разности между эмпирической и модельной (нормальной) функциями распределения $D = \max_x |F^*(x) - F(x)| = 0{,}04$.

Вычислим наблюдаемое значение выборочной статистики λ Колмогорова: $\lambda_{набл} = D\sqrt{n} = 0{,}04\sqrt{80} = 0{,}36$. Примем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

По таблицам квантилей распределения Колмогорова (прил. 8) по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ находим критическое значение $\lambda_{0,05} = 1{,}358$. Так как $\lambda_{набл} = 0{,}36 < 1{,}358$, то нет основания для отклонения гипотезы о нормальном распределении диаметров отверстий.

Построим нормальную кривую. Для этого из середин частичных интервалов восставим перпендикуляры высотой p_i/h (p_i — вероятность попадания СВ X в частичный интервал; h — длина интервала). На рис. 9.3 концы этих перпендикуляров отмечены кружками. Полученные точки соединены плавной кривой. Сравнение гистограммы и нормальной кривой наглядно показывает, что нормальная кривая хорошо сглаживает гистограмму относительных частот.

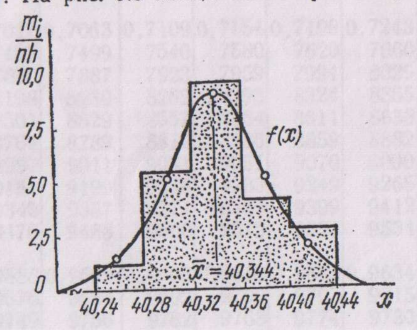


Рис. 9.3

8. Найдем интервальные оценки параметров нормального распределения. Для вычисления доверительного интервала, накрывающего математическое ожидание диаметров отверстия (СВ X), найдем по таблицам квантилей распределения Стьюдента по заданной доверительной вероятности $1 - \alpha = 0{,}95$ и числу степеней свободы $\nu = n - 1 = 80 - 1 = 79$ квантиль $t_{\alpha/2;\,\nu} = t_{0,025;\,79} = 1{,}99$.

Вычислим предельную погрешность интервального оценивания

$$\varepsilon = t_{\alpha/2;\,\nu}\frac{s}{\sqrt{n-1}} = 1{,}99\cdot\frac{0{,}042}{\sqrt{79}} = 0{,}009.$$

Искомый доверительный интервал для математического ожидания

$$\bar{x} - \varepsilon < a < \bar{x} + \varepsilon;$$

$$40{,}344 - 0{,}009 < a < 40{,}344 + 0{,}009;$$

$$40{,}335 < a < 40{,}453.$$

Смысл полученного результата: если будет произведено достаточно большое число выборок по 80 сверлений отверстий, то в 95% из них доверительный интервал накроет математическое ожидание диаметра отверстия и только в 5% случаев математическое ожидание может выйти за границы доверительного интервала.

Для нахождения доверительного интервала, накрывающего неизвестное среднее квадратическое отклонение σ с заданной вероятностью $P=1-\alpha=0{,}95$, найдем (прил. 6) по доверительной вероятности $P=1-\alpha=0{,}95$ и числу степеней свободы $\nu=n-1=80-1=79$ два числа; $\gamma_1=0{,}87$ и $\gamma_2=1{,}18$. Искомый доверительный интервал

$$\gamma_1 s < \sigma < \gamma_2 s;$$

$$0{,}87\cdot 0{,}042 < \sigma < 1{,}18\cdot 0{,}042;$$

$$0{,}037 < \sigma < 0{,}049.$$

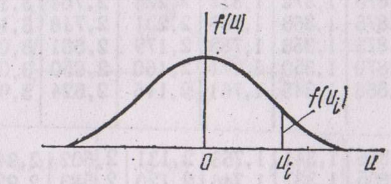
Полученный результат означает, что если будет произведено достаточно большое число выборок по 80 сверлений отверстий, то в 95% из них доверительный интервал накроет среднее квадратическое отклонение σ и только в 5% среднее квадратическое отклонение σ может выйти за границы доверительного интервала.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Нормальное распределение

Плотность вероятностей нормированного нормального распределения:

$$u \to N(0,1) \quad f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

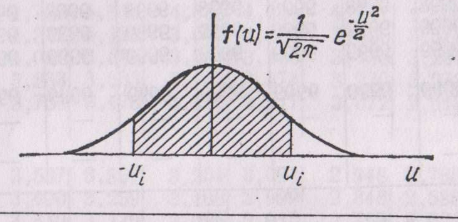


u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2. Нормальное распределение

Значение функции: $\Phi(u_i) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{u_i} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = P(|u| < u_i)$.



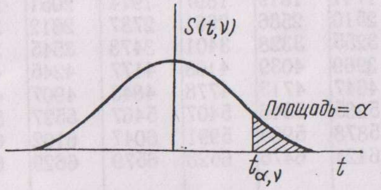
Целые и десятые доли u_i	Сотые доли u_i: 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0080	0,0160	0,0239	0,0319	0,3999	0,0478	0,0558	0,0638	0,0717
0,1	0797	0876	0955	1034	1113	1192	1271	1350	1428	1507
0,2	1585	1663	1741	1819	1897	1974	2051	2128	2205	2282
0,3	2358	2434	2510	2586	2661	2737	2812	2886	2960	3035
0,4	3108	3182	3255	3328	3401	3473	3545	3616	3688	3759
0,5	3829	3899	3969	4039	4108	4177	4245	4313	4381	4448
0,6	4515	4581	4647	4713	4778	4843	4907	4971	5035	5098
0,7	5161	5223	5285	5346	5407	5467	5527	5587	5646	5705
0,8	5763	5821	5878	5935	5991	6047	6102	6157	6211	6265
0,9	6319	6372	6424	6476	6528	6579	6629	6679	6729	6778
1,0	0,6827	0,6875	0,6923	0,6970	0,7017	0,7063	0,7109	0,7154	0,7199	0,7243
1,1	7287	7330	7373	7415	7457	7499	7540	7580	7620	7660
1,2	7699	7737	7775	7813	7850	7887	7923	7959	7994	8029
1,3	8064	8098	8132	8165	8198	8230	8262	8293	8324	8355
1,4	8385	8415	8444	8473	8501	8529	8557	8584	8611	8638
1,5	8664	8690	8715	8740	8764	8789	8812	8836	8859	8882
1,6	8904	8926	8948	8969	8990	9011	9031	9051	9070	9090
1,7	9109	9127	9146	9164	9181	9199	9216	9233	9249	9265
1,8	9281	9297	9312	9327	9342	9357	9371	9385	9399	9412
1,9	9426	9439	9451	9464	9476	9488	9500	9512	9523	9534
2,0	0,9545	0,9556	0,9566	0,9576	0,9586	0,9596	0,9606	0,9616	0,9625	0,9634
2,1	9643	9651	9660	9668	9676	9684	9692	9700	9707	9715
2,2	9722	9729	9736	9743	9749	9756	9762	9768	9774	9780

Целые и десятые доли u_i	Сотые доли u_i									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,3	9786	9791	9797	9802	9807	9812	9817	9822	9827	9832
2,4	9836	9841	9845	9849	9853	9857	9861	9865	9869	9872
2,5	9876	9879	9883	9886	9889	9892	9895	9898	9901	9904
2,6	9907	9910	9912	9915	9917	9920	9922	9924	9926	9928
2,7	9931	9933	9935	9937	9939	9940	9942	9944	9946	9947
2,8	9949	9951	9952	9953	9955	9956	9958	9959	9960	9961
2,9	9963	9964	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972
3,0	0,9973	0,9974	0,9975	0,9976	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980
3,1	9981	9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986
3,2	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,3	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,4	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995	9995
3,5	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997	9997
3,6	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998	9998	9998
3,7	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,9	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
4,0	0,999936	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
4,5	0,999994	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5,0	0,99999994	—	—	—	—	—	—	—	—	—

3. Распределение Стьюдента

Значения $t_{\alpha,\nu}$ удовлетворяют условию $P(t \geqslant t_{\alpha,\nu}) = \int\limits_{t_{\alpha,\nu}}^{\infty} S(t,\ \nu)\, dt = \alpha$.

В таблице приведены значения квантилей $t_{\alpha,\nu}$ в зависимости от числа степеней свободы ν и вероятности α.

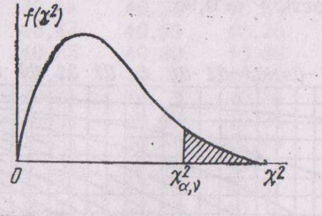


Число степеней свободы (ν) \ α	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959

Число степеней свободы (ν) \ α	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	3,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

4. χ^2-распределение

В таблице приведены значения квантилей $\chi^2_{\alpha,\nu}$ в зависимости от числа степеней свободы ν и вероятности α.



ν \ α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

5. Распределение Фишера

В таблице приведены критические значения (квантили) F_{α,ν_1,ν_2} в зависимости от числа степеней свободы ν_1 и ν_2 для $\alpha = 0{,}05$:

$$P(F \geqslant F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}) = 0{,}05.$$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,512	18,999	19,163	19,248	19,298	19,329	19,371	19,414	19,453	19,496
3	10,129	9,552	9,276	9,118	9,014	8,941	8,844	8,744	8,638	8,527
4	7,710	6,945	6,591	6,388	6,257	6,164	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,607	5,786	5,410	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,987	5,143	4,756	4,534	4,388	4,284	4,147	4,000	3,841	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,121	3,972	3,866	3,725	3,574	3,410	3,230
8	5,317	4,459	4,067	3,838	3,688	3,580	3,438	3,284	3,116	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,094	2,948	2,788	2,609	2,405
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,999	2,848	2,686	2,505	2,296
13	4,667	3,805	3,410	3,179	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,207
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,683	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,853	2,741	2,591	2,424	2,235	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,961
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,150	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,629	2,477	2,308	2,114	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,083	1,843
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,421	2,250	2,054	1,812
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,028	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,795	2,640	2,528	2,375	2,203	2,005	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,777	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	1,965	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,148	1,947	1,691
27	4,210	3,354	2,961	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	1,930	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,292	2,118	1,915	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,702	2,545	2,432	2,278	2,104	1,901	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,887	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,180	2,004	1,793	1,509
60	4,001	3,151	2,758	2,525	2,368	2,254	2,097	1,918	1,700	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,106	1,834	1,608	1,254
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,098	1,938	1,752	1,517	1,000

6. Доверительные интервалы для σ

Нижние γ_1 и верхние γ_2 границы доверительного интервала

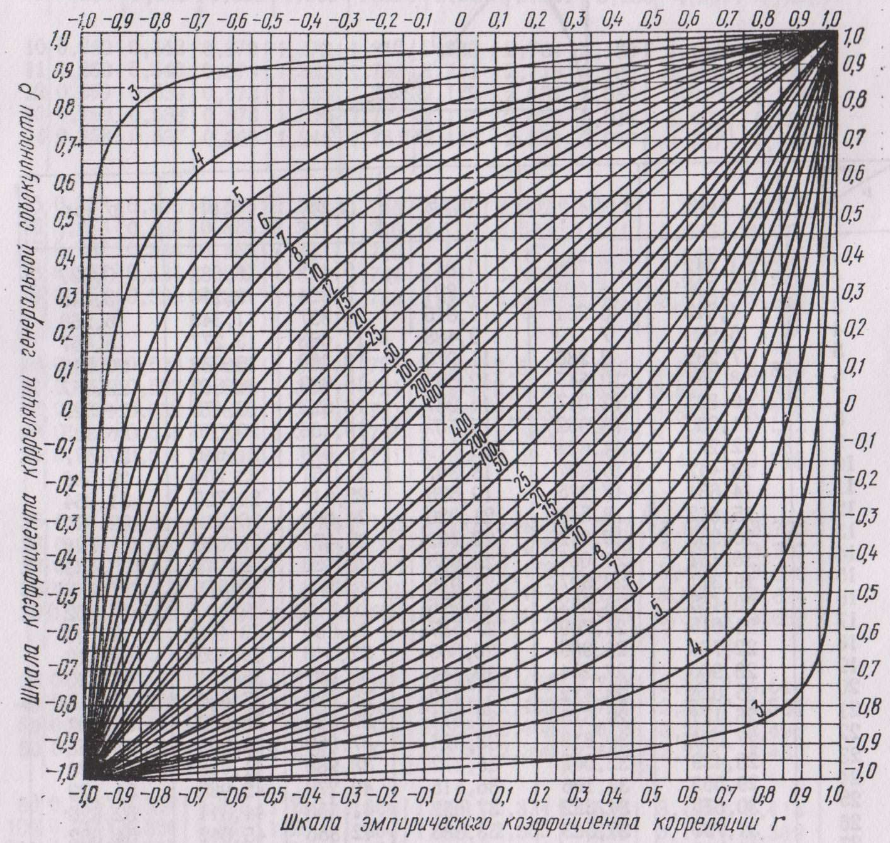
$$\gamma_1 s < \sigma < \gamma_2 s \left(s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \right).$$

$\nu = n-1$ \ p	0,99 γ_1	0,99 γ_2	0,98 γ_1	0,98 γ_2	0,95 γ_1	0,95 γ_2	0,90 γ_1	0,90 γ_2
1	0,356	159	0,388	79,8	0,446	31,9	0,510	15,9
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,92
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,090
6	0,569	2,98	0,597	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,440	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,677	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,666	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,444	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
22	0,717	1,595	0,739	1,519	0,773	1,416	0,805	1,335
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
28	0,741	1,499	0,762	1,436	0,794	1,352	0,823	1,286
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,887	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

7. Доверительные интервалы для ρ

Доверительные интервалы для коэффициента ρ в генеральной совокупности.

Доверительная вероятность $P = 0{,}95$.



8. Критерий Колмогорова

Критические значения λ_α распределения Колмогорова:

$$P(\lambda > \lambda_\alpha) = \alpha.$$

Уровень значимости α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
λ_α	1,073	1,224	1,358	1,520	1,627	1,950