Учебное издание

Дудникова Татьяна Владимировна
Караваева Нина Николаевна

Теория вероятностей
Часть 1

Учебно-методическое пособие

Редактор *Атмашкина Г.В.*
Компьютерная верстка *Караваева Н.Н.*

Подписано в печать 11.05.12	Бумага офсетная	
Формат 60 x 90 $^{1}/_{16}$	Печать офсетная	Уч.-изд. 3,7 л.
Рег. № 222	Тираж 100 экз.	Заказ

Электростальский политехнический институт филиал
Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
144000, Московская обл., г. Электросталь,
ул. Первомайская, д.7.
Тел. (496) 57-4-30-24

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ЭЛЕКТРОСТАЛЬСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(филиал)
Федерального государственного автономного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

Кафедра высшей математики

Дудникова Т.В., Караваева Н.Н.

Теория вероятностей

Часть 1

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано
методическим советом института

ЭЛЕКТРОСТАЛЬ 2012

УДК 519.2
Д81

Р е ц е н з е н т
доктор физ.-мат. наук *Е.А. Лесюк*

Дудникова Т.В., Караваева Н.Н.
Д81 Теория вероятностей. Ч.1. Учебно-методическое пособие. – Электросталь: ЭПИ НИТУ МИСиС, 2012. – 60 с.

Целью изучения курса «Теории вероятностей» является усвоение основных методов описания и анализа случайных явлений, обработки и анализа результатов физических и численных экспериментов. Для изучения данной дисциплины студенту необходимы знания, полученные при изучении разделов «Дифференциальное и интегральное исчисления» и «Ряды» курса высшей математики.

В данном пособии рассмотрены наиболее важные и трудные для изучения положения курса «Теории вероятностей». Даны рекомендации по усвоению теоретических основ курса и практическому использованию учебного материала. Приведены подробные решения типовых задач и варианты контрольных работ.

УДК 519.2

Таблица 2. Значения функции $\Phi\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}\,dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.00000	0.85	0.30234	1.70	0.45543	2.55	0.49461
0.05	0.01994	0.90	0.31594	1.75	0.45994	2.60	0.49534
0.10	0.03983	0.95	0.32894	1.80	0.46407	2.65	0.49598
0.15	0.05962	1.00	0.34134	1.85	0.46784	2.70	0.49653
0.20	0.07926	1.05	0.35314	1.90	0.47128	2.75	0.49702
0.25	0.09871	1.10	0.36433	1.95	0.47441	2.80	0.49744
0.30	0.11791	1.15	0.37493	2.00	0.47725	2.85	0.49781
0.35	0.13683	1.20	0.38493	2.05	0.47982	2.90	0.49813
0.40	0.15542	1.25	0.39435	2.10	0.48214	2.95	0.49841
0.45	0.17364	1.30	0.40320	2.15	0.48422	3.00	0.49865
0.50	0.19146	1.35	0.41149	2.20	0.48610	3.20	0.49931
0.55	0.20884	1.40	0.41924	2.25	0.48778	3.40	0.49966
0.60	0.22575	1.45	0.42647	2.30	0.48928	3.60	0.499841
0.65	0.24215	1.50	0.43319	2.35	0.49061	3.80	0.499928
0.70	0.25804	1.55	0.43943	2.40	0.49180	4.00	0.499968
0.75	0.27337	1.60	0.44520	2.45	0.49286	4.50	0.499997
0.80	0.28814	1.65	0.45053	2.50	0.49379	5.00	0.5

Приложения

Таблица 1. Значения функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0.00	0.3989	1.00	0.2420	2.00	0.0540	3.00	0.0044
0.05	0.3984	1.05	0.2299	2.05	0.0488	3.05	0.0038
0.10	0.3970	1.10	0.2179	2.10	0.0440	3.10	0.0033
0.15	0.3945	1.15	0.2059	2.15	0.0396	3.15	0.0028
0.20	0.3910	1.20	0.1942	2.20	0.0355	3.20	0.0024
0.25	0.3867	1.25	0.1826	2.25	0.0317	3.25	0.0020
0.30	0.3814	1.30	0.1714	2.30	0.0283	3.30	0.0017
0.35	0.3752	1.35	0.1604	2.35	0.0252	3.35	0.0015
0.40	0.3683	1.40	0.1497	2.40	0.0224	3.40	0.0012
0.45	0.3605	1.45	0.1394	2.45	0.0198	3.45	0.0010
0.50	0.3521	1.50	0.1295	1.50	0.0175	1.50	0.0009
0.55	0.3429	1.55	0.1200	2.55	0.0154	3.55	0.0007
0.60	0.3332	1.60	0.1109	2.60	0.0136	3.60	0.0006
0.65	0.3230	1.65	0.1023	2.65	0.0119	3.65	0.0005
0.70	0.3123	1.70	0.0940	2.70	0.0104	3.70	0.0004
0.75	0.3011	1.75	0.0863	2.75	0.0091	3.75	0.0003
0.80	0.2897	1.80	0.0790	2.80	0.0079	3.80	0.0002
0.85	0.2780	1.85	0.0721	2.85	0.0069	3.85	0.0002
0.90	0.2661	1.90	0.0656	2.90	0.0060	3.90	0.0002
0.95	0.2541	1.95	0.0596	2.95	0.0051	3.95	0.0002
						4.00	0.0001

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – раздел высшей математики, изучающий закономерности массовых однородных случайных явлений.

Совершенно очевидно, что в природе нет ни одного физического явления, в котором не присутствовали бы в той или иной мере элементы случайности. Как бы точно мы ни фиксировали условия опыта, невозможно достигнуть того, чтобы при повторении опыта результаты в точности совпадали. Например, выпадение герба при бросании монеты – случайное событие и зависит от многих случайных причин (например, вес монеты, скорость и сила, с которой она брошена, и т.п.), которых невозможно учесть. Но если много раз подряд бросать монету, частота появления герба (отношение числа появившихся гербов к общему числу бросаний) постепенно стабилизируется и приближается к 1/2. Такое же свойство «устойчивости частот» обнаруживается и при многократном повторении любого другого опыта, исход которого представляется заранее не определенным, случайным. На практике, наблюдая однородные случайные явления, т.е. события, которые могут многократно наблюдаться при одних и тех же условиях, мы обычно обнаруживаем в них вполне определенные закономерности, свойственные именно массовым случайным явлениям. Такие закономерности и изучаются в теории вероятностей. Изучение этих законов позволяет не только осуществлять прогноз в области случайных явлений, но и контролировать ход этих явлений, ограничивать влияние случайности на практику.

Знакомство с методами теории вероятностей необходимо сегодня каждому грамотному инженеру. В настоящее время нет практически ни одной области науки, в которой не применялись бы вероятностные методы. Методы теории вероятностей широко применяются в современной электронике, радиотехнике, общей теории связи, в теории надежности, теории массового обслуживания, теории автоматического управления, геодезии, теории стрельбы и во многих других теоретических и прикладных науках. Биология, медицина и социология все шире использует вероятностные и статистические методы. Теория вероятностей используется при анализе технологических процессов, планировании и организации производства, контроле качества продукции и для многих других практических целей.

Предлагаемое учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех специальностей очной и очно-заочной формы обучения Электростальского политехнического института, изучающих курс теории вероятностей. В пособии представлены необходимые теоретиче-

ЛИТЕРАТУРА

Основная:

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для втузов. – М.: Феникс, 2010. – 480 с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 2004. – 404 с.
3. Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учебник для втузов. В 2-х томах. Т.2. – М.: Интеграл-Пресс, 2010. – 416 с.

Дополнительная:

4. Лунгу К.Н., Макаров Е.В. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч.2. – М.: Физматлит, 2007. – 384 с.
5. Рябушко А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика.: Учеб. пособие. – Мн.: Высшая школа, 2006. – 336 с.
6. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256 с.
7. Колемаев В.А., Калинина В.Н., Соловьев В.И., Малыхин В.И., Курочкин А.П. Теория вероятностей в примерах и задачах: Учебное пособие: ГУУ. – М., 2001.– 87 с.
8. Волковец А.И., Гуринович А.Б. Теория вероятностей и математическая статистика: Конспект лекций.- Мн.: БГУИР, 2003. – 84 с.

3. По статистическим данным ремонтной мастерской в среднем на 20 остановок токарного станка приходится: 10 – для смены резца; 3 – из-за неисправности привода; 2 – из-за несвоевременной подачи заголовок. Остальные остановки происходят по другим причинам. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

4. Три исследователя независимо один от другого производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

5. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения первым стрелком равна 0,7; вторым – 0,8 и третьим – 0,9. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков поразит цель; б) все три стрелка поразят цель; в) по крайней мере, два стрелка поразят цель.

6. В каждой из двух урн содержится 2 черных и 8 белых шаров. Из первой урны наудачу извлечен шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из второй урны, окажется белым.

7. Изделие проверяется на стандартность одним из товароведов. Вероятность того, что изделие попадет к первому товароведу, равна 0,55; второму – 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,9; вторым – 0,98. Стандартное изделие при проверке было признано стандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверил второй товаровед.

8. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,1. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из шести телевизоров не менее двух потребуют ремонта.

9. Если в среднем левши составляют 1%, то какова вероятность того, что среди 200 человек: а) окажется ровно двое левшей; б) найдутся хотя бы двое левшей?

10. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,64. Произведено 144 испытания. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от вероятности 0,64 не более, чем на 0,04.

ские сведения, типовые задачи с решениями, которые служат для усвоения основных разделов теории вероятностей, а также задачи для самостоятельной работы. При подготовке пособия авторами был учтен опыт всех известных им задачников по теории вероятностей. Ряд задач заимствован из работ [1]–[8]. Большинство задач являются оригинальными и подготовлены авторами специально для данного пособия. Работа авторов над пособием распределилась следующим образом: часть 1, глава 1 написана канд. пед. наук Н.Н. Караваевой, часть II, глава 2 – д-ром физ.-мат. наук Т.В. Дудниковой.

ГЛАВА 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1.1. Случайные события. Классификация случайных событий

Математическая наука, изучающая общие закономерности случайных явлений, независимо от их конкретной природы, и дающая методы количественной оценки влияния случайных факторов на различные события, называется ***теорией вероятностей***.

Одним из основных понятий теории вероятностей является ***понятие события***.

Определение 1.1. ***Событием*** в теории вероятностей называется всякий факт, который может произойти в результате некоторого опыта (или испытания) или не произойти.

Пример 1.1. Попадание в цель при выстреле из орудия. Здесь опыт – выстрел из орудия, событие – попадание в цель.

События будем обозначать латинскими заглавными буквами: A, B, C…

События различаются между собой по степени возможности их появления и по характеру взаимосвязи.

Определение 1.2. Событие называется ***невозможным***, если в результате данного опыта оно никогда не произойдет.

Пример 1.2. Если в цепи нет тока, то «загорание лампочки» является невозможным событием.

Определение 1.3. Событие называется ***достоверным***, если оно наступает при всех исходах.

Пример 1.3. При взрыве осколочного снаряда «разрыв оболочки» является достоверным событием.

Определение 1.4. ***Возможным или случайным*** называют событие, которое в результате данного опыта (или испытания) может произойти, а может и не произойти.

Определение 1.5. Случайные события называются ***равновозможными***, если нет основания утверждать, что какое-либо из них имеет больше шансов произойти, чем другое.

Пример 1.4. Подбрасывается игральная кость. Выпадение любого числа очков от 1 до 6 есть равновозможные события.

Определение 1.6. Два события A и B называются ***совместными***, если появление одного из них не исключает появление другого.

Пример 1.5. Подбрасываются две игральные кости. Пусть событие A – появление трех очков на первой игральной кости, а событие B – появление трех очков на второй игральной кости. Тогда события A и B являются совместными.

ВАРИАНТ 24

1. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вытянули 2 шара наугад. Какова вероятность того, что оба шара белые?

2. Буквы А, А, А, Н, Н, С написаны по одной на шести кубиках и уложены в урну. Затем кубики последовательно вынимают наугад и укладывают друг за другом. Найти вероятность того, что при этом получится слово "АНАНАС".

3. У сборщика имеется 16 деталей, изготовленных заводом № 1, и 4 детали завода №2. Наудачу взяты две детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из них окажется изготовленной заводом № 1.

4. Для некоторой местности среднее число пасмурных дней в июле равно шести. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

5. Вероятность попадания в мишень каждым из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый должен сделать по два выстрела. Попавший в мишень получает приз. Найти вероятность того, что получит приз стрелок, начавший стрелять а) первым; б) вторым.

6. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятность попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны $p_1 = 0{,}6$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}4$.

7. Наборщик пользуется двумя кассами. В первой кассе 90%, а во второй – 80% отличного шрифта. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная литера из наудачу взятой кассы будет отличного качества.

8. Найти вероятность того, что в семье, имеющей 6 детей, не менее двух девочек. Предполагается, что вероятности рождения мальчиков и девочек одинаковые.

9. Вероятность того, что покупателю необходим костюм 48-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 150 покупателей 120 потребуют костюмы этого размера.

10. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из 800 посеянных семян взойдут не менее 700.

ВАРИАНТ 25

1. В лотерее 1000 билетов. Из них 500 выигрышных. Куплено два билета. Какова вероятность того, что оба билета выигрышные?

2. В партии из 200 деталей: 130 – первого сорта, 30 – второго, 16 – третьего, 4 – брака. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет первого или второго сорта.

2. Спортивная группа состоит из 7 спортсменов-студентов экономического, 9 – радиотехнического, 6 – механического и 2 – авиационного факультетов. Какова вероятность того, что 3 студента, отобранных случайно для соревнований, окажутся студентами радиотехнического факультета?

3. Библиотека состоит из 15 различных книг, причем 5 книг стоят по 240 рублей, 3 книги – по 310 рублей, 2 – по 130 рублей и 5 – по 220 рублей. Найти вероятность того, что взятые наудачу две книги стоят больше 350 рублей.

4. Станок-автомат изготовляет 99% стандартных гаек М-16. Из скольких гаек должна состоять партия, чтобы вероятность обнаружить в ней хотя бы одну нестандартную была не больше 0,1?

5. Рабочий обслуживает три станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,9; дня второго эта вероятность равна 0,8; а для третьего – 0,85. Какова вероятность того, что в течение часа: а) ни один станок не потребует внимания рабочего; б) все три станка потребуют внимания рабочего; в) какой-нибудь один станок потребует внимания рабочего?

6. Игрок *A* поочередно играет по 2 партии с игроками *B* и *C*. Вероятности выигрыша первой партии для игроков *B* и *C* равны 0,1 и 0,2 соответственно. Вероятность выиграть во второй партии для игрока *B* равна 0,3 для игрока *C* – 0,4. Определить вероятность того, что из игроков *B* и *C*: а) первым выиграет игрок *B*; б) первым выиграет игрок *C*.

7. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием *К*, 30% - с заболеванием *L*, 20% – с заболеванием *М*. Вероятность полного излечения болезни *К* равна 0,7; для болезнен *L* и *М* эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что больной страдал заболеванием *К*.

8. Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,015. Из большой партии изделий отбирается 100 штук и проверяется их качество. Если среди них окажется 3 или более бракованных, то вся партия возвращается на сплошную разбраковку. Определить вероятность того, что партия будет отвергнута.

9. Изделие некоторого производства содержит 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий: а) не окажется ни одного испорченного; б) будут 2 испорченных изделия.

10. Вероятность появления события в каждом из независимых опытов равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 опытах событие появится не менее 70 и не более 80 раз.

Определение 1.7. Два события *A* и *B* называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого.

Определение 1.8. Группа событий называется ***несовместной***, если эти события попарно несовместны.

Пример 1.6. Производится выстрел по мишени. Введем следующие события: A_1 – попадание в 10, A_2 – попадание в 8, A_3 – попадание в 6, A_4 – попадание в 4, A_5 – попадание в 2, A_6 – попадание в 0. Все эти события образуют группу несовместных событий.

Определение 1.9. Группа событий называется ***совместной***, если хотя бы два из них совместны.

Пример 1.7. Производится три выстрела по мишени. Пусть событие A_1– попадание при первом выстреле, событие A_2 – попадание при втором выстреле, событие A_3 – попадание при третьем выстреле. Тогда события $A_1, A_{2,}, A_3$ образуют группу совместных событий.

1.2. Операции над случайными событиями. Частота события

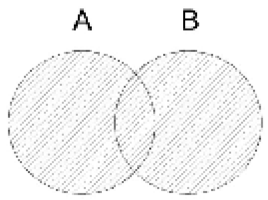
Определение 1.10. ***Суммой или объединением*** нескольких событий называют событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Пример 1.8. Пусть событие *A* – попадание при первом выстреле, событие *B* – попадание при втором выстреле. Суммой этих двух событий является событие *C*, которое заключается в попадании в цель вообще, неважно при каком выстреле (первом или втором) или при обоих вместе, т.е. $C=A+B$.

Определение 1.11. ***Произведением или совмещением*** нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

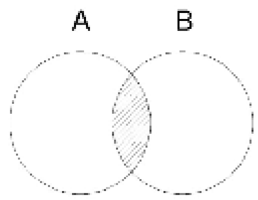
Пример 1.9. Пусть событие *A* – попадание при первом выстреле, а событие *B* – попадание при втором выстреле. Тогда произведением этих событий является событие *C*, заключающееся в том, что в цель попали и при первом выстреле и при втором, т.е. $C = A \cdot B$.

Понятие суммы и произведения событий имеет геометрическую интерпретацию.



$A \cup B$

$C = A + B$



$A \cap B$

$C = A \cdot B$

Определение 1.12. ***Частотой*** события A в данной серии испытаний называется отношение числа испытаний m, в котором появляется событие A к общему числу всех произведенных испытаний n.

$$P^*(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1.1)$$

Пример 1.10. По цели произведено 95 выстрелов и при этом зарегистрировано 76 попаданий. Значит, относительная частота попаданий в цель равна

$$P^*(A) = \frac{76}{95} = 0{,}8.$$

Свойства частоты событий:

1. Частота события A – есть неотрицательное число, заключенное между нулем и единицей

$$0 \le P^*(A) \le 1. \qquad (1.2)$$

2. Частота достоверного события равна единице.
3. Частота невозможного события равна нулю.
4. Частота суммы двух несовместных событий равна сумме частот этих событий

$$P^*(A+B) = P^*(A) + P^*(B). \qquad (1.3)$$

Определение 1.13. Частоту одного события, вычисленную при

3. События A, B, C, D образуют полную группу. Вероятности событий равны: P(A) = 0,1; P(B) =0,4; P(C)= 0,3. Чему равна вероятность события D?

4. Два стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень первый стрелком равна 0,7, вторым – 0,8. Оба стрелка производят по одному выстрелу в мишень. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень; б) оба промахнутся; в) хотя бы один попадет в мишень; г) произойдет одно попадание в мишень.

5. Вероятность изготовления бракованного генератора для автомобильного двигателя равна 0,0003. Из скольких генераторов должна состоять партия, чтобы вероятность наличия в ней хотя бы одного бракованного была не более 0,01?

6. При проверке качества зерен пшеницы было установлено, что все зерна могут быть разделены на 4 группы. К первой группе принадлежит 96%, ко второй – 2%, к третьей – 1% и к четвертой – 1% всех зёрен. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен, для семян первой группы – 0,50, для семян второй группы – 0,2, для семян третьей группы – 0,08, для семян четвертой группы – 0,02. Определить вероятность того, что из взятого наудачу зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

7. В пирамиде установлено 10 винтовок, из которых 4 снабжено оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень одним выстрелом из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

8. Вероятность того, что наудачу взятая деталь нестандартная, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу пяти деталей не более двух нестандартных.

9. При штамповке металлических деталей-клемм – получается 30% брака. Найти вероятность наличия от 790 до 820 (включительно) годных деталей в партии из 900 клемм.

10. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие появится 76 раз.

ВАРИАНТ 23

1. Из шести карточек с буквами Л, И, Т, Е, Р, А выбрали наугад четыре и последовательно уложили друг за другом. Найти вероятность того, что при этом получится слово «ТИРЕ».

ных установок ее в механизм. Всего таких установок производится не более 4-х. Вероятность того, что деталь будет установлена без подгонки с первой пробы, равна 0,44; с подгонкой при второй пробе – 0,31; при третьей – 0,20; при четвертой – 0,05. Какова вероятность того, что для подгонки этой детали потребуется: а) три или четыре пробы; б) не более двух проб?

5. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

6. В пирамиде установлено 5 винтовок, из которых 3 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с прицелом, равна 0,95; для винтовки без прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

7. Число грузовых машин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина , равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что эта машина грузовая.

8. В случайно выбранной семье 6 детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки одинаковыми, определить вероятность того, что в выбранной семье окажется; а) 4 мальчика и 2 девочки; б) не более 2-х мальчиков; в) более 2-х мальчиков.

9. В автобусном парке 100 автобусов. Известно, что вероятность выхода из строя мотора в течение дня равна 0,1. Чему равна вероятность того, что в определенный день окажутся неисправными моторы у 12 автобусов?

10. Вероятность появления события при одном опыте равна 0,3. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0,2 до 0,4?

ВАРИАНТ 22

1. В шахматном турнире участвуют 10 человек, которые по жребию распределены в две группы по 5 человек. Найти вероятности того, что двое наиболее сильных игроков будут играть в разных группах.

2. В лотерее 100 билетов; среди них один выигрыш в 5000 рублей, 3 выигрыша по 1000 рублей, 6 – по 500 рублей, 15 – по 100 рублей. Куплен один билет. Найти вероятность: а) выиграть не менее 500 рублей; б) выиграть не более 500 рублей.

условии наступления другого события, называют ***условной частотой*** и обозначают

$$P^*(A/B).$$

5. Частота произведения двух совместных событий равна произведению частоты одного из них на условную частоту другого

$$P^*(AB) = P^*(A)\cdot P^*(B/A). \tag{1.4}$$

1.3. Вероятность события. Аксиомы теории вероятностей

По мере увеличения числа испытаний частота появления события постепенно стабилизируется, т.е. принимает значение, мало отличающееся от некоторого вполне определенного числа.

Определение 1.14. ***Вероятностью*** случайного события называется постоянное число, около которого группируются частоты этого события по мере увеличения числа испытаний.

Это определение называется статистическим определением вероятности.

Используя определение и свойства частоты события, рассмотрим свойства вероятностей, которые принимаются в качестве аксиом.

Аксиома 1. Каждому случайному событию А соответствует определенное число *P(A)*, называемое его вероятностью и удовлетворяющее условию

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.5}$$

Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна единице.

Аксиома 3. Вероятность невозможного события равна нулю.

Аксиома 4. (*Аксиома сложения вероятностей*). Пусть A и B — несовместные события. Тогда вероятность того, что произойдет хотя бы одно из этих двух событий, равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{1.6}$$

Аксиома 4 допускает обобщение на случай нескольких событий, а именно: если события A_1, A_2, ..., A_n попарно несовместны, то

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \qquad (1.7)$$

Определение 1.15. Вероятность наступления события *A*, вычисленная при условии наступления другого события *B*, называется ***условной вероятностью*** события *A* по отношению к событию *B*

$$P(A/B).$$

Аксиома 5. (Аксиома умножения вероятностей). Вероятность произведения (совмещения) двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого

$$P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A). \qquad (1.8)$$

Определение 1.16. Событием, ***противоположным*** событию *A*, называется событие $\overline{A}$, состоящее в ненаступлении события *A*.

Пример 1.11. Событие *A* — выпадение четного числа очков при однократном бросании игральной кости; тогда событие $\overline{A}$— выпадение нечетного числа очков. Очевидно, события *A* и $\overline{A}$ несовместны.

Для любого события A вероятность противоположного события $\overline{A}$ выражается равенством

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (1.9)$$

1.4. Элементы комбинаторики

Во многих задачах классической теории вероятностей используется комбинаторика.

Определение 1.17. ***Комбинаторика*** – один из разделов математики, в котором рассматриваются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов (цифр, букв и т.д.).

Приведем несколько примеров комбинаторных задач.

Пример 1.12. Сколько четырехзначных чисел можно составить из заданных четырех цифр: 1, 2, 3, 4?

Объектами в данном примере являются указанные цифры. Ответ на поставленный вопрос будет различным, в зависимости от того, содержит ли число повторяющиеся цифры или нет.

того, что хотя бы один из этих спортсменов попадет в сборную.

5. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность принятия вызова равна 0,2 для первого вызова, 0,3 для второго вызова, 0,4 для третьего вызова. Найти вероятность установления связи, если события, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы.

6. Из коробки, содержащей 5 красных и 8 черных карандашей, переложили один карандаш во вторую коробку, содержащую 7 красных и 5 черных карандаша; затем из второй коробки наугад был взят один карандаш. Найти вероятности того, что этот карандаш: а) красный; б) черный?

7. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это а) мужчина; б) женщина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число).

8. Вероятность изготовления стандартной детали на автоматическом станке равна 0,9. Определить, чему равна вероятность того, что из пяти наудачу взятых деталей три окажутся стандартными.

9. Вероятность обрыва нити в течение минуты на каждом веретене прядильного станка равна 0,001. Найти вероятность того, что в течение одной минуты на 100 веретенах нить оборвется: а) один раз; б) хотя бы один раз.

10. Имеется 100 станков одинаковой мощности, работающих независимо друг от друга в одинаковом режиме, при котором их привод оказывается включенным в течение 0,8 всего рабочего времени. Какова вероятность того, что в произвольно взятый момент времени окажутся включенными от 70 до 86 станков?

ВАРИАНТ 21

1. Из полной колоды карт (52 карты) выбирают наугад сразу 3. Найти вероятность того, что эти карты будут: тройка, семерка, туз.

2. Из пяти букв составлено слово "КНИГА". Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал их в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово "КНИГА".

3. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; 9 очков – 0,3; 8 и меньше – 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее девяти очков.

4. При конвейерной сборке точного прибора рабочий должен установить в него определенную деталь. Деталь эту в некоторых случаях приходится подгонять путем дополнительной обработки и проб-

5. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наугад. Какова вероятность, что ему придется звонить не более чем три раза?

6. Изделие может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями p_1=0, 25, p_2=0,25, p_3=0,5. Вероятности того, что изделие проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что изделие проработает заданное число часов.

7. На фабрике, изготовляющей болты, машины *A*, *B* и *C*, производят соответственно 25, 35 и 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5%; 4% и 2%. Случайно выбранный из продукции болт оказался бракованным. Какова вероятность того, что он был произведен машиной *A*, машиной *B*, машиной *C*?

8. В хлопке содержится 10% коротких волокон. Определить вероятность того, что среди отобранных наудачу шести волокон окажутся не более двух коротких.

9. По данным технического контроля в среднем 10% изготовляемых на заводе часов нуждаются в Дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что из 400 изготовленных часов 350 штук не будет нуждаться в дополнительной регулировке?

10. Известно, что 3/5 всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов выпускаются первым сортом. Изготовленные аппараты расположены один возле другого случайным образом. Приемщик берет первые попавшиеся 200 штук. Чему равна вероятность того, что среди них аппаратов первого сорта окажется: а) от 120 до 150 штук; б) от 90 до 150 штук включительно.

ВАРИАНТ 20

1. В партии из 80 банок консервов оказалось 6 бракованных. Какова вероятность того, что две подряд взятые банки окажутся бракованными?

2. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятность того, что среди наудачу извлеченных двух деталей есть хотя бы одна стандартная.

3. На девяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Две из них вынимают наугад и кладут на стол в порядке появления, затем читается полученное число. Найти вероятность того, что это число четное.

4. Три спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятности зачисления в сборную команду первого, второго и третьего спортсмена соответственно равны 0, 8; 0,7 и 0,6. Найти вероятность

Пример 1.13. Найти число диагоналей *n*-угольника. Здесь объектами являются прямые, соединяющие вершины *n*-угольника и не являющиеся его сторонами.

Под множеством *A* будем понимать набор объектов *a, b, c,* … определенной природы.

Множество обозначают заглавными латинскими буквами: *A, B, C*,…, а его элементы – маленькими латинскими буквами: *a, b, c*,…

$$A=\{a,b,c,...\}$$

Определение 1.18. Если число объектов ограничено, то множество называют ***конечным***.

Определение 1.19. Всякую часть множества называют ***подмножеством*** или ***выборкой.***

Пример 1.14. Рассмотрим уравнение $x^2=1$.

Числа $x_1=1$ и $x_2=-1$ образуют множество его корней $A=\{1,-1\}$. Выборками этого множества будут, например, множества

$$A_1=\{1\},\quad A_2=\{-1\}.$$

Выборки можно разделить на ***упорядоченные*** и ***неупорядоченные***.

Определение 1.20. Под ***упорядоченными выборками*** будем понимать такие выборки, которые зависят как от состава, так и от порядка входящих в них элементов.

Определение 1.21. ***Неупорядоченные выборки*** отличаются друг от друга только составом элементов.

Так, например, если заданы два подмножества $A_1=\{a,b,c\}$ и $A_2=\{b,a,c\}$, то они представляют две различные упорядоченные выборки или одну неупорядоченную.

Наиболее широко применяется три основных типа выборок: ***размещения, перестановки*** и ***сочетания.***

Определение 1.22. ***Размещением*** из *n* элементов по *k* элементам называется упорядоченная выборка, содержащая *k* элементов множества, состоящего из *n* элементов.

Из определения следует, что:

1) $0\le k\le n$,

2) различные размещения отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их следования.

Пример 1.15. Имеется множество, состоящее из четырех элементов:

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

Составим все возможные двухэлементные упорядоченные подмножества:

$$\begin{matrix} ab & ac & ad \\ ba & bc & bd \\ ca & cb & cd \\ da & db & dc \end{matrix}$$

Значит, это множество имеет 12 размещений по два элемента.

Число различных размещений, взятых из n элементов по k, обозначают символом: A_n^k.

В примере 1.15: $A_4^2=12$.

Число различных размещений, взятых из n элементов по k определяется формулами:

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \tag{1.10}$$

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}, \tag{1.11}$$

где

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n. \tag{1.12}$$

По определению,

$$1!=1, \qquad 0!=1.$$

Решение приведенного выше примера можно записать в виде:

$$A_4^2=4\cdot3=12$$

или

$$A_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2}=12.$$

Пример 1.16. Имеется 5 различных флажков для сигнализации. Сколько различных сигналов можно передать этими флажками, если значение сигнала зависит от числа флажков и их порядка (одинаковые флажки в одном сигнале не допускаются)?

Решение. Число сигналов, которые можно передать k флажками

6. В каждой из двух урн содержится 4 черных и 6 белых шаров. Из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в первую урну, после чего из первой урны наудачу извлечен шар. Найти вероятность того, что шар, извлеченный из первой урны, окажется белым.

7. В цехе три группы автоматических станков (по степени амортизации) производят одни и те же детали. Производительность их одинакова, но качество работы различно. Известно, что станки, первой группы производят 0,8 деталей первого сорта; второй – 0,85; третьей – 0,9. Все произведенные в цехе за смену детали в нерассортированном виде сложены на складе. Взятая из склада наудачу деталь оказалась первого сорта. На станке какой группы вероятнее всего она была изготовлена, если станков первой группы 5, второй – 4; третьей – 2?

8. В магазине приобретено 5 телевизоров для студенческих общежитий. Для каждого из них вероятность невыхода из строя в течение гарантийного срока равна 0,8. Определить вероятность того, что: а) три; б) четыре телевизора в течение гарантийного срока не выйдут из строя.

9. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит 50 раз в 243 испытаниях.

10. Пять работниц окрашивают одинаковые по форме и размерам игрушки. Две из них производят окраску в красный цвет, а три – в зеленый. Производительность труда работниц одинакова. Окрашенные игрушки оказались перемешанными. Определить вероятность того, что среди 600 игрушек, отобранных случайным образом, красных окажется от 228 до 264 штук включительно.

ВАРИАНТ 19

1. В мешочке имеется пять кубиков. На всех гранях каждого кубика написана одна из букв О, П, С, Р, Т. Найти вероятность того, что на вынутых по одному и расположенных в одну линию кубиках можно будет прочесть слово "СПОРТ".

2. Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: а) один выигрышный; б) хотя бы один выигрышный.

3. Ящик содержит 10 деталей, среди которых две нестандартные. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных шести деталях окажется не более одной нестандартной детали.

4. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в цель, равна 0,9. Стрелок произвел три выстрела. Найти вероятность того, что три выстрела дали попадание.

одному из двух контролеров. Вероятность того, что проверяемая банка попадет первому контролеру, равна 0,6; ко второму – 0,4. Вероятность того, что качественная банка будет признана стандартной при проверке первым контролером, равна 0,94; вторым – 0,98. Определить вероятность того, что наудачу взятая после проверки банка окажется стандартной.

7. При отклонении от нормального режима работы автомата срабатывает сигнализатор C_1 с вероятностью 0,8, а сигнализатор C_2 с вероятностью 0,7. Вероятности того, что автомат снабжен сигнализатором C_1 или C_2 соответственно, равна 0,5 и 0,4. Получен сигнал о разладе автомата. Что вероятнее: автомат снабжен сигнализатором C_1 или C_2?

8. Монета подбрасывается 8 раз. Какова вероятность того, что 6 раз она упадет гербом вверх?

9. Вероятность того, что пара обуви, взятая наугад из изготовленной партии, окажется высшего сорта, равна 0,4. Чему равна вероятность того, что среди 600 пар, поступивших на контроль, окажется от 228 до 252 пар обуви высшего сорта?

10. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет в пяти веретенах.

ВАРИАНТ 18

1. В партии из 100 изделий имеется 8 штук бракованных. Какова вероятность того, что среди шести выбранных наугад для проверки изделий 2 окажутся бракованными?

2. Участники жеребьевки тянут из ящика жетон с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу выбранного жетона делится на 6.

3. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,7; а вторым – 0,8. Стрелки выстрелили одновременно. Какова вероятность того, что произошло одно попадание?

4. Детали проходят три операции обработки. Вероятность попадания брака во время первой операции равна 0,02; второй – 0,06; третьей – 0,02. Найти вероятность выхода стандартной детали.

5. Три стрелка стреляют в одну мишень. Известно, что вероятность попаданий в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5; для второго – 0,3; для третьего – 0,4. Определить вероятность того, что в результате одновременного выстрела всех трех стрелков в мишени будет: а) одна пробоина; б) не менее одной пробоины.

$(k \le 5)$, определяется выражением:

$$n_k = A_5^k = \frac{5!}{(5-k)!}$$

Общее число сигналов

$$n = \sum_{k-1}^{5} n_k = \sum_{k=1}^{5} \frac{5!}{(5-k)!} = \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{1!} + \frac{5!}{0!} =$$

$$= 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325.$$

Пример 1.17. В турнире принимают участие 10 команд. Сколькими способами могут быть распределены три призовых места?

Решение. Будем считать, что каждая команда может получить не более одного призового места. Выбрать 3 команды из 10 участвующих можно $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!} = 720$ способами, так как призеры отличаются друг от друга либо составом команд, либо порядком следования призовых мест.

Определение 1.23. ***Перестановкой*** называется размещение из *n* элементов, взятым по *n* элементам.

Пример 1.18. Множество $A = \{a, b, c\}$ имеет следующие различные перестановки:

$$\begin{matrix} abc & acb & bac \\ bca & cab & cba. \end{matrix}$$

Число различных перестановок из *n* элементов обозначают P_n и определяют по формуле:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n! \qquad (1.13)$$

Пример 1.19. Сколькими способами можно расставить на книжной полке четыре различные книги?

Решение. Общее количество способов равно числу перестановок:

$$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

Пример 1.20. Сколько различных чисел, не делящихся на 2, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры не повторяются)?

Решение. Общее количество чисел, которые можно составить из 5 различных цифр, равно числу перестановок $P_5 = 5! = 120.$ Числа, делящиеся на 2, получаются, когда на последнем месте стоит 2 или 4. Общее количество чисел, оканчивающихся двойкой, равно числу перестановок $P_4 = 4! = 24.$ Аналогичное выражение получается для количества чисел, оканчивающихся на 4. Искомое количество чисел определяется выражением

$$P_5 - 2P_4 = 120 - 48 = 72.$$

Определение 1.24. ***Сочетанием*** из *n* элементов по *k* элементам называется неупорядоченная выборка, содержащая *k* элементов данного множества, состоящего из *n* элементов.

Из определения следует, что:

1) $0 \le k \le n$,

2) различные сочетания отличаются друг от друга только составом элементов.

Пример 1.21. Множество *M* состоит из трех элементов $M = \{a, b, c\}$. Это множество имеет следующие сочетания по два элемента:

$$ab \quad ac \quad bc.$$

Заметим, что все сочетания, состоящие из одних и тех же элементов, расположенных в различном порядке, считаются одинаковыми. Так, в примере, комбинации ab и ba определяют одно и то же сочетание.

Сочетания обозначают C_n^k.

Число различных сочетаний из *n* элементов по *k* определяется формулой:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (1.14)$$

Пример 1.22. Найти число диагоналей выпуклого *n*-угольника.

Решение. Соединив всевозможными способами вершины многоугольника, получим $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ отрезков, из которых *n* отрезков являются сторонами многоугольника, а прочие отрезки (число их

танные детали складываются в одном месте, причем деталей с первого станка складывается вдвое больше, чем со второго. Вычислить вероятность того, что взятая наудачу деталь не будет бракованной.

7. Для участия в спортивных студенческих отборочных соревнованиях выделено от первого курса 4, от второго – 6, от третьего – 5 студентов, Вероятности того, что студент первого, второго, третьего курса попадет в сборную института, соответственно равны 0,9; 0,7; 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой из групп, вероятнее всего, он принадлежал?

8. Производится три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Найти вероятность того, что в результате этих выстрелов будет только одно попадание.

9. Вероятность выпуска сверла повышенной хрупкости (брак) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Найти вероятность того, что: а) в коробке не откажется бракованных сверл; б) число бракованных сверл окажется не более трех.

10. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,9 утверждать, что частота интересующего нас события будет отличаться от вероятности появления этого события, равной 0,4, не более чем на 0,1?

ВАРИАНТ 17

1. В партии, состоящей из 50 изделий, имеется 4 бракованных. Наудачу выбирается 5 изделий из этой партии. Найти вероятность того, что среди них окажется 2 бракованных изделия.

2. Каждая из бука А, У, К, С, З написана на одной из пяти карточек. Карточки раскладываются в произвольном порядке одна за другой. Найти вероятность того, что при этом образуется слово «КАЗУС».

3. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на три зоны. Вероятность попадания в первую зону равна 0,45; во вторую – 0,30; в третью – 0,15. Найти вероятность попадания в мишень.

4. В двух ящиках находятся детали. В первом ящике – 10 (из них 8 стандартных), во втором – 15 (из них 12 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

5. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены потребует внимания первый станок, равна 0,7; второй – 0,75; третий – 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены: а) потребуют внимания рабочего какие-либо два станка; б) ни один станок не потребует внимания рабочего.

6. Упакованные консервы поступают с конвейера на проверку к

встречается дефект В, а в продукции, свободной от дефекта A, дефект B встречается в 1% случаев. Найти вероятность встречи дефекта B во всей продукции.

7. Телеграфное сообщение состоит из сигналов "точка" и "тире". Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений "точка" и 1/3 сообщений "тире". Известно, что среди передаваемых сигналов "точка" и "тире" встречаются в отношении 6:3. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принят сигнал "'точка".

8. В ОТК поступила партия изделий. Вероятность того, что наудачу взятое изделие стандартно, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 проверенных изделий окажется стандартных не менее 84.

9. Найти вероятность того, что при четырех независимых испытаниях событие A появится ровно три раза, зная что в каждом испытании вероятность появления события А равна 0,7.

10. Вероятность изготовления подшипникового шарика ниже третьего класса равна 0,0002. Определить вероятность того, что в партии из 500 таких шариков содержится хотя бы один ниже третьего класса.

ВАРИАНТ 16

1. Колода карт (52 карты) произвольным образом делится пополам. Найти вероятность того, что в каждой половине будет по 2 туза.

2. В кошельке лежат 3 монеты по 50 копеек и 7 монет по 1 рублю. Наудачу берется монета, а затем извлекается вторая монета, оказавшаяся монетой в 50 коп. Определить вероятность того, что и первая извлеченная монета имеет достоинство в 50 коп.

3. Два стрелка произвели по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7; а вторым – 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попал в мишень.

4. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: A – появится герб; B – появилось шесть очков.

5. Рабочий обслуживает четыре станка, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,9; для второго – 0,8; для третьего – 0,7; для четвертого – 0,9. Вычислить вероятность того, что в течение часа: а) по крайней мере, один из станков не потребует внимания рабочего; б) только один станок потребует внимания рабочего.

6. На двух станках обрабатываются однотипные детали, вероятность брака для первого станка равна 0,03; для второго – 0,02. Обрабо-

равно) $\dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-3)}{2}$ его диагоналями.

Свойства сочетаний:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$

2) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

3) $C_n^0 = C_n^n = 1$

Определение 1.25. ***Размещением с повторениями*** из n элементов по k элементам называется размещение, в котором каждый из элементов может встречаться несколько раз.

Пример 1.23. Множество M состоит из трех элементов $M = \{a, b, c\}$. Это множество имеет следующие размещения с повторениями по два элемента:

$$aa\ ab\ ac$$
$$ba\ bb\ bc$$
$$ca\ cb\ cc$$

Число различных размещений с повторениями из n элементов по k будем обозначать символом $\overline{A}_n^k$ и находить по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k \tag{1.15}$$

В примере 1.21 число размещений: $\overline{A}_3^2 = 9$.

Пример 1.24. Секретный замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов с различными нанесенными на них цифрами. Сколькими способами можно набрать на замке определенное четырехзначное число?

Решение. Каждый набор четырехзначного числа представляет собой размещение с повторениями из 5 элементов по 4. Следовательно, общее число способов определяется формулой

$$\overline{A}_5^4 = 5^4 = 625.$$

Пример 1.25. Сколько сигналов можно передать пятью различными флажками, если флажки могут повторяться?

Решение. Число сигналов, которые можно передать k флажками, определяется выражением

$$n_k = \overline{A}_5^k = 5^k.$$

Общее число сигналов

$$n = \sum_{k=1}^{5} n_k = \sum_{k=1}^{5} 5^k = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + 5^5 =$$
$$= 5 + 25 + 125 + 625 + 3125 = 3905.$$

Правило произведения. Если при составлении комбинации по два элемента известно, сколькими способами можно выбрать первый элемент (n) и сколькими способами можно выбрать второй элемент (m), то пару элементов можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Пример 1.26. В группе 18 студентов, из них – 5 отличников. Наугад выбирают 7 человек. Сколькими способами можно сделать такой отбор, чтобы среди 7 выбранных оказалось 3 отличника?

Решение. Троих отличников можно выбрать C_5^3 способами, остальных студентов (не отличников) можно выбрать C_{13}^4 способами. Используя правило произведения, получим 7150 способов:

$$C_5^3 \cdot C_{13}^4 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{13!}{9! \cdot 4!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3!} \cdot \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{9! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} =$$
$$= 10 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 7150$$

Правило суммы (сложения). Если некоторый объект A может быть выбран из данного множества m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно $(m+n)$ способами.

Пример 1.27. Сколькими способами можно разбить 9 предметов на две группы так, чтобы в каждой группе было не меньше трех предметов?

Решение. Все возможные варианты разбиения предметов на две группы представляются следующими разложениями: 9=3+6, 9=4+5 (возможности 9=6+3 и 9=5+4 совпадают с предыдущими). Рассмотрим, сколькими способами можно выбрать 3 или 4 предмета из 9. Заметим, что порядок в выборе предметов не важен, поэтому имеют место сочетания: C_9^3 и C_9^4. Используя правило сложения, получим:

$$C_9^3 + C_9^4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 84 + 126 = 210$$

способов.

Правила умножения и сложения распространяются на случаи трех и более объектов.

равна 0,9, для велосипедиста – 0,8, для бегуна – 0,75, Найти вероятность того, что выбранный наудачу спортсмен выполнит норму.

7. Имеется 10 одинаковых урн, из которых в девяти находятся по 3 черных и 3 белых шара, а в другой – 5 белых и 1 черный. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечен из урны, содержащей 5 белых шаров?

8. На факультете 730 студентов. Вероятность рождения каждого студента в любой день года 1/365. Найти вероятность того, что найдется 3 студента с одним и тем же днем рождения.

9. Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/I2 . Какова вероятность, имея 5 билетов лотереи, выиграть: а) по одному билету; б) хотя бы по двум билетам?

10. Вероятность наступления события в каждом из независимых опытов равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать отклонение относительной частоты появления событий от его вероятности не более, чем на 0,02.

ВАРИАНТ 15

1. На каждой из шести одинаковых карточек напечатана одна из букв О, Т, М, Р, О, С. Карточки тщательно перемешивают. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной (наугад) расположенных в одну линию карточках можно прочесть слово "ТРОС".

2. Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигаций не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

3. Три охотника попадают в летящую утку с вероятностями 2/3, 3/4 и 1/4. Все одновременно стреляют по пролетающей утке. Какова вероятность того, что утка будет подбита?

4. В цехе n моторов, включающихся и выключающихся независимо друг от друга. Вероятность того, что в данный момент мотор окажется выключенным, для всех моторов одинакова и равна 0,1. Определить: а) вероятность того, что в данный момент окажется выключенным хотя бы один мотор (n=10); 2) при каком количестве (n) моторов в цехе вероятность того, что в данный момент окажется выключенным хотя бы один мотор, будет не более 0,5.

5. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна p. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

6. Брак в продукции завода вследствие дефекта A составляет 6%, причем в продукции, забракованной по принципу A в 4% случаев

ден на первом станке.

8. Средний процент нарушения работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока 10%. Вычислить вероятность того, что из 10 купленных телевизоров 3 выдержат гарантийный срок.

9. Вероятность того, что абонент правильно наберет телефонный номер, принимается для всех абонентов равной 0,999. Определить вероятность того, что среди 500 произведенных независимо один от другого вызовов окажется менее двух ошибочных.

10. В хлопке 70% длинных волокон. Какова вероятность того, что среди взятых наудачу 20 волокон не более 10 длинных?

ВАРИАНТ 14

1. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которые по жребию распределяются на две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что 4 наиболее сильных шахматиста попадут по два в разные группы.

2. На десяти одинаковых карточках написаны различные цифры от нуля до 9. Определить вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек двузначное число делится на 18.

3. При конвейерной сборке точного механизма рабочий должен установить в него определенную деталь. Деталь эту в некоторых случаях приходится подгонять путем дополнительной обработки и пробных установок ее в механизм. Всего таких установок производится не более пяти. Вероятность того, что деталь будет установлена без подгонки с первой пробы, равна 0,38, а с подгонкой при второй пробе – 0,26, при третьей пробе – 0,20, при четвертой – 0,14, при пятой – 0,02. Какова вероятность того, что для подгонки этой детали потребуется: а) более двух проб; б) нечётное число проб.

4. Многолетними наблюдениями в данном районе установлено, что статистическая вероятность сентябрьскому дню оказаться дождливым равна 1/3. Фермер должен в течение трех дней сентября выполнить определенную работу. Чему равна вероятность того, что ни один из этих дней не будет дождливым?

5. Четыре охотника договорились стрелять по дичи в определенной последовательности: следующий охотник производит выстрел лишь в случае промаха предыдущего. Вероятности попадания в цель каждым из охотников равны по 0,8. Найти вероятность того, что будет произведено: а) один выстрел; б) два выстрела; в) три выстрела; г) четыре выстрела.

6. В группе спортсменов 20 лыжников, 5 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму для лыжника

1.5. Классическое определение вероятности

На практике используют классическое определение вероятности события.

Определение 1.26. ***Вероятностью*** события A называется отношение числа исходов, благоприятствующих данному событию ($m(A)$), к общему числу всех исходов (n)

$$P(A)=\frac{m(A)}{n}. \qquad (1.16)$$

Пример 1.28. В урне имеется два красных, три синих и три белых шара. Найти вероятность того, что а) одновременно извлеченных два шара окажутся синими ся наугад. Какова вероятность того, что в результате получится слово, "море"?

Решение. а) В урне всего 10 шаров. Общее число всех элементарных исходов равно числу способов извлечения 2 шаров из 10:

$$n=C_{10}^2=\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}=45.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно числу способов извлечения 2 шаров из 5, т.е.

$$m=C_5^2=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10.$$

Тогда, согласно формуле (1.16) вероятность события A равна:

$$P(A)=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}.$$

б) Общее число всех элементарных исходов равно числу способов извлечения 4 шаров из 10:

$$n=C_{10}^4=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=210.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно числу способов извлечения 1 красного, 1 синего и 2 белых шаров, т.е.

$$m=C_2^1\cdot C_3^1\cdot C_3^2=2\cdot 3\cdot 3=18.$$

А значит, вероятность события B: $P(A)=\dfrac{18}{210}=\dfrac{3}{35}$.

Пример 1.29. Устройство состоит из 5 элементов, из которых 2 – изношены. При включении устройства включают случайно 2 элемента.

Найти вероятность, что включенными окажутся не изношенные элементы?

Решение. Общее число всех элементарных исходов равно

$$n = C_5^2 = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10\cdot$$

Число исходов, благоприятствующих событию, равно

$$m = C_3^2 = \frac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 3\cdot$$

Вероятность события

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0,3\cdot$$

Пример 1.30. В секретном замке на общей оси 4 диска. Каждый разделен на 5 секретов с различными цифрами. Замок открывается, если цифры составят определенное четырехзначное число. Какова вероятность открыть замок с первой попытки?

Решение. Открыть замок с первой попытки можно только, если все набранные цифры совпадут с определенным четырехзначным числом. Поэтому число исходов, благоприятствующих событию, равно $m=1$.

Общее число всех исходов определяется различными комбинациями из четырех цифр, причем цифры могут повторяться, т.е. $n = \overline{A}_5^4 = 5^4 = 625$.

Значит, вероятность события $P(A) = \dfrac{1}{625}$.

Пример 1.31. Из колоды в 36 карт наугад выбирают 3 карты. Какова вероятность того, что среди них окажутся 2 дамы?

Решение. Три карты из 36 можно выбрать C_{36}^3 способами, т.е. $n = C_{36}^3$. Далее найдем число благоприятствующих исходов (m). Две дамы из четырех можно выбрать C_4^2 способами, и эта комбинация может сочетаться с любой из 32 карт, не являющихся дамой, т.е. $m = C_4^2 \cdot C_{32}^1 = 32\cdot C_4^2$. Значит,

$$P(A) = \frac{32C_4^2}{C_{36}^3} = \frac{4\cdot 3\cdot 32\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 36\cdot 35\cdot 34} = \frac{16}{595}.$$

Пример 1.32. Десять различных книг расставляются наудачу на одной книжной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом (событие A).

сов нуждаются в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что из 300 изготовленных часов 290 штук не будут нуждаться в дополнительной регулировке?

10. Вероятность появления события в каждом из независимых опытов равна 0,64. Произведено 144 испытания. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от вероятности 0,64 по абсолютной величине не более, чем на 0,04.

ВАРИАНТ 13

1. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: Л, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово "математика"?

2. Десять друзей садятся случайным образом за круглый стол. Найти вероятность того, что два определенных друга A и B сядут рядом, причем B – слева от A.

3. Чему равна вероятность того, что дни рождения трех человек придутся на разные месяцы: июнь, июль, август? Вероятности попадания дня рождения на данный месяц считаются равными для всех месяцев года.

4. Для повышения надежности работы электрической цепи на участке AB параллельно подсоединены два дублирующих узла C и $Д$, не взаимодействующие друг с другом. Узлы присоединены так, что в цепи работает один из них и, как только он выходит из строя, автоматически включается другой. Определить надежность (вероятность невыхода из строя) участка AB; вероятность выхода из строя узла C равна 0,1, узла $Д$ – 0,2.

5. В телестудии имеются три телекамеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включена: а) одна камера; в) хотя бы одна камера.

6. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8, а второго – 0,9. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь из наудачу выбранного набора – стандартна.

7. На двух автоматических станках изготовляются одинаковые валики. Вероятность изготовления валика высшего сорта на первом станке равна 0,92, а на втором – 0,80. Изготовленные на обоих станках не рассортированные валики находятся на складе в случайно образовавшемся порядке. Среди них валиков, изготовленных на первом станке, в 3 раза больше, чем на втором. Взятый наудачу со склада валик оказался высшего сорта. Определить вероятность того, что он произве-

равной 0,05, найти вероятность того, что из взятых пяти деталей 4 окажутся стандартными.

10. Вероятность того, что пара обуви, взятая наугад из изготовленной партии, окажется высшего сорта, равна 0,4. Чему равна вероятность того, что среди 600 пар, поступивших на контроль, окажется от 228 до 252 пары обуви высшего сорта?

ВАРИАНТ 12

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

2. Лотерея выпущена на общую сумму n рублей. Цена одного билета r рублей. Ценные выигрыши падают на m билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

3. Из колоды в 36 карт наудачу выбирается 3 карты. Какова вероятность, что среди них не более одного туза?

4. В урне a белых и b черных шаров. Из урны случайным образом, один за другим, вынимают все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку был вынут белый шар.

5. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,8. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень; б) оба стрелка промахнутся; в) только один стрелок поразит мишень; г) хотя бы один стрелок поразит мишень.

6. В цехе три типа автоматических станков. Известно, что станок первого типа производит 90% деталей отличного качества, станок второго типа – 85%, третьего – 80%. Все произведенные детали сданы на склад. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь со склада окажется отличного качества, если станков первого типа 10 штук, второго – 8, третьего – 2, а производительность всех станков одинакова.

7. Сборщик получил две коробки одинаковых деталей, изготовленных заводом №1, и три коробки таких же деталей, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода № 1 стандартна, равна 0,9, а завода №2 – 0,7. Из наудачу взятой коробки наудачу извлеченная сборщиком деталь оказалась стандартной. Что вероятнее: эта деталь изготовлена заводом №1 или №2?

8. Среди изготавливаемых рабочим деталей в среднем 4% брака. Какова вероятность того, что среди взятых для испытания пяти деталей одна бракованная?

9. По данным ОТК, в среднем 2% изготавливаемых не заводе ча-

Решение. Число n всех элементарных исходов опыта равно C_{10}^2, а число m, благоприятствующих событию A, равно 9, так как две определенные книги окажутся поставленными рядом, если они занимают либо первое – второе места, либо второе – третье, и т.д., либо девятое – десятое места на этой полке. Следовательно, вероятность события A равна $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{9}{C_{10}^2}=\frac{9\cdot 1\cdot 2}{10\cdot 9}=0,2$.

1.6. Геометрическая вероятность

Если число исходов велико, то используют геометрическую вероятность.

Пусть на плоскости имеется некоторая область D, площадь которой равна S_D. В ней содержится другая область d, площадь которой S_d. В область D наугад бросается точка. Рассмотрим, чему равна вероятность того, что точка попадет в область d.

Полагая, что наудачу брошенная точка может попасть в любую точку области D, вероятность попадания точки в область d будет равна отношению площади области d к размеру всей области, в которой может появиться данная точка, т.е.

$$P(A)=\frac{S_d}{S_D}. \tag{1.17}$$

Определение 1.27. Вероятность появления случайной точки внутри некоторой области определяется как отношение размера этой области к размеру всей области, в которой может появиться данная точка.

Пример 1.33. Внутрь круга радиуса 3 наугад поставлена точка. Найти вероятность того, что она окажется внутри вписанного в круг квадрата.

Решение. Число всех элементарных исходов равно площади круга, т.е. $n=p\,R^2=9p$. Сторона квадрата, вписанного в круг, равна $\sqrt{2}R$. Число исходов, благоприятствующих событию, равно площади квадрата, т.е. $m=2R^2=18$. А значит, вероятность того, что точка окажется внутри квадрата, равна

$$P(A)=\frac{S_d}{S_D}=\frac{18}{9p}=\frac{2}{p}.$$

1.7. Теоремы умножения и сложения вероятностей

Теорема 1 (*теорема сложения вероятностей несовместных событий*). Вероятность появления одного из нескольких несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n) \qquad (1.18)$$

Следствие 1. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1. \qquad (1.19)$$

Следствие 2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (1.20)$$

Пример 1.34. Курсант сдаст зачет по стрельбе, если получит оценку «4» или «5». Какова вероятность, что курсант сдаст зачет, если вероятность получить оценку «4» равна 0.4, а оценку «5» – 0,3?

Решение. Пусть событие A – курсант получит «4», тогда $P(A)=0,4$, и событие B – курсант получит «5», тогда $P(B)=0,3$.

Так как события A и B несовместные, то по формуле (1.18) получим: $P(A+B)=0,4+0,3=0,7$.

Пример 1.35. Для учебной практики 22 студентам предложили 12 мест в Москве, 6 мест – в Калуге и 4 места – в Саратове. Какова вероятность того, что два определенных студента попадут на практику в один город?

Решение. Пусть:

событие A – оба студента попали в Москву: $P(A)=\frac{C_{12}^2}{C_{22}^2}$;

испытаний равна 0,1. Произведено 400 испытаний. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не больше, чем на 0,03.

ВАРИАНТ 11

1. В мастерскую для ремонта поступило 10 часов марки "Полет". Известно, что шесть из них нуждаются в общей чистке механизма. Мастер берет первые попавшиеся 5 часов. Определить вероятность того, что двое из них нуждаются в общей чистке механизма.

2. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты – одной масти.

3. Покупатель приобрел пылесос и полотер. Вероятность того, что пылесос не выйдет из строя в течение гарантийного срока, равна 0,95, для полотера такая вероятность равна 0,94. Найти вероятность того, что хотя бы один из приборов выдержит гарантийный срок.

4. Производится стрельба по некоторой цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле равна 0,2. Стрельба прекращается при первом попадании. Найти вероятность того, что будет произведено ровно шесть выстрелов.

5. Экспедиция издательства отправила газеты в два почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в каждое отделение почты равна 0,9. Найти вероятность того, что: а) оба почтовых отделения получат газеты вовремя; б) хотя бы одно почтовое отделение не получит газеты вовремя.

6. У рыбака имеется три излюбленных места для ловли рыбы, которые он посещает с равной вероятностью каждое. Если он закидывает удочку на первом месте, рыба клюет с вероятностью p_1, на втором месте – с вероятностью p_2, на третьем – с вероятностью p_3. Известно, что рыбак, выйдя на ловлю рыбы, три раза закинул удочку, и рыба клюнула только раз. Найти вероятность того, что он удил рыбу на первом месте.

7. В трех урнах имеются белые и черные шары. В первой урне 3 белых и один черный шар, во второй – 6 белых и 4 черных, в третьей – 9 белых и один черный. Из наугад выбранной урны выбирается случайным образом шар. Найти вероятность того, что он белый.

8. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что событие наступит 120 раз в 144 испытаниях.

9. Принимая вероятность изготовления нестандартной детали,

10. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более, чем на 0,02.

ВАРИАНТ 10

1. В пруду находится 800 осетров и 500 стерлядей. Какова вероятность того, что две подряд выловленные рыбы окажутся разных видов?

2. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую, также взятую наудачу, кость домино можно приставить к первой.

3. Бросаются две монеты. Рассматриваются события: A – выпадение герба на первой монете; B – выпадение герба на второй монете. Найти вероятность события $C = A + B$. В чем состоит событие С?

4. Для некоторой местности среднее число дождливых дней в августе равно 11. Чему равна вероятность того, что первые два дня августа будут дождливыми?

5. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8; для второго и третьего орудий эти вероятности равны соответственно 0,7 и 0,9. Найти вероятность того, что: а) только один снаряд попадет в цель; б) хотя бы один снаряд попадет в цель.

6. На сборочный конвейер поступают детали с трех станков. Производительность станков различная. Первый станок дает 50% деталей, второй – 30%, третий – 20% . Если в сборку попадет деталь, сделанная на первом станке, то вероятность получения годного узла – 0,98. Для продукции II и III станков соответствующие вероятности равны 0,95 и 0,8. Определять вероятность того, что узел, сошедший с конвейера, годный.

7. В группе спортсменов 10 лыжников, 12 велосипедистов и 13 бегунов. Вероятность выполнения квалификационной нормы такова: для лыжника – 0,9; для велосипедиста – 0,8; для бегуна – 0,75. Выбранный наудачу спортсмен выполнил норму. К какой из групп, вероятнее всего, он принадлежал?

8. Вероятность хотя бы одного попадания при двух выстрелах равна 0,96. Найти вероятность трех попаданий при четырех выстрелах.

9. На некотором предприятии доля брака составляет в среднем 1%. Какова вероятность того, что в партии, состоящей из 300 изделий, окажется 4 бракованных изделия?

10. Вероятность наступления события в каждом из независимых

событие B – оба студента попали в Калугу: $P(B) = \dfrac{C_6^2}{C_{22}^2}$; событие C – оба студента попали в Саратов: $P(C) = \dfrac{C_4^2}{C_{22}^2}$.

По формуле (1.18) имеем

$$P(A+B+C) = \frac{C_{12}^2 + C_6^2 + C_4^2}{C_{22}^2} = \frac{\dfrac{12\cdot 11}{1\cdot 2} + \dfrac{6\cdot 5}{1\cdot 2} + \dfrac{4\cdot 3}{1\cdot 2}}{\dfrac{22\cdot 21}{1\cdot 2}} = \frac{174}{462} = 0,38.$$

Пример 1.36. Из колоды в 36 карт наудачу вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один валет.

Решение. События A – среди трех карт есть хотя бы один валет и $\overline{A}$ – среди трех карт нет ни одного валета являются противоположными. Применяя формулу (1.20), получим

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{32}^3}{C_{36}^3} = 1 - \frac{32\cdot 31\cdot 30}{36\cdot 35\cdot 34} = 1 - 0,6946 = 0,3053.$$

Определение 1.28. События A и B называются ***независимыми***, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло событие A или нет.

Теорема 2 (*теорема умножения вероятностей*). Вероятность произведения или совместного наступления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, при условии, что первое событие произошло:

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B) \qquad (1.21)$$

Понятие условной вероятности и правило умножения обобщаются на случаи трех и более событий. В частности, в случае трех событий A, B и C имеет место равенство:

$$P(A\cdot B\cdot C) = P(A)P(BC/A) = P(A)P(B/A)P(C/AB) \qquad (1.22)$$

Если событие B не зависит от событии A, то условная вероятность события B равна безусловной вероятности события B: ***P(B/A)=P(B)***. Аналогично, если событие A не зависит от события B, то ***P(A/B)=P(A)***.

Для ***независимых*** событий вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B). \tag{1.23}$$

Пример 1.37. Среди 100 лотерейных билетов 5 выигрышных. Найти вероятность того, что два на удачу купленных билета окажутся выигрышными (событие A).

Решение. Пусть событие A – первый билет выигрышный; B – второй билет выигрышный; $C = A\cdot B$– оба билета выигрышные. Событие B зависит от события A, поэтому по формуле (1.21) имеем

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{5}{100}\cdot\frac{4}{99}=\frac{1}{495}.$$

Пример 1.38. В первой вазе 5 желтых тюльпанов и 10 красных, а во второй 8 желтых тюльпанов и 5 красных. Из каждой вазы взяли по одному цветку. Какова вероятность того, что оба выбранных тюльпана желтые?

Решение. Рассмотрим независимые события: A – из первой вазы выбран тюльпан желтого цвета, B – из второй вазы выбран тюльпан желтого цвета. По формуле 1.23 вероятность того, что оба выбранных тюльпана желтые, равна

$$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{5}{15}\cdot\frac{8}{13}=\frac{8}{39}.$$

Теорема 3. Вероятность совместного появления n независимых событий $A_1, A_2, \ldots A_n$ равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n). \tag{1.24}$$

Теорема 4. (*теорема сложения для совместных событий*). Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \tag{1.25}$$

Пример 1.39. Производится два выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, для

ность того, что из поступивших на калибровку 1000 шариков бракованных будет не менее 40 и не более 50 штук.

ВАРИАНТ 9

1. Для дежурства на региональных выборах из отдела, в котором работает 10 инженеров, 5 техников и 3 лаборанта, должны быть выделены 5 человек. Чему равна вероятность того, что будут выделены 2 техника, один лаборант и 2 инженера?

2. Определить вероятность того, что выбранное наудачу целое число N при: а) возведении в квадрат; б) возведении в четвертую степень даст число, оканчивающееся единицей.

3. В электрическую цепь последовательно включены приборы A_1 и A_2, не взаимодействующие друг с другом. Вероятность выхода из строя прибора A_1 равна 0,1, а прибора A_2 – 0,2. Цепь выключается, если выйдет из строя хотя бы один прибор. Определить вероятность выхода из строя цепи.

4. Производится бомбардировка военного объекта. Вероятность попадания в цель при сбрасывании бомбы равна 0,7, а вероятность того, что бомба не взорвется, равна 0,06. Найти вероятность того, что объект будет разрушен, если будет брошена одна бомба.

5. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии первый сигнализатор сработает, равна 0,95; для второго сигнализатора эта вероятность равна 0,9. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

6. В первой коробке содержится 20 радиоламп, из которых 18 стандартных, во второй – 10 радиоламп, из которых 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная затем из первой коробки, будет стандартной.

7. Сборщик получает в среднем 50% деталей завода №1, 30% – завода №2; 20% – завода №3. Вероятность того, что деталь первого завода отличного качества, равна 0,7, для детали второго и третьего заводов эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Наудачу взятая сборщиком деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена заводом №1.

8. Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/6. Какова вероятность не выиграть по двум билетам из пяти?

9. На некотором предприятии доля брака составляет в среднем 1,5%. Какова вероятность того, что в партии, состоящей из 400 изделий, окажется два бракованных изделия.

случайным образом, можно с вероятностью 0,9 ожидать отсутствие бракованных?

ВАРИАНТ 8

1. Для уменьшения общего количества игр на соревнованиях 16 волейбольных команд разбили на две подгруппы (по 8 команд в каждой). Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся в разных подгруппах.

2. Пятеро друзей садятся за круглый стол. Найти вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом.

3. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что произведение выпавших очков будет четным.

4. При штамповке пластмассовых тарелок брак составляет в среднем 2% от общего числа изделий, 95% годных изделий составляет продукция первого сорта. Найти вероятность того, что взятая наудачу изготовленная тарелка окажется первого сорта.

5. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8; для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0,7 и 0,9. Найти вероятность того, что: а) только один снаряд попадет в цель; б) все три снаряда попадут в цель.

6. Два наборщика набрали по одинаковому количеству страниц текста. Вероятность того, что первый наборщик допустит ошибку, равна 0,05; для второго эта вероятность равна 0,1. При сверке текста была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошибся: а) первый наборщик; б) второй наборщик.

7. На распределительной базе находятся электрические лампочки, произведенные двумя заводами, из них 70% – первым заводом и 30% вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, произведенных первый заводом, 90 удовлетворяют стандарту, а из 100 штук, произведенных вторым заводом, 80 удовлетворяют стандарту. Определить вероятность того, что взятая наудачу с базы лампочка удовлетворяет стандарту,

8. Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 0,1. Какова вероятность, имея 4 билета, выиграть: а) по одному билету; б) хотя бы одному билету; в) не выиграть ни по одному билету.

9. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит ровно 20 раз в 100 испытаниях.

10. Установлено, что в среднем 0,5% шариков, изготовляемых для подшипников, оказывается бракованными. Определить вероят-

второго – 0,8. Найти вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина.

Решение. Пусть событие A – попадание в мишень при первом выстреле, событие B – попадание в мишень при втором выстреле. Вероятность того, что в мишени будет хотя бы одна пробоина, найдем по формуле (1.25)

$$P(A+B)=0,6+0,8-0,6\cdot 0,8=1,4-0,48=0,92\,.$$

Эту задачу можно решить, используя понятие противоположного события:

$$P(A+B)=1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=1-0,2\cdot 0,4=0,92\,.$$

Пример 1.40. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру. Определить вероятность того, что для правильного соединения ему придется звонить не более четырех раз.

Решение. Обозначим события: A_1 – абонент дозвонился с первого раза; A_2 – абонент дозвонился со второго раза; A_3 – абонент дозвонился с третьего раза; A_4 – абонент дозвонился с четвертого раза. Тогда $A=A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1A_2}A_3+\overline{A_1A_2A_3}A_4$. Так как абонент для набора правильного номера использовал не более четырех попыток, то событие A есть сумма четырех несовместных событий.

Последняя цифра номера может быть любой, от 0 до 9, одна из них верная. Поэтому $P(A_1)=\dfrac{1}{10}$, $P(\overline{A_1})=\dfrac{9}{10}$. Если первый раз набрана неверная цифра, то для угадывания остается уже 9 цифр, среди которых одна верная. Следовательно, $P\left(A_2/\overline{A_1}\right)=\dfrac{1}{9}$, $P\left(\overline{A_2}/\overline{A_1}\right)=\dfrac{8}{9}$.

Если во второй раз выбрана неверная цифра, то в распоряжении остается 8 цифр, среди которых одна верная, т.е. $P\left(A_3/\overline{A_1A_2}\right)=\dfrac{1}{8}$.

Если и в третий раз выбрана неправильная цифра, то в распоряжении остается 7 цифр, среди которых одна верная, т.е. $P\left(A_4/\overline{A_1A_2A_3}\right)=\dfrac{1}{7}$.

По формулам (1.18) и (1.22) имеем:

$$P(A)=P(A_1)+P\left(\overline{A_1}/A_2\right)+P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)+P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4\right)=$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}+\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7}=0,4.$$

1.8. Формула полной вероятности. Формула Байеса

Случайные события $A_1, A_2, \ldots A_n$ образуют полную группу событий, если в результате каждого испытания произойдет одно из них и только одно.

Пусть событие A может произойти только с одним из событий $H_1, H_2, \ldots H_n$, образующих полную группу попарно несовместных событий. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют ***гипотезами***.

Теорема 5 (*о полной вероятности*). Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии наступления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из этих гипотез на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n)$$

или

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A/H_k) \qquad (1.26)$$

Формула Байеса. Предположим, что в условиях теоремы о полной вероятности произведено одно испытание, в результате которого произошло событие A. В таком случае, вероятность гипотезы после испытания равна:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n)} \qquad (1.27)$$

Формула Байеса позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Пример 1.41. Холодильники, поступающие в магазин, изготавливаются на трех предприятиях. Первое предприятие поставляет 45% общего количества холодильников, второе – 40%, третье – 15%. Продукция первого предприятия содержит 1% брака, второго – 3%, третьего – 2%. Какова вероятность того, что купленный в магазине холодильник окажется без брака?

Решение. Пусть событие A – купленный холодильник оказался без брака. Введем следующие гипотезы:

ВАРИАНТ 7

1. Четырехтомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что тома расположены в должном порядке: справа налево или слева направо.

2. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий: A – все пассажиры выйдут на четвертом этаже; B – все пассажиры выйдут одновременно?

3. Процесс изготовления детали состоит из нескольких операций. После первой и второй операций производится контроль качества и при обнаружении брака деталь отбрасывается. Вероятность детали оказаться бракованной после первой операции равна 0,02, а после второй – 0,1. Определить вероятность того, что деталь окажется отбракованной до третьей операции.

4. Два стрелка производят в мишень по одному выстрелу. Вероятность попадания для одного стрелка, равна 0,7, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что попадут в цель: а) оба стрелка; б) только один стрелок; в) ни один из стрелков.

5. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,3, второй – 0,4, третий – 0,7, четвертый – 0,4. Найти вероятность того, что в течение часа: а) ни один станок не потребует внимания рабочего; б) хотя бы один потребует внимания рабочего.

6. На сборку поступило 3000 деталей с первого автомата и 2000 – со второго. Первый автомат дает 2% брака, второй – 3%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали.

7. В трех ящиках находятся соответственно: 1) 2 белых и 3 черных; 2) 4 белых и 3 черных; в) 6 белых и 2 черных шара. Предполагая, что извлечение шара из любого ящика равновероятно, найти вероятность того, что извлечение было произведено из первого ящика, если вынутый шар оказался белым.

8. Вероятность того, что март будет снежным, равна 0,45. Какова вероятность того, что в течение пяти лет ровно три года март будет снежный.

9. Вероятность допущения дефекта при производстве механизма равна 0,4. Случайным образом отбираются 500 механизмов. Найти вероятность того, что среди них с дефектом окажутся не менее 30 и не более 40.

10. Вероятность изготовления консервной банки с недостаточной герметизацией равна 0,002. Среди скольких банок, отобранных

ВАРИАНТ 6

1. Группа из 10 мужчин и 10 женщин делится случайно на две равные части. Найти вероятность того, что в каждой части мужчин и женщин поровну.

2. При записи фамилий членов собрания, общее число которых 360, оказалось, что начальной буквой у семи была А, у пяти – Е, у восьми – И, у девяти – О, у четырех – У, у двух – Ю, а у всех остальных фамилия начиналась с согласной буквы. Найти вероятность того, что фамилия члена данного собрания начинается с гласной.

3. Вероятность того, что на билет денежно-вещевой лотереи выпадет денежный выигрыш, равна 0,008, вещевой – 0,006. Найти вероятность того, что на один купленный билет выпадет какой-либо выигрыш.

4. В электрическую цепь последовательно включены три прибора, не взаимодействующие друг с другом. Вероятность выхода из строя одного из них равна 0,1, второго – 0,2, третьего – 0,15. Определить надежность работы электрической цепи (т. е. вероятность невыхода ее из строя), если цепь выключается, как только испортится хотя бы один прибор.

5. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены потребуется его внимание на первый станок, p_1=0,7, на второй – p_2=0,75, на третий – p_3=0,8. Найти вероятность того, что в течение смены потребуют внимания рабочего какие-либо два станка.

6. Из урны, содержащей 3 белых и 2 черных шара, переложили 2, взятые наугад, шара в урну, содержащую 4 белых и 4 черных шара. Найти вероятность того, что после этого из второй урны можно вынуть белый шар.

7. Первое орудие четырехорудийной батареи пристрелено так, что вероятность попадания равна 0,3; остальным трем орудиям соответствует вероятность попадания 0,2. Для поражения цели достаточно одного попадания. Два орудия произвели одновременно по выстрелу, в результате чего цель была поражена. Найти вероятность того, что первое орудие стреляло.

8. Вероятность выиграть по одному билету лотереи равна 1/7. Какова вероятность, имея шесть билетов, выиграть по трем билетам?

9. В цехе 9 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включено не менее трех и не более семи моторов.

10. Школа принимает в первые классы 200 детей. Найти вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика 0,515.

H_1 –купленный холодильник изготовлен первым предприятием;

H_2 –купленный холодильник изготовлен вторым предприятием;

H_3 –купленный холодильник изготовлен третьим предприятием.

Из условия задачи следует, что $P(H_1)=0,45$, $P(H_2)=0,4$, $P(H_3)=0,15$, $P(A/H_1)=0,99$, $P(A/H_3)=0,98$.

По формуле (1.26) вероятность того, что купленный холодильник окажется без брака, равна

$$P(A)=0,45\cdot 0,99+0,4\cdot 0,97+0,15\cdot 0,98=0,9805.$$

Пример 1.42. По самолету делают три выстрела. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,7, при втором – 0,8, при третьем – 0,9. Самолет может выйти из строя при одном попадании с вероятностью 0,6, при двух попаданиях с вероятностью – 0,7, при трех попаданиях – 0,8. Найти вероятность того, что самолет выйдет из строя.

Решение. Пусть событие A – самолет вышел из строя.

Гипотезами наступления этого события являются:

H_1 – произошло ровно одно попадание за три выстрела;

H_2 – произошло два попадания за три выстрела;

H_3 – произошло три попадания за три выстрела.

Тогда $H_1 = A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3$,

$$H_2 = A_1\cdot A_2\cdot\overline{A_3}+\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3+A_1\cdot\overline{A_2}\cdot A_3,$$

$$H_3 = A_1\cdot A_2\cdot A_3,$$

где A_1 – попадание при первом выстреле; A_2 – попадание при втором выстреле; A_3 – попадание при третьем выстреле.

Тогда

$$P(H_1)=0,7\cdot 0,2\cdot 0,1+0,3\cdot 0,8\cdot 0,1+0,3\cdot 0,2\cdot 0,9=0,092,$$

$$P(H_2)=0,7\cdot 0,8\cdot 0,1+0,3\cdot 0,8\cdot 0,9+0,7\cdot 0,2\cdot 0,9=0,398,$$

$$P(H_3)=0,7\cdot 0,8\cdot 0,9=0,504.$$

Условные вероятности: $P(A/H_1)=0,6$; $P(A/H_2)=0,7$; $P(A/H_3)=0,8$.

Вероятность выхода самолета из строя найдем по формуле (1.26):

$$P(A)=0,092\cdot 0,6+0,504\cdot 0,8+0,398\cdot 0,7=0,737.$$

Пример 1.43. В студенческой группе 70% – юноши. Среди студентов группы имеют сотовый телефон 20% юношей и 40% девушек. После занятий в аудитории был обнаружен кем-то забытый телефон. Какова вероятность, что его оставил юноша?

Решение. Рассмотрим событие *A* – телефон забыт в аудитории.

Введем следующие гипотезы:

H_1 – телефон принадлежал юноше;

H_2 – телефон принадлежал девушке.

По условию задачи вероятности этих событий равны $P(H_1)=0,7$ и $P(H_2)=0,3$.

Условные вероятности $P(A/H_1)=0,2$ и $P(A/H_2)=0,4$. Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A)=0,7\cdot 0,2+0,3\cdot 0,4=0,26.$$

Вероятность того, что телефон оставил юноша, найдем по формуле Байеса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)}=\frac{0,7\cdot 0,2}{0,26}=\frac{7}{13}.$$

1.9. Повторные испытания. Формула Бернулли

Определение 1.29. Независимые испытания называются ***повторными***, если одно и то же событие повторяется при одних и тех же внешних условиях.

Производится серия из *n* независимых друг от друга испытаний. Предположим, что в каждом испытании событие *A* может наступить с одной и той же вероятностью $p=P(A)$ или не наступить с вероятностью $q=1-p$. Требуется определить вероятность того, что событие *A* появится ровно k раз $(0\le k\le n)$.

Теорема 6 *(формула Бернулли).* Вероятность появления события k раз в *n* повторных испытаниях равна:

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}. \qquad (1.28)$$

роятность того, что в результате получится слово "море"?

2. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что: а) выпадет одинаковое число очков на обеих костях; б) выпадет разное число очков.

3. Вероятность покупки лотерейного билета, у которого равны суммы первых и последних трех цифр номера, равна 0,05525. Какова вероятность иметь такой билет среди двух купленных наудачу, если два билета: а) имеют последовательные номера; б) куплены независимо один от другого?

4. Пусть вероятность того, что покупателю женской обуви понадобится 37-й размер, равна 0,25. Найти вероятность того, что из четырех первых покупателей обувь этого размера: а) никому не потребуется; б) потребуется хотя бы одному.

5. В семье трое детей. События, состоящие в рождении мальчика и девочки, равновозможные. Найти вероятность того, что в этой семье: а) все мальчики, б) дети одного пола.

6. В двух ящиках имеются радиолампы. В первом ящике содержится 22 лампы, из них одна нестандартная, во втором – 10 ламп, из них две нестандартные. Из первого ящика наудачу взята одна радиолампа и переложена во второй ящик. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлеченная после этого из второго ящика, будет нестандартная.

7. Детали, изготавливаемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру, равна 0,6, а ко второму – 0,4. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролёром, равна 0,94, а вторым – 0,98. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Какова вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер?

8. Всхожесть семян ржи составляет 90%. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдет не менее трех.

9. Вероятность оплаты в кассе выписанного у продавца чека равна 0,99. Найти вероятность того, что из 100 выписанных чеков хотя бы один окажется неоплаченным.

10. Радиотелеграфная станция принимает цифровой текст. В силу наличия помех вероятность ошибочного приема любой цифры не изменяется в течение всего приема и равна 0,01. Считая приемы отдельных цифр независимыми, найти вероятность того, что в тексте, содержащем 1100 цифр, будет ровно 7 ошибок.

ВАРИАНТ 4

1. На каждые 100 деталей приходится 3% бракованных. Наугад выбирается три детали. Определить вероятность того, что среди них будет одна бракованная.

2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

3. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8; вторым – 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы один из них попал в мишень.

4. Охотник выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятность того, что он: а) попадет хотя бы раз; б) промахнется все три раза; в) попадёт два раза.

5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 выбирается наудачу одна, а из остальных – вторая. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) первый раз; б) второй раз; в) оба раза.

6. В телеателье имеется 4 кинескопа. Вероятность того, что кинескоп выдержит гарантийный срок службы, для каждого из них соответственно равна 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что взятый наудачу кинескоп выдержит гарантийный срок службы.

7. Известно, что 96% выпускаемой продукции стандартно. Упрощённая схема контроля признаёт пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98, а бракованную – с вероятностью 0,06. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее контроль, удовлетворяет стандарту.

8. Ожидается прибытие трех судов с бананами. В 1% случаев груз (бананы) портится в дороге. Найти вероятности того, что придут с испорченным грузом два судна.

9. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 500 приборов точных окажется от 410 до 430 (включительно).

10. Рыболовный траулер сдает на плавбазу 5000 банок соленой сельди. Вероятность того, что при сдаче сельди банка повреждена, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу будет сдано 5 поврежденных банок.

ВАРИАНТ 5

1. Каждая из букв м, е, р, о написана на одной из четырех карточек. Карточки перемешиваются и раскладываются наугад. Какова ве-

Эта формула, являясь частным случаем теоремы умножения, удобна для применения при небольшом количестве испытаний ($n \le 10$), потому что при больших значениях n вычисления будет сделать затруднительно.

Пример 1.44. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что из 8 выстрелов будет 5 попаданий?

Решение. По условию задачи, n=8, k=5, p=0,6, q=1-p=0,4.

Используя формулу (1.28), получим

$$P_8(5) = C_8^5 p^5 q^3 = \frac{8!}{5!\cdot 3!}\cdot 0,6^5 \cdot 0,4^3 \approx 0,28 .$$

Пример 1.45. Внутрь круга радиуса 3 брошены четыре точки. Найти вероятность того, что три точки из четырех окажутся внутри вписанного в круг квадрата.

Решение. Вероятность того, что одна точка окажется внутри квадрата, найдем по формуле геометрической вероятности (1.17):

$$p = \frac{S_{кв}}{S_{кр}} = \frac{2R^2}{p\,R^2} = \frac{2}{p}\,.$$

Вероятность того, что три точки из четырех окажутся внутри вписанного в круг квадрата, найдем по формуле Бернулли (1.28):

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{2}{p}\right)^3\cdot\left(1-\frac{2}{p}\right) = 4\cdot\frac{8}{p^3}\cdot\frac{p-2}{p} \approx 0,37\,.$$

Если в n независимых испытаниях событие A, вероятность которого в каждом испытании равна p, наступит от k_1 до k_2 раз, то вероятность будет равна

$$P_n(k_1,k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1+1) + \ldots + P_n(k_2)\,. \qquad (1.29)$$

Причем, имеет место равенство:

$$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \ldots + P_n(n) = 1\,. \qquad (1.30)$$

Пример 1.46. Вероятность попадания мячом в кольцо при одном бросании равна 0,8. Найти вероятность того, что в пяти бросаниях будет попаданий в кольцо: а) не более двух; б) не менее трех.

Решение. По условию задачи n=5, p=0,8, q=1-p=0,2.

а) Найдем вероятность того, что попаданий было не более двух:

$$P_5(k\le 2)=P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)=C_5^0\cdot 0,8^0\cdot 0,2^5+$$
$$+C_5^1\cdot 0,8\cdot 0,2^4+C_5^2\cdot 0,8^2\cdot 0,2^3=0,3+5\cdot 0,8\cdot 0,0016+$$
$$+10\cdot 0,64\cdot 0,008=0,3+0,0064+0,0512=0,3576.$$

б) События «не более двух попаданий» и «не менее трех попаданий» взаимно противоположны, поэтому $P_5(k\ge 3)=1-P_5(k\le 2)$. Это вытекает из формулы (1.30). А значит, $P_5(k\ge 3)=1-0,3576=0,6424$.

1.10. Формула Пуассона

Если число испытаний *n* велико, а вероятность появления события *A* в каждом испытании мала (p<0,01), то численная реализация формулы Бернулли становится сложной. В таких случаях можно пользоваться формулой Пуассона:

$$P_n(k)=\frac{l^k\cdot e^{-l}}{k!}\quad (\,l=np,\quad k=0,1,\ldots,n\,) \qquad (1.31)$$

Формула Пуассона применима для вычисления вероятностей событий, составляющих поток событий – последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Пример 1.47. Среди семян пшеницы имеется 0,4% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе среди 5000 семян обнаружить 8 семян сорняков?

Решение. По условию задачи p=0,004, n=5000, тогда $l=np=20$. Используя формулу Пуассона (1.31), найдем вероятность того, что из 5000 семян будет обнаружено 8 семян сорняков:

$$P_{5000}(8)=\frac{20^8\cdot e^{-20}}{8!}=0,0014\cdot$$

1.11. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

При больших значениях *n* и l решение задач по формулам Бернулли и Пуассона затруднительно. В этом случае применяют формулы Лапласа.

ВАРИАНТ 3

1. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что вытянутый им билет, содержащий два вопроса, будет состоять из подготовленных им вопросов?

2. В кармане имеется несколько монет достоинством 2 руб. и 10 руб. (на ощупь неразличимы). Известно, что двухрублевых монет втрое больше, чем десятирублевых. Наугад вынимается одна монета. Какова вероятность того, что это будет 10 рублей?

3. Из колоды в 52 карты выбираются наугад 4. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз.

4. В первом ящике 6 шаров: один белый, два красных, три синих. Во втором – 12: 2 белых, 6 красных, 4 синих. Из каждого ящика выбирается по одному шару. Какова вероятность, что среди них нет синих?

5. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность того, что в течение часа первый станок не потребует внимания рабочего, равна 0,7, второй – 0,4, третий – 0,4, четвертый – 0,3. Найти вероятность того, что в течение часа: а) ни один станок не потребует внимания рабочего; б) хотя бы один станок потребует внимания рабочего; в) только один станок потребует внимания рабочего.

6. В первом ящике содержится 20 деталей, из них 15 стандартных, во втором – 30, из них 24 стандартных, в третьем – 10, из них 6 стандартных. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь из наудачу взятого ящика окажется стандартной.

7. В конвейер поступают однотипные изделия, изготовляемые двумя рабочими. При этом первый поставляет 60%, второй – 40% общего числа изделий. Вероятность того, что изделие, изготовленное первым рабочим, окажется нестандартным, равна 0,002; вторым – 0,01. Взятое наудачу с конвейера изделие оказалось нестандартным. Определять вероятность того, что оно изготовлено: а) первым рабочим, б) вторым рабочим.

8. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из пяти первых покупателей обувь этого размера будет необходима двум.

9. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из 500 деталей бракованных будет не менее 5, но не более 10.

10. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность 100 попаданий при 320 выстрелах.

ВАРИАНТ 2

1. Подлежит контролю 250 деталей, из которых 5 нестандартных. Какова вероятность того, что из двух наудачу взятых деталей одна окажется нестандартной?

2. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность следующих событий: а) сумма выпавших очков равна 8; б) произведение выпавших очков равно 8.

3. В лотерее 100 билетов: среди них один выигрыш в 30 рублей, 3 – по 25 рублей, 6 – по 10 рублей, 15 – по 3 рубля. Покупают один билет. Найти вероятность того, что купленный билет выигрышный.

4. Вероятность того, что в течение дня произойдёт неполадка стана, равна 0,03. Какова вероятность того, что в течение четырех дней подряд не произойдёт ни одной поломки?

5. Два стрелка A и B по очереди стреляют в одну мишень. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25. Каждый стрелок имеет право произвести два выстрела. Однако стрельба прекращается, когда кто-нибудь из них попадет в мишень. Определить вероятность поражения мишени каждым стрелком в отдельности.

6. На складе готовой продукции находится пряжа, изготовленная двумя цехами фабрики, причем 20% пряжи составляет продукция цеха 2, а остальная продукция – цеха № I. Продукция цеха № I содержит 90%, а цеха № 2 – 70% пряжи первого сорта. Взятый наудачу со склада моток пряжи оказался первого сорта. Определить вероятность того, что этот моток является: а) продукцией цеха № I; б) продукцией цеха № 2.

7. Стрельба производится по пяти мишеням типа *A*, трем – типа *B*, двум – типа *C*. Вероятность попадания в мишень типа A равна 0,4; типа B – 0,1; типа C – 0,15. Найти вероятность попадания в мишень при одном выстреле, если неизвестно, в мишень какого типа он будет произведен.

8. В урне 30 шаров: 20 белых, 10 черных. Вынули подряд четыре шара, причем каждый вынутый шар возвращался в урну перед извлечением следующего. Какова вероятность того, что среди вынутых четырех шаров будет два белых?

9. Найти вероятность того, что среди 200 человек окажется четверо левшей, если в среднем левши составляют 1%.

10. В некоторой стране 10% жителей болеют туберкулезом. Определить, чему равна вероятность того, что из 900 человек окажутся больными не менее 30 и не более 110 человек.

Теорема 7 (*Локальная теорема Лапласа*). Если в каждом из *n* независимых испытаний вероятность события *A* равна одной и той же величине *p* ($0 < p < 1$), то вероятность того, что событие *A* произойдет ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) = \frac{j(x)}{\sqrt{npq}}, \qquad (1.32)$$

где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $j(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Функция $j(x)$ называется дифференциальной функцией Лапласа и ее значения можно определить по таблице 1 приложения. Функция $j(x)$ – четная, т.е. $j(-x) = j(x)$, и при значениях $x > 4$ следует брать $j(x) = 0$.

Пример 1.48. По данным технического контроля в среднем 10% изготавливаемых на заводе часов нуждаются в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что из 400 изготовленных часов 350 часов не будут нуждаться в дополнительной регулировке?

Решение. По условию задачи 90% часов не нуждаются в дополнительной регулировке, а значит $p = 0,9$, $q = 0,1$, $n = 400$, $k = 350$. Используя формулу Лапласа (1.32), найдем $j(x)$:

$x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = \frac{-10}{6} = -1,6666...$ По таблице 1 приложения, с учетом четности функции, $j(x) = 0,0989$. А значит,

$$P_{400}(350) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \cdot 0,0989 = 0,5934.$$

Функция $\Phi(x) = \int_0^x j(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ называется интегральной функцией Лапласа. Функция $\Phi(x)$ используется для вычисления приближенного значения вероятности того, что событие *A* может произойти от k_1 до k_2 раз в *n* независимых испытаниях, если вероятность наступления события *A* в каждом испытании равна *p* ($0 < p < 1$).

Теорема 8 (*интегральная теорема Лапласа*). Если в каждом из *n* независимых испытаний вероятность события *A* равна одной и той же величине *p* ($0 < p < 1$), то вероятность того, что событие *A* произойдет от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

$$P_n(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x'), \tag{1.33}$$

где $x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функции $\Phi(x)$ можно определить по таблице 2 приложения. Она является нечетной функцией, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, и для $x > 5$ следует брать $\Phi(x) = 0{,}5$.

Пример 1.49. Известно, что $\dfrac{3}{5}$ всего числа изготовляемых заводом телефонных аппаратов выпускаются первым сортом. Изготовленные аппараты расположены один возле другого случайным образом. Приемщик берет первые попавшиеся 200 штук. Чему равна вероятность того, что среди них аппаратов первого сорта окажется от 120 до 150 штук?

Решение. Из условия задачи $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $n = 200$, $k_1 = 120$, $k_2 = 150$. Найдем x'' и x':

$$x'' = \frac{150 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = \frac{30}{\sqrt{48}} = 4{,}33; \quad x' = \frac{120 - 200 \cdot 0{,}6}{\sqrt{200 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = 0.$$

По таблице 2 приложения $\Phi(x'') = \Phi(4{,}33) = 0{,}4999$, $\Phi(x') = \Phi(0) = 0$. А значит, по формуле (1.33) вероятность того, что среди 200 аппаратов окажется от 120 до 150 штук первого сорта, равна

$$P_{200}(120{,}150) = \Phi(x'') - \Phi(x') = 0{,}4999.$$

1.12. Задания для самостоятельной работы

ВАРИАНТ 1

1. Каждая из букв а, г, н, о, р, ы написана на одной из шести карточек, из которых наудачу выбирают четыре. Какова вероятность того, что в результате последовательного выбора наугад карточек получится слово "горы"?

2. Наугад указывается месяц и число некоторого невисокосного года. Какова вероятность того, что это будет воскресенье, если всего в этом году 53 воскресенья, а соответствие чисел дням недели неизвестно?

3. Пусть вероятность того, что стрелок при стрельбе по мишени выбьет 10 очков, равна 0,4; 9 – 0,2; 8 – 0,2; 7 – 0,1; 6 или меньше – 0,1. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет не менее девяти очков.

4. Участковый врач обслуживает на дому троих больных. Вероятности того, что в течение суток врач потребуется первому больному, равна 0,1, второму – 0,5, третьему – 0,3. Найти вероятность того, что в течение некоторых суток: а) ни один больной не вызовет врача; б) хотя бы один вызовет врача; в) только один больной вызовет врача.

5. Три стрелка производят по одному выстрелу по мишени, вероятности попадания в которую равны для первого стрелка 0,5, для второго – 0,7, для третьего – 0,8. Найти вероятность двух попаданий в мишень.

6. Сборщик получил три коробки деталей, заготовленных заводом №1, и две коробки деталей, изготовленных заводом №2. Вероятности того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,8, а для завода №2 – 0,9. Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. Найти вероятность того, что извлечена бракованная деталь.

7. Известно, что 98% электроламп, изготовленных заводом №1, соответствуют требуемому стандарту , 96% – заводом № 2, 99% – заводом № 3 и 95% – заводом № 4. В магазин поступило 150 ламп, изготовленных заводом № 1, 60 – заводом № 2, 40 – заводом № 3 и 50 – заводом № 4. Здесь они оказались расположенными в случайно образовавшемся порядке. Лампа, приобретенная покупателем, оказалась нестандартной. Определить вероятность того, что она изготовлена: а) на заводе № 1; б) на заводе № 2; в) на заводе № 3; г) на заводе № 4.

8. Пусть вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока из шести телевизоров не более одного потребует ремонта.

9. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдет 130, если всхожесть семян оценивается вероятностью 0,75.

10. Пусть вероятность того, что выпущенный экземпляр часов имеет точность хода в пределах стандарта, равна 0,97. Найти вероятность того, что среди имеющихся 1000 часов доля часов с точности хода и пределах нормы отклонится (по абсолютной величине) от вероятности 0,97 не более, чем на 0,02.