МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ТОБОЛЬСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

(ФИЛИАЛ) ТюмГУ

Кафедра физики, математики, информатики и методик преподавания

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | ДОПУЩЕНО К ЗАЩИТЕ В ГЭК И ПРОВЕРЕНО НА ОБЪЕМ ЗАИМСТВОВАНИЯ  Заведующий кафедрой,  канд. пед. наук, доцент  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Т.И. Кушнир  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2016г. |

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

01.03.01 Математика

профиль «Вычислительная математика и информатика»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выполнила работу  студентка 4 курса  очной формы обучения |  | Гостева  Вероника  Игоревна |
|  | подпись |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| Руководитель работы  к.ф.-м.н. |  | Валицкас Алексей  Игоревич |
|  | подпись |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Тюмень 2016

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| [**Введение**](#Введение) | **. . . . . . . . . .** |  |
| [**Глава I.**](#Глава_I) | [**Предварительные сведения**](#Глава_I) **. . . . .** |  |
|  |  |  |
|  | [**§ 1. Системы линейных уравнений**](#П_I_1) **. . .** |  |
|  |  |  |
|  | [**§ 2. Подпространства, линейные многообразия, выпуклые множества, конусы и полиэдры**](#П_I_2) **.** |  |
|  |  |  |
|  | [**§ 3. Геометрия решений системы линейных неравенств с двумя неизвестными**](#П_I_3) **. . .** |  |
|  |  |  |
| [**Глава II.**](#Глава_II) | [**Некоторые подходы к решению систем линейных неравенств**](#Глава_II) **. . . . . . . .** |  |
|  |  |  |
|  | [**§ 1. Элементарные критерии совместности и несовместности системы линейных неравенств**](#П_II_1) **.** |  |
|  |  |  |
|  | [**§ 2. Структура решений системы однородных линейных неравенств**](#П_II_2) **. . . . .** |  |
|  |  |  |
|  | [**§ 3. Строение решений системы неоднородных линейных неравенств**](#П_II_3) **. . . . .** |  |
|  |  |  |
|  | [**§ 4. Принцип граничных решений С.Н. Черникова**](#П_II_4) **.** |  |
|  |  |  |
|  | [**§ 5. Альтернативные системы линейных неравенств**](#П_II_5) **.** |  |
|  |  |  |
| [**Заключение**](#Заключение) | **. . . . . . . . . .** |  |
|  |  |  |
| [**Литература**](#Литература) | **. . . . . . . . . .** |  |

**ВВЕДЕНИЕ**

***Актуальность темы.***Системой линейных неравенств называют конечную или бесконечную систему вида

где – заданные элементы некоторого упорядоченного поля , – неизвестные, – индекс, пробегающий то или иное множество значений []. Всюду в дальнейшем для простоты будем считать – поле действительных чисел.

Современную алгебраическую теорию систем линейных неравенств можно назвать достаточно молодой: впервые математики столкнулись с задачами исследования линейных неравенств в XIX веке при описании некоторых моделей механических систем. Этим же периодом датируются простейшие результаты: так, Фурье в 20-х годах XIX века предложил метод исключения переменных для решения конечных систем, а М.В. Остроградский в своих работах по аналитической механике [] показал, что подобные неравенства хорошо описывают системы материальных точек с освобождающимися связями. Существенный вклад в теорию линейных неравенств внёс Г. Минковский, доказавший в книге “Геометрия чисел” (1896 г.) знаменитую теорему о следствиях систем линейных неравенств. П.Л. Чебышев также занимался данной проблемой в контексте задачи построения полиномов наилучшего приближения функции, заданной на отрезке. Позже идеи Чебышева стали основой для работ Е.Я. Ремеза и Кирхбергера.

Несколько другой взгляд на данную теорию берёт начало в работе [] Г.Ф. Вороного, посвященной квадратичным формам. Этот подход, который заключается в изучении выпуклых полиэдральных множеств, заданных семейством решений систем неравенств, близок к топологии и некоторым разделам функционального анализа. Он привёл к серьёзным результатам о совместности систем и геометрическом строении множества их решений.

Интерес к системам линейных неравенств особенно усилился в середине XX века в связи с появлением математической экономики и тем фактом, что многие экономические модели имеют вид систем линейных неравенств. В частности, Л.В. Канторович в работе [] изучал построение решений неравенств, решая знаменитую задачу об оптимизации массопереноса. Экономические приложения этой теории одним из первых широко осветил Д. Гейл в своей работе []. Важность проблемы решения систем линейных неравенств была окончательно осознана с развитием линейного программирования, одной из основных задач которого является нахождение экстремумов линейных функций на множестве решений систем подобного вида.

Неоценимый вклад в алгебраическую теорию решений линейных неравенств в современном её виде внёс С.Н. Черников, в монографии [] которого представлен целый ряд фундаментальных результатов, в том числе принцип граничных решений, ставший краеугольным камнем этой теории. Бургер [], Кун [], Чарнес и Купер [] в своих исследованиях развили метод С.Н. Черникова, получив новые нетривиальные результаты.

Изучение линейных систем неравенств тесно связано с геометрией: область решения таких систем представляет собой полиэдр (выпуклый многогранник, возможно неограниченный [, ]). Таким образом, с одной стороны, правомерен геометрический подход к описанию решений систем линейных неравенств, а с другой – любое продвижение в понимании алгебраической структуры решений систем неравенств расширяет геометрические представления о строении многогранных множеств.

Следует отметить, что линейные системы неравенств являются отправной точкой для исследования нелинейных систем, теория которых до сих пор не развита. Одним из подходов к этой проблеме является линеаризация нелинейных систем – аппроксимация их самих (или решений) линейными системами (или их решениями).

В связи с бурным развитием ЭВМ в конце XX в. широко развиваются вычислительные методы решения систем линейных неравенств. Эта проблематика тесно связана с прикладной теорией алгоритмов, их анализом и оптимизацией, но далека от предмета обсуждения данной дипломной работы.

***Цель работы:***изучить основы теории систем линейных неравенств и овладеть некоторыми методами решения таких систем.

Для достижения цели были сформулированы следующие ***задачи***:

* изучить литературу по теории систем линейных неравенств;
* изучить доказательства основных теорем этой теории (критерии совместности и несовместности, теорему Минковского о следствиях системы линейных неравенств и др.);
* познакомиться с принципом граничных решений С.Н Черникова;
* изучить и доказать некоторые теоремы теории альтернативных систем линейных неравенств;
* проиллюстрировать теоретические результаты примерами;
* полученные результаты изложить полно, подробно, доказательно и доступно для студентов младших курсов математических факультетов вузов.

***Структура работы.***Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, насчитывающего 19 наименований. Она занимает страницу текста, набранного на компьютере. Во введении раскрывается актуальность темы, приводятся краткие исторические сведения, формулируется цель работы и задачи, необходимые для достижения этой цели, указываются теоретическая и практическая значимость работы и личный творческий вклад автора.

Первая глава дипломной работы “Предварительные сведения” содержит вспомогательный материал по теории линейных систем уравнений (§ 1), некоторым геометрическим понятиям (§ 2), которые далее применяются в § 3 для элементарного описания области решений систем неравенств с двумя неизвестными.

Вторая глава “Некоторые подходы к решению систем линейных неравенств” – основная. В ней доказываются и иллюстрируются примерами критерии совместности и несовместности систем, теорема Минковского о следствиях системы линейных неравенств (§ 1), исследуется строение фундаментальной системы решений однородной системы неравенств (§ 2) и общего решения неоднородной системы (§ 3), в обзорном порядке излагается принцип Н.С. Черникова граничных решений (§ 4) и доказываются некоторые классические результаты теории альтернативных систем линейных неравенств (альтернативы Фредгольма, Гордана, Штимке, Вилля, Гейла, лемма Фаркаша).

Хотя в работе в основном использованы алгебраические методы, в §§ 2, 3 первой главы, в §§ 1, 5 главы II используются и геометрические подходы к работе с системами неравенств.

Все теоретические результаты, определения и понятия подкреплены необходимыми пояснениями и примерами, вычисления в которых выполнялись автором самостоятельно.

***Теоретическая и практическая значимость работы:*** дипломную работу можно использовать для самостоятельного изучения студентами изложенных вопросов, при чтении курса алгебры и спецкурсов в вузах. Почти весь материал первой главы доступен школьникам старших классов и может быть использован при проведении факультативных занятий в школе.

***Личный творческий вклад автора.*** При написании дипломной работы

* самостоятельно изучена доступная учебная и дополнительная литература по теме работы;
* разобраны доказательства всех теорем;
* подобраны и решены все примеры, иллюстрирующие основные результаты работы.

**ГЛАВА I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ**

В изложении используется литература [], [], [], [] [], [], [].

**§ 1. Системы линейных уравнений**

Теория систем линейных уравнений подробно изучается в вузовском курсе алгебры. Напомним лишь некоторые определения и результаты.

*Системой линейных уравнений c*  *неизвестными*  (СЛУ) называют конечную систему вида с *коэффициентами* и *правыми частями* .

*Решением* такой системы называется любой вектор , компоненты которого удовлетворят всем соотношениям СЛУ. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*, если же имеет решения – *совместной*. Совместная система, имеющая ровно одно решение, называется *определенной*.

C каждой системой линейных уравнений можно связать матрицы

*–*

*основную*, *расширенную и вектор правой части*. Сокращённо матрицы будем обозначать . *Векторами-строками* и *векторами-столбцами* матрицы будем называть соответственно векторы вида

*)*

Здесь – *k-*мерное арифметическое векторное пространство над полем вещественных чисел . Элементы этого пространства называем векторами и будем записывать в виде строк или столбцов.

Система называется *однородной* (ОСЛУ), если её вектор правой части нулевой, и *неоднородной* (НСЛУ) – в противном случае. Если не важно, о системе какого вида (однородной или неоднородной) идёт речь, будем говорить просто о системе линейных уравнений (СЛУ).

Как известно, множество всех решений ОСЛУ от неизвестных является подпространством арифметического векторного пространства , базисом которого служит так называемая *фундаментальная система решений* (ФСР). Количество векторов в ФСР (размерность пространства решений ОСЛУ) равно , где – ранг матрицы .

**Пример.** Найдём ФСР системы

1) Приводим расширенную матрицу к каноническому ступенчатому виду:

2) Составляем каноническую систему:

3) Решаем каноническую систему:

4) Выписываем ФСР: . Таким образом, размерность пространства решений ОСЛУ равна 2 и (как видно из формул общего решения) любое решение ОСЛУ является линейной комбинацией фундаментальных решений.

Неоднородные и однородные системы линейных уравнений тесно связаны. Каждой НСЛУ соответствует ОСЛУ с той же основной матрицей и нулевой правой частью. Если зафиксировать некоторое конкретное решение НСЛУ (*частное решение*), то её общее решение является суммой частного решения и общего решения соответствующей ОСЛУ.

**Пример.** Рассмотрим НСЛУ и её частное решение . Если найти общее решение этой системы:

то оно отличается о общего решения ОСЛУ слагаемым . Тем не менее, его можно записать в виде

Таким образом, любое решение НСЛУ можно представить в виде

.

Аналогична ситуация и в общем случае:

**Теорема (о связи общих решений НСЛУ и ОСЛУ).** *Произвольное решение НСЛУ можно записать в виде суммы любого её частного решения и линейной комбинации фундаментальных решений соответствующей ей ОСЛУ.*

**Теорема (критерий совместности Кронекера-Капелли).** *СЛУ совместна в том и только том случае, когда ранг ее основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

**Следствие.** *Всегда совместны любая ОСЛУ и система уравнений с основной матрицей ранга .*

**Примеры: 1.** Рассмотренная в предыдущем примере НСЛУ совместна, т.к. (ввиду проделанных вычислений)

т.е. .

**2.** НСЛУ несовместна, т.к.

,

т.е. **.**

СЛУ называется *определённой*, если она имеет единственное решение. Ясно, что определённая СЛУ совместна.

**Теорема (критерий определённости СЛУ).** *СЛУ является определённой тогда и только тогда, когда ранги её основной и расширенной матриц равны количеству неизвестных.*

**§ 2. Подпространства, линейные многообразия,**

**выпуклые множества, конусы и полиэдры**

Если – векторное пространство, основным полем которого всегда будет , – непустое подмножество в , то называется *подпространством пространства* , если *замкнуто относительно сложения* , *замкнуто относительно умножений на скаляры* и полученная алгебра является векторным пространством.

**Лемма (критерий подпространства).** *Пусть – непустое подмножество в . Тогда – подпространство пространства тогда и только тогда, когда .*

**Примеры: 1.** Пусть . Тогда и, очевидно, . Кроме того, для любых , верно

,

где . Таким образом, , т.е. – подпространство в .

Любой элемент можно записать как линейную комбинацию и строки линейно независимы, т.к. . Значит, – двумерное подпространство в :

**2.** Если , то , но для имеем

,

т.е. при полученный элемент не имеет вида и не может принадлежать . Таким образом, – не подпространство.

**3.** Если – произвольные векторы в , то их *линейная оболочка этой системы векторов* является подпространством.

В самом деле, линейная оболочка не пуста: каждый вектор содержится в ней, т.к.

.

Если теперь , то

Таким образом, , что и требовалось.

Пусть – векторное пространство, – его подпространство. Для фиксированного вектора множество называется *линейным многообразием* с *направляющим пространством*  *и вектором* *сдвига*  . При этом размерностью этого линейного многообразия называется размерность подпространства .

**Примеры.** **1.** В линейными многообразиями являются прямые, в – прямые и плоскости.

***O***

***U***

***M = U***

***O***

***M = U***

***U = ()***

рис. 1

**2.** Множество решений НСЛУ является линейным многообразием с направляющим пространством решений соответствующей ОСЛУ и любым частным решением в качестве вектора сдвига.

**3.** Любое подпространство является линейным многообразием с нулевым вектором сдвига и направляющим пространством .

**Лемма (о совпадении линейных многообразий).** *Пусть – векторное пространство, – произвольные векторы, – подпространства. Тогда*

**Доказательство.** *(⇒)* Пусть . Если обозначить , то . Ввиду получаем . Кроме того, .

*(⇐)* Пусть . Тогда

.

Поскольку пробегает всё пространство , то также пробегает все пространство . Таким образом, .

Линейные многообразия в размерностей 0, 1, 2 и называют *точками (векторами), прямыми, плоскостями и гиперплоскостями* соответственно.

Важным свойством пространства является наличие скалярного произведения. *Скалярным произведением* *в пространстве*  называется любая такая функция , что:

1)

*(свойство неотрицательности)*;

2)

*(свойство линейности)*;

3) *(свойство симметричности)*.

**Примеры: 1.** Формула задает скалярное произведение в , которое называется *стандартным*.

**2.** Формула тоже задает (но нестандартное) скалярное произведение в .

**3.** не будет скалярным произведением в , т.к. не выполнено свойство неотрицательности (если , то ).

Наличие скалярного произведения позволяет ввести понятия *длины* вектора из и *угла между векторами* в : по аналогии с аналитической геометрией положим

, т.е. . Теперь можно говорить о перпендикулярности векторов: и кратко записывать линейные уравнения и неравенства: если – стандартное скалярное произведение, то

**Лемма (свойства длины).** *Определённая выше* *длина вектора удовлетворяет следующим свойствам:*

|  |  |
| --- | --- |
| *неотрицательность:* | *;* |
| *однородность:* | *;* |
| *неравенство треугольника:* | *.* |

**Доказательство.** Действительно, первое свойство длины очевидно следует из свойства неотрицательности скалярного произведения.

Однородность длины: для имеем

Проверим третье условие:

,

что и требовалось.

Использованное неравенство Коши-Буняковского: докажем для полноты изложения.

**Неравенство Коши-Буняковского:** .

**Доказательство.** По свойствам скалярного произведения имеем:

Это неравенство выполнено для любых . Значит, дискриминант квадратного трёхчлена неположителен: , откуда и следует доказываемое неравенство.

Заметим, что как неравенство Коши-Буняковского, так и свойства длины доказаны лишь с использованием свойств абстрактного скалярного произведения, и справедливы в любом пространстве со скалярным произведением.

Ещё одно полезное использование скалярного произведения даёт

**Лемма (о гиперплоскостях).** *Пусть заданы фиксированный вектор и . Тогда следующее множество является гиперплоскостью в . Любая гиперплоскость в может быть описанным способом.*

**Доказательство**. Отметим сразу, что при утверждение очевидно, т.к. в этом случае – точка – нульмерная гиперплоскость. Пусть . Необходимо показать, что – линейное многообразие размерности . Кроме того, : .

Пусть вначале . Если , то для любых ввиду линейности скалярного произведения получаем

,

т.е. а потому является линейным подпространством и, следовательно, линейным многообразием. Его размерность действительно размерность быть не может, иначе совпадала бы с , что, очевидно, не так; иначе = 0, вопреки .

Пусть теперь . Тогда : действительно, для любого верно

,

т.е. и .

Обратно, для имеем и

,

а значит, и . Таким образом, .

Пусть теперь – произвольная гиперплоскость в с направляющим пространством и вектором сдвига , причём . Тогда в пространстве можно выбрать базис, состоящий из -й линейно независимой строки , где Тогда можно найти вектор , ортогональный всем им: он одновременно удовлетворяет условиям ортогональности , что равносильно ОСЛУ , т.к. скалярное произведение стандартно. Основная матрица этой системы имеет ранг , т.е. ФСР системы состоит из одного ненулевого вектора, который и можно взять в качестве .

Теперь для любого получаем

.

Полученная величина – константа, которую можно обозначить через . Тогда . На самом деле здесь выполнено равенство, поскольку оба множества – гиперплоскости размерности .

Пустьзаданы фиксированные и и гиперплоскость . Множества

называются соответственно *открытыми полупространствами*, связанными с гиперплоскостью . Аналогично множества

называются *замкнутыми полупространствами* соответственно. Далее замкнутые полупространства будем называть просто полупространствами.

Очевидно, что открытые полупространства вместе с самой гиперплоскостью образуют разбиение всего пространства , т.е.

.

Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками-векторами оно содержит и весь отрезок с концами в этих точках. Более формально, если , то , где отрезок с концами – это .

**Лемма (о выпуклости линейного многообразия)**. *Любое линейное многообразие в выпукло.*

**Доказательство.** Пусть – линейное многообразие . Тогда для любых двух векторов и произвольного получаем

,

т.к.

**Лемма (о пересечении выпуклых множеств).** *Пересечение любого семейства выпуклых множеств само выпукло.*

**Доказательство.** Пусть – произвольное семейство выпуклых множеств в (конечное или бесконечное), и – их пересечение.

Если – любые две точки, то при любом . Ввиду выпуклости, имеем

,

а потому , что и требовалось.

**Замечание:** Пересечение непустых выпуклых множеств может оказаться пустым: например, пересечение отрезков будет пустым. Но при этом пустое множество выпукло !

Следующее определение имеет большое значение в теории линейных неравенств.

*Полиэдром* или *многогранным множеством* называется пересечение конечного числа полупространств.

**Примеры:** **1.** *Любая гиперплоскость является полиэдром.*

Действительно, по лемме о гиперплоскостях, гиперплоскость совпадает с , так что – полиэдр.

**2.** Любое линейное многообразие является полиэдром.

В самом деле, пусть – линейное многообразие, – базис . Дополним этот базис до базиса всего пространства векторами . Тогда – пересечение гиперплоскости

Поэтому линейное пространство – это полиэдр. Остается отметить, что

**Лемма (о выпуклости полиэдра).** *Любой полиэдр – выпуклое множество.*

Это – непосредственное следствие о пересечении выпуклых множеств.

Полиэдр можно определить и как множество точек в , удовлетворяющих системе линейных неравенств: каждое полупространство задаётся одним из неравенств или , которые, учитывая стандартность скалярных произведений можно записать в виде или в виде . Ясно, что некоторые из таких систем не имеют решения, например не имеет решений. Поэтому некоторые полиэдры пусты.

Множество называется *конусом*, если для любого выполнено условие . Другими словами, для любого верно для .

Если при этом , то конус называется *заостренным*, в противном случае он называется *тупым*.

**Примеры: 1.** Луч является тупым конусом.

**2.** Полупространство – тоже конус, но заострённый.

**3.** Пересечение двух заострённых конусов будет заострённым конусом.

**4.** Пересечение двух непустых тупых конусов может быть пустым: например .

**5.** Конус может быть не выпуклым: на плоскости два луча с общим началом образуют конус, но он не выпуклый, если только направления лучей не совпадают или не противоположны.

В связи с многократным использованием неравенств в работе, удобно ввести следующие обозначения: записи будут означать, что все координаты вектора больше (больше или равны, меньше, меньше или равны) нуля. Аналогично будут пониматься обозначения соответственные координаты вектора больше (больше или равны, меньше, меньше или равны) соответствующих координат вектора .

Тогда, например, .

Любая линейная комбинация системы векторов с неотрицательными коэффициентаминазывается  *конической комбинацией*. *конической оболочкой* называется множество

всех конических комбинаций векторов, входящих в . Если – конечное множество из элементов, то можно считать .

**Лемма (о конической оболочке).** *Коническая оболочка системы векторов является наименьшим выпуклым конусом, содержащим множество .*

**Доказательство.** Во-первых, является конусом: если взять любой элемент , то для любого будет верно .

Во-вторых, этот конус выпуклый: если

то для любого имеем

т.к. все коэффициенты неотрицательны.

Докажем минимальность: если , где – выпуклый конус, содержащий , то . Действительно, если – коническая комбинация элементов , то (опустив все нулевые слагаемые) можно считать, что . Тогда все произведения при принадлежат , т.к. – конус. Поэтому

ввиду выпуклости . Если уже доказано, что , то

и тоже принадлежит .

Множество называется *многогранным конусом*, если является конической оболочкой конечного числа векторов: , где .

**Примеры: 1.** Полупространство

образует многогранный конус.

**2.** – конус, но не многогранный конус. Действительно, если предположить, что поскольку все координаты векторов положительны, то вокруг каждой координатной оси есть тупой конус с вершиной в начале координат, в котором нет ни одного вектора . Но тогда в нём нет и ни одного вектора из . Это неформальное рассуждение можно сделать строгим. Во первых, можно считать, что все векторы имеют единичную длину: Во-вторых, можно явно задать тупой конус, о котором идёт речь:

.

Здесь – направляющий вектор -й координатной оси (в её положительном направлении), а в конус попадают все векторы, у которых , т.е. достаточно мал. Ввиду конечности числа векторов найдётся такое , что в конусе нет ни одного вектора . Если – вектор с наименьшим углом , то

что и требовалось.

Если – произвольная система векторов, то её *выпуклой оболочкой* называется множество

**Лемма (о линейной оболочке).** *Линейная оболочка является наименьшим выпуклым множеством, содержащим .*

**Доказательство.** содержит , т.к. для любого верно .

Пусть , т.е. . Тогда при получаем:

причём , т.е. .

Докажем минимальность: если – выпуклое множество, содержащее , то . Если , то , так что для будет . Предположим, что утверждение доказано при *, … , m* и докажем его для *.* Если , то и . В случае, когда , получаем

Здесь и .

**§ 3. Геометрия решений системы линейных**

**неравенств с двумя неизвестными**

В этом параграфе рассмотрим элементарными средствами геометрическую структуру решений нескольких неравенств с двумя неизвестными. Решение будем интерпретировать как точку плоскости с координатами .

Одно неравенство вида при определяет полуплоскость. Если же , то при неравенство решений не имеет, а при решением будет любая точка плоскости.

***a = 0 = b, c > 0***

***a = 0 = b, c ≤ 0***

рис. 2**: Решения одного неравенства *ax + by ≥ c***

Пусть теперь неравенств более одного: Если все они пропорциональны, то . Поскольку неравенства остаются равносильными при умножении на положительные числа , то можно считать, что система имеет следующий вид:

***ax + by = c***

рис. 3**: Решения**

Если оба типа неравенств присутствуют, то все решения образуют прямую : , т.е. . Остальные возможности приводят к уже разобранному случаю одного неравенства.

По данной системе теперь построим *нормальную систему*. Если среди неравенств есть непропорциональные: например, и , то в случае добавим оба этих неравенства в нормальную систему. Если , но один из определителей или не нулевой, то избавимся от противоречий и неравенств-следствий. Именно, если , то при или система несовместна. Если, например, строка не нулевая, то при и эти два рассматриваемых неравенства можно заменить лишь одним из них : , которое и включим в нормальную систему. В случае система будет несовместна при , а если , второе неравенство, выполненное всегда, можно отбросить. В нормальную систему войдёт только первое неравенство. Если же , то

Оба этих неравенства запишем в нормальную систему.

**Пример:** Для построим нормальную систему.

Четвёртое неравенство заменяем на , поскольку его левая часть пропорциональна левой части первого неравенства. Пятое неравенство пропорционально второму, так что его можно отбросить. Третье неравенство можно отбросить, т.к. оно слабее шестого. Остальные неравенства оставляем и получаем следующую нормальную систему:

Ясно, что полученная нормальная система равносильна исходной. Если в ней есть непропорциональные неравенства, то соответствующая однородная система линейных уравнений имеет только нулевое решение . В противном случае этих решений бесконечно много: все они образуют прямую на плоскости, проходящую через начало координат. Например, для системы неравенств получим ОСЛУ , множество решений которой – прямая .

Если обозначить через множество решений исходной системы неравенств, через – множество решений полученной ОСЛУ, а через – множество решений соответствующей однородной системы неравенств, то, хотя вообще говоря, включения не имеют места. Например, в последнем примере не удовлетворяет неравенству . Тем не менее, эти множества, как будет показано ниже, тесно связаны.

Итак, рассмотрим нормальную систему неравенств. Если в ней есть два неравенства и с условием , то, во первых, , а во вторых, система соответствующих им линейных уравнений имеет единственное решение: . Точку в этом случае назовём *вершиной* и найдём вершины для каждой пары неравенств, отобрав среди них те, которые будут решениями всей системы неравенств: . Поскольку множество решений является полиэдром и выпукло, выпуклая оболочка содержится во множестве решений рассматриваемой системы линейных неравенств. Эта линейная оболочка представляет собой выпуклый многоугольник на плоскости с числом вершин не более , где – число неравенств после произведённого отбрасывания всех следствий.

**Пример:** Для нормальной системы вершины находятся из следующих уравнений: , , , , , , , , , , , , , , . Решая эти системы, получаем точки

,

Среди них отбираем только различные вершины, удовлетворяющие всем неравенствам системы:

***P1***

***P4***

***x***

***y***

рис. 4

.

***P6***

***P12***

Их выпуклая оболочка показана на рис. 4.

Если нормальная система не имеет ни одной вершины, то она *тривиальна*:либо содержит лишь одно неравенство, и этот случай уже рассмотрен, либо имеет вид и область её решений представляет полосу между параллельными прямыми и .

рис. 5**: область решений тривиальной нормальной системы**

.

***ax + by = c1***

***ax + by = c2***

**Теорема:** .

**Доказательство.** Во-первых, любое решение из удовлетворяет каждому неравенству , отвечающему неравенству системы, а каждое решение из – каждому неравенству системы. Поэтому каждая сумма является решением любого неравенства :

Таким образом, .

Пусть теперь . Можно отождествить с точкой выпуклого полиэдра решений – многоугольной области плоскости. Если совпадает с одной из вершин, то, очевидно, что . Проведём прямую . Она пересечёт область либо по отрезку , либо по лучу .

***S***

***P1***

***P3***

***P2***

***P***

***S***

***P2***

***P1***

рис. 6

.

***Pk***

***Pk***

***S***

***P***

Если в первом случае лежит на ребре , то для некоторых имеем и

Если в первом случае лежит на неограниченном ребре, то она лежит на луче , как и во втором случае. Поэтому рассмотрим случай луча более подробно. Если его начало *–* точка *U* и луч целиком содержится в области решений, то оказывается, что . Действительно, по правилу параллелограмма (см. рис 6) и для любой точки на луче получаем , т.е. более полно , и (поскольку – решение), , т.е.

при любом . Ввиду ограниченности величин и неограниченности это возможно только при при любых . Таким образом, и .

Значит, если , то выполнены включения Точно так же, если , то

Наконец, осталось понять, как устроено множество решений однородной нормальной системы неравенств . Во-первых, , т.е. граница области решений содержится в объединении прямых В случае системы вида решением служит вся прямая . Если же среди неравенств есть непропорциональные, то каждое неравенство определяет полуплоскость, а вместе эти два непропорциональные неравенства задают некоторый угол с вершиной в начале координат. Для разных пар непропорциональных неравенств эти углы могут быть разными. Из всех них нужно выбрать наименьший.

Если окажется, что нет ненулевых решений однородных уравнений, одновременно удовлетворяющих всем неравенствам, то = {(0;0)}.

**Пример.** Решим однородную систему

Рассматриваем непропорциональные неравенства. Решение первого неравенства найдём из уравнения : , оно удовлетворяет всем неравенствам системы при . Подставляя решение третьего уравнения во все неравенства получаем условия и , т.е. Аналогично, остальные неравенства тоже дают только нулевые решения системы.

Таким образом, рассматриваемая однородная система в качестве области решений имеет один луч .

Учитывая, что эта однородная система построена по неоднородной, решаемой ранее, можно окончательно записать её общее решение:

***P1***

***P4***

***x***

***y***

рис. 8

.

***P6***

***P12***

где

Теперь получаем полную область решений этой системы (рис. 8)

**ГЛАВА IІ. НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ**

**ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ**

В изложении материала главы использована литература:

[], [], [], [], [], [], [].

**§ 1. Элементарные критерии совместности и несовместности**

**системы линейных неравенств**

*Системой линейных неравенств* (СЛН) называют конечную систему вида где – заданные действительные числа, – неизвестные, а . В обозначениях первой главы систему линейных неравенств можно записать в виде , , и в виде , где – вектор-строка матрицы , – -я координата вектора . Далее, если не сказано иного, под векторами будут иметься в виду именно векторы-строки матрицы .

Систему линейных неравенств будем называть *однородной*, (ОСЛН) если , и *неоднородной* в противном случае. *Рангом* системы линейных неравенств называется ранг *rg(A)* матрицы . Если ранг совпадает с количеством переменных, будем говорить, что система линейных неравенств *максимального* или *полного ранга*.

**Пример:** Система линейных неравенств записывается в виде , где , . Эта система имеет ранг *2*, т.к. и . Таким образом, эта система неравенств не полного ранга.

*Решение системы линейных неравенств* – это любой вектор со свойством . Основная задача этой главы – научиться решать системы линейных неравенств. Множество всех решений СЛН обозначим символом . Если , то система линейных неравенств называется *совместной*, в противном случае – *несовместной*.

Очевидно, что в множество входят все решения СЛУ , если они есть. С геометрической точки зрения множество является полиэдром (см. § 2 главы I).

**Пример:** Система линейных неравенств имеет решение . В то же время СЛУ не имеет решений, т.к. . В первом равенстве легко убедится, вычислив определитель .

С геометрической точки зрения множество решений системы линейных неравенств устроены просто:

**Лемма (о конусе решений).** *Множество решений однородной системы линейных неравенств образует выпуклый конус.*

**Доказательство.** Действительно, если , то для любого  верно , а потому множество решений *R* действительно является конусом. Теперь его выпуклость следует из приведённых ниже вычислений для :

,

т.к. .

Пусть дана система линейных неравенств c неизвестными : . Можно считать, что действительно участвует в системе, т.е. для некоторого . Каждое неравенство в зависимости от знака перепишем в одном из следующих видов:

при

при

при .

Для этого достаточно перенести слагаемое с в соответствующую часть и разделить неравенство на соответствующий положительный коэффициент при . Таким образом, исходная система неравенств равносильна (после перестановки неравенств в ней) системе вида

,

которая равносильна системе

Если какого-либо типа неравенств с неизвестной нет, то просто перенесём свободные члены к . Например, если в системе отсутствуют неравенства вида , то получим систему

Система последних *p* неравенств всегда совместна, если – достаточно большое по модулю отрицательное число. Поэтому эти неравенства можно отбросить.

После этого с исходной системой неравенств свяжем *сопутствующую систему* с неизвестными , исключив из рассмотрения неизвестную :

Если при этом получится пустая система неравенств, то она совместна, и при желании может быть заменена на неравенство *0 ≥ 0*.

**Лемма.** *Сопутствующая система линейных неравенств от неизвестных совместна тогда и только тогда, когда совместна исходная система линейных неравенств от неизвестных .*

**Доказательство.** Для сопутствующей системы второго из указанных выше видов это очевидно. Разберём случай, когда исходная система приводит к двойным неравенствам для .

Если исходная система линейных неравенств имеет решение, то совместна приведённая выше система с двойными неравенствами для , причём левая часть каждого двойного неравенства не превосходит его правой части: , т.к. между ними расположено число , т.е. совместна сопутствующая система.

Обратно, если совместна сопутствующая система неравенств, то к любому её решению можно присоединить число со свойством , получив решение исходной системы неравенств.

Таким образом, можно последовательно исключать неизвестные из заданной системы, формируя новые сопутствующие системы неравенств, пока не получим систему от одного неизвестного, которая будет совместна тогда и только тогда, когда совместна исходная система. Это позволяет решать вопрос о совместности или несовместности данной системы линейных неравенств.

**Примеры:** **1.**

Исключаем неизвестную :

Последняя система в этой цепочке является сопутствующей для исходной системы. С ней проделываем аналогичную процедуру.

Последняя система в этой цепочке является сопутствующей для полученной выше сопутствующей системы. Поскольку она, очевидно, совместна, совместной будет и исходная система линейных неравенств.

Взяв любое конкретное решение последней системы, например, , найдём решение двойного неравенства : например, , получив решение системы, сопутствующей исходной. По нему найдём такое , что и , например, = –0,5, и получим решение исходной системы неравенств.

**2.** Здесь . Последнее неравенство (сопутствующая система для исходной) не имеет решений. Значит, исходная система несовместна.

К сожалению, описанный в этом параграфе подход к решению систем линейных неравенств не даёт способа явного в выписывания всех решений системы. Нахождению такого способа посвятим следующие параграфы.

Обратимся теперь к несовместным системам линейных неравенств. Прежде всего, одно неравенство не имеет решений тогда и только тогда, когда . Действительно, ясно, что неравенство такого вида не имеет решений. Обратно, если допустить, что в несовместном неравенстве будут коэффициенты , а все остальные коэффициенты нулевые, то, взяв достаточно большими по модулю и тех же знаков, что и числа , получим большие положительные слагаемые , сумма которых превосходит , вопреки отсутствию решений у рассматриваемого неравенства.

Значит, и ввиду несовместности, .

В общем случае имеет место

**Теорема (о несовместных системах линейных неравенств).** *Система линейных неравенств несовместна тогда и только тогда, когда некоторая линейная комбинация неравенств с неотрицательными коэффициентами несовместна. Это значит, что найдутся такие коэффициенты , что неравенство*

*несовместно, т.е. и .*

**Доказательство.** Проведём индукцию по *n*. Вначале разберём случай одного неизвестного. Если дана несовместная система , то, во-первых, среди коэффициентов есть ненулевые: иначе можно взять . Кроме того, неравенство с нулевым коэффициентом либо совместно, т.е. , и тогда его можно отбросить, либо несовместно, и тогда его можно взять с коэффициентом , а остальные неравенства – с нулевыми коэффициентами и получить несовместное неравенство. Поэтому можно считать, что неравенств с нулевыми коэффициентами в системе нет. Во-вторых, среди коэффициентов есть как положительные, так и отрицательные: если, например, все они отрицательны, то при , найдём решение системы. Наконец, если (после перестановки неравенств) коэффициенты положительны, а числа отрицательны, то система неравенств записывается в виде

,

причём (переставив неравенства)  . Ввиду несовместности системы, неравенство не имеет решений, т.е. выполнено условие . Поэтому линейная комбинация первого и последнего неравенств с коэффициентами и соответственно несовместна (остальные неравенства участвуют с нулевыми множителями), что и требовалось.

Если теперь дана несовместная система линейных неравенств с *n* неизвестными, то несовместна и сопутствующая ей система с *n–1* неизвестной, т.е. есть несовместная линейная комбинация её неравенств с неотрицательными коэффициентами. Можно считать, что сопутствующая система получилась из двойных неравенств для (в противном случае, она – часть исходной системы неравенств, так что сразу получаем нужную несовместную линейную комбинацию исходных неравенств).

Далее, каждое неравенство сопутствующей системы является комбинацией неравенств исходной системы. Действительно, либо это неравенство входит в исходную систему (когда оно имеет вид ), либо имеет вид и является суммой неравенств отличающихся от соответствующих исходных неравенств только положительными множителями. Поэтому противоречивое неравенство является линейной комбинацией с неотрицательными коэффициентами неравенств исходной системы.

**Примеры: 1.** Несовместная система из прошлого примера подтверждает доказанную теорему: сумма её неравенств даёт несовместное неравенство: *(x – y) + (–x + y) ≥ 1 ⇔ 0 ≥ 1*.

**2.** Система не имеет решений, т.к. неотрицательная линейная комбинация её неравенств

несовместна.

**Следствие (теорема Минковского о следствиях системы линейных неравенств).** *Неравенство является следствием совместной однородной системы неравенств (т.е. каждое решение системы будет решением и этого неравенства) тогда и только тогда, когда его левая часть является неотрицательной линейной комбинацией некоторых левых частей неравенств системы и та же линейная комбинация правых частей системы не меньше b:*

**Доказательство.** Достаточность очевидна: если

,

с неотрицательными коэффициентами , то любое решение системы удовлетворяет неравенствам

,

а значит

Обратно, пусть неравенство является следствием рассматриваемой системы неравенств. Тогда система линейных неравенств несовместна для любого . Поэтому для некоторых будет

Здесь : иначе несовместна исходная система неравенств, так что

с неотрицательными коэффициентами . Интуитивно ясно, что ввиду произвольности искомая линейная комбинация найдётся. Однако строгое доказательство требует довольно длинных рассуждений. Закончим доказательство по-другому, использовав доказанный факт, что при некоторых .

Однородное неравенство будет следствием однородной системы неравенств от неизвестного: действительно, если – решение этой системы, то при получим и значит, . В случае решение системы тоже будет удовлетворять неравенству ввиду доказанного выше соотношения

Итак, является следствием системы неравенств , т.е. несовместна система , что означает наличие со свойствами

Поэтому и при некоторых . Это значит, что

**§ 2. Структура решений системы однородных линейных неравенств**

По аналогии с решением систем линейных уравнений введём следующее определение: *фундаментальной системой решений (ФСР) для однородной системы линейных неравенств*  называетсятакой конечный набор её решений, что любое её решение можно записать в виде *неотрицательной линейной комбинации*  *(*т.е. *)* этих решений.

**Теорема (о ФСР для одного неравенства).** *Система из одного неравенства обладает следующей ФСР:*

**Доказательство.** Легко понять, что каждый вектор *Xi* является решением однородного уравнения *,* как и  *–* линейная комбинация этих решений. Таким образом, указанные векторы являются решениями рассматриваемого однородного неравенства. Подставив вектор в неравенство, получим *1 > 0*. Значит, все перечисленные векторы являются решениями рассматриваемого неравенства.

Если  *–* любое решение этого неравенства, то значение . В случае , то решение можно записать в виде неотрицательной линейной комбинации векторов Действительно, выберем Тогда

.

Эта линейная комбинация неотрицательна, т.к.

В случае же вектор является решением однородного уравнения: и будет неотрицательной линейной комбинацией векторов , а вектор  *–* неотрицательной линейной комбинацией векторов , что и требовалось.

Теперь построим ФСР для произвольной системы линейных неравенств. Идея построения состоит в том, что к одному начальному неравенству, ФСР которого уже известна, будем последовательно присоединять по одному неравенству, расширяя построенную ФСР до ФСР большей системы.

**Лемма (о расширении ФСР).** *Пусть есть система линейных неравенств с ФСР . Тогда ФСР расширенной системы неравенств может быть получена, например, следующим образом:*

*а) подставляя векторы ФСР в добавленное неравенство , разделим их на группы: – те из них, которые после подстановки дают положительное значение; – те из них, которые после подстановки дают отрицательное значение; и, наконец, – удовлетворяющие линейному уравнению .*

*б) для каждой пары векторов вычислим новый вектор , который является положительной линейной комбинацией векторов и удовлетворяет уравнению .*

*в) система из s + p + st векторов является ФСР для расширенной системы неравенств.*

**Доказательство.** Во-первых, все векторы удовлетворяют расширенной системе: обращают последнее неравенство в строгое , а удовлетворяют уравнению . Это ясно по построению системы , а для следует из линейности , т.к.

Во-вторых, каждое решение рассматриваемой расширенной системы неравенств является неотрицательной линейной комбинацией построенного множества векторов. Действительно, поскольку – решение первых *m* неравенств, оно является неотрицательной линейной комбинацией ФСР этой системы:

,

где

Если , то всё доказано. В противном случае среди первых *s* слагаемых есть ненулевые, т.к. иначе было бы

,

что невозможно. Поэтому в рассматриваемой линейной комбинации есть слагаемое с положительными коэффициентами. Оказывается, что такая комбинация записывается в виде неотрицательной линейной комбинации либо векторов, либо векторов *.* В самом деле,

при . Если же , то

,

причём =

После этого замечания можно заменить неотрицательную линейную комбинацию в исходном представлении решения на одну из неотрицательных линейных комбинаций или . При этом уменьшится (по крайней мере, на 1) число ненулевых коэффициентов . Таким образом, через несколько замен исчезнут все слагаемые , что и требовалось.

Итак, доказана следующая теорема:

**Теорема (о ФСР однородной системы неравенств).** *Произвольная однородная система линейных неравенств имеет конечную ФСР, которая может быть найдена описанным в лемме способом.*

**Примеры:** **1.** Найдём ФСР системы линейных неравенств

В данном случае число неизвестных больше числа неравенств, равного рангу системы: *= –1 – 2 + 1 – 4 = –6 ≠ 0*. В подобных случаях можно вычислить обратную матрицу

и сделать замену неизвестных:

где *u, v, w > 0, t ∈* ***R***. Поэтому в качестве ФСР можно взять

Действительно, любое решение записывается в виде

,

где  *–* знак .

**2.** Найдём стандартным способом ФСР системы линейных неравенств

1. Выписываем ФСР для первого неравенства:

2. Подставляем решения в :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** | **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** |
| *X1 = (1; 0; 0; –1)* | 3 |  | *X3 = (0; 0; 1; –1)* | 0 |  |
| *X2 = (0; 1; 0; 2)* | –1 |  | *X4 = (–1; –1; –1; 0)* | –2 |  |
| *X5 = (0; 0; 0; 1)* | *–1* |  |

3. Строим дополнительные решения :

.

Таким образом, получена ФСР для первых двух неравенств:

.

Здесь заменены (для экономии обозначений) на .

С полученной ФСР поступаем, как и выше, расширяя её до ФСР системы первых трёх уравнений:

2. Подставляем решения в :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** | **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** |
| *X1 = (1; 0; 0; –1)* | –3 |  | *X3 = (0; 0; 1; –1)* | –3 |  |
| *X2 = (1; 3; 0; 5)* | 9 |  | *X4 = (–1; –3; –3; –2)* | 0 |  |
| *X5 = (1; 0; 0; 2)* | *3* |  |

3. Строим дополнительные решения :

Таким образом, построена ФСР

для системы первых трёх линейных неравенств. Ясно, что векторы *Xi* можно умножить (или разделить) на любое положительное число.Поэтому ФСР удобнее преобразовать к виду:

.

Наконец, как и выше, преобразуем эту ФСР до ФСР всей системы.

2. Подставляем решения в :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** | **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** |
| *X1 = (1; 3; 0; 5)* | *7* |  | *X4 = (4; 3; 0; 2)* | *1* |  |
| *X2 = (1; 0; 0; 2)* | *4* |  | *X5 = (1; 3; 3; 2)* | *4* |  |
| *X3 = (–1; –3; –3; –2)* | *–4* |  | *X6 = (2; 0; 0; 1)* | *2* |  |
| *X7 = (1; 0; 1; 1)* | *3* |  |

3. Строим дополнительные решения :

Итак, построена ФСР исходной системы:

Любое решение *X* заданной неравенств системы можно записать в виде линейной комбинации найденных фундаментальных решений с неотрицательными коэффициентами:

.

**§ 3. Строение решений системы неоднородных линейных неравенств**

Если общей системы линейных неравенств с ненулевой правой частью можно свести к решению однородной системы с *n+1* неизвестным. Действительно, рассмотрим однородную линейную систему . Ясно, что каждое решение неоднородной системы распространяется значением *t = 1* до решения однородной системы. Обратно, каждое решение однородной системы c ограничением *t > 0* определяет решение неоднородной системы . Поэтому справедлива следующая

**Теорема (о строении решений неоднородной системы).** *Для нахождения всех решений системы достаточно составить однородную систему , найти её ФСР и общее решение , где . Тогда общее решение исходной неоднородной системы может быть записано в виде , где .*

**Пример:** Решим систему .

Вначале решим однородную систему линейных неравенств

1. Строим ФСР для первого неравенства :

2. Подставляем решения в :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** | **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** |
| *(2; 0; 0; 1)* | *5* |  | *(–2; –1; –2; –1)* | *–2* |  |
| *(0; 1; 0;–1)* | *–2* |  | *(0; 0; 0; –1)* | *–1* |  |
| *(0; 0; 2; 1)* | *–1* |  |  |  |  |

3. Строим дополнительные решения :

,

,

Получили ФСР для первых двух неравенств (векторы с точностью до пропорциональности):

*X1 = (2; 0; 0; 1), X2 = (4; 5; 0; –3), X3 = (1; 0; 5; 3);*

*X4 = (–6; –5; –10; –3), X5 = (1; 0; 0; –2)*.

С полученной ФСР поступаем, как и выше, расширяя её до ФСР системы из первых трёх уравнений:

2. Подставляем решения в :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** | **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** |
| *(2; 0; 0; 1)* | *–13* |  | *(–6; –5; –10; –3)* | *9* |  |
| *(4; 5; 0; –3)* | *–11* |  | *(1; 0; 0; –2)* | *1* |  |
| *(1; 0; 5; 3)* | *1* |  |  |  |  |

3. Строим дополнительные решения :

Построена ФСР (векторы с точностью до множителей) для первых трёх неравенств системы:

Наконец, преобразуем её до ФСР всей системы:

2. Подставляем решения в :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** | **Решение *Х*** |  | **Тип**  **решения** |
| *(1; 0; 5;3)* | *3* |  | *(3; 1; 11; 6)* | *6* |  |
| *(–6; –5; –10; –3)* | *–3* |  | *(–12; –13; –26; –6)* | *–6* |  |
| *(1; 0; 0; –2)* | *–2* |  | *(–3; –1; –11; –6)* | *–6* |  |
| *(3; 0; 13; 8)* | *8* |  | *(3; 0; 0; –5)* | *–5* |  |
| *(3; 1; 0; –5)* | *–5* |  |

3. Строим дополнительные решения :

Итак, построена ФСР однородной системы неравенств

:

*X1 = (1; 0; 5; 3), X2 = (3; 0; 13; 8), X3 = (3; 1; 11; 6),*

*X4 = (–1; –1; –1; 0), X5 = (1; 0; 2; 0), X6 = (14; 3; 25; 0),*

*X7 = (–10; –13; –16; 0), X8 = (14; 0; 25; 0),*

*X9 = (–39; –40; –41; 0), X10 = (7; 0; 13; 0), X11 = (39; 8; 65; 0),*

*X12 = (–6; –8; –1; 0), X13 = (–3; –4; –5; 0), X14 = (3; 0; 5; 0),*

*X15 = (6; 1; 11; 0), X16 = (3; 1; 5; 0), X17 = (33; 5; 55; 0)*.

Теперь каждое решение исходной неоднородной системы можно представить в виде: , где , – последняя компонента решения, а строка состоит из его первых трёх компонент, . На самом деле, как видно из ФСР, почти все компоненты нулевые, так что в знаменателе стоит выражение , где .

**Замечание.** **1.** Найденную ФСР можно упростить, т.к. её решения зависимы. Например, видно, что верно равенство , т.е. имеем решение . С его помощью можно исключить некоторые векторы из ФСР:

**2.** Полученный общий вид решений неоднородной системы линейных неравенств использует операцию деления. Оказывается, что верна

**Теорема ([15]).** *Если система неравенств* *совместна, то её общее решение имеет вид*

*где – некоторые решения, вычисляемые по данной системе неравенств; – неотрицательные числа, , – произвольные вещественные числа; – произвольные неотрицательные числа.*

Таким образом, решение неоднородной системы линейных неравенств можно записать в более привычном виде. Доказательство основано на результатах С.Н. Черникова ([17]), к изложению которых и переходим.

**§ 4. Принцип граничных решений С.Н. Черникова**

Предварительно рассмотрим некоторые необходимые определения.

Для системы линейных неравенств и её фиксированного решения введем обозначения:

,

Множество отмечает все неравенства системы, которые данное решение превращает в верное равенство, а множество – те неравенства системы, которые данное решение оставляет строгими неравенствами. С точки зрения геометрии, решение , для которого лежит на границе полиэдра решений, и поэтому называется *граничным решением системы линейных неравенств* .

**Пример:** Решение системы линейных неравенств определяет множества , т.к. . Таким образом, рассматриваемое решение является граничным.

Решение не является граничным, поскольку все неравенства системы оно превращает в строгие.

Граничное решение называется *граничным решением с максимальным набором активных ограничений*, если его множество является максимальным по включению: для любого решения со свойством верно .

Граничное решение называется *решением с минимальным набором активных ограничений*, если его множество является наименьшим по включению: для любого верно .

**Пример:** Граничное решение системы линейных неравенств не будет решением с максимальным набором активных ограничений. Действительно, если  *–* решение со свойством , то , т.е. и , т.е. . Таким образом, решение имеет множество

.

Это решение не будет и решением с минимальным набором активных ограничений: например, решение имеет .

Пусть ранг системы равен . Граничное решение называется *узловым*, если найдутся линейно независимые строки матрицы , для которых .

Так, например, граничное решение из предыдущего примера не является узловым: множество соответствует одному третьему неравенству, а решение приводит к множеству и является узловым: первая и третья строки матрицы *A* линейно независимы.

Подсистема системы называется *крайней*, если выполнено два условия: (i) ее ранг совпадает с количеством неравенств в ней; (ii) хотя бы одно ее узловое решение удовлетворяет всей системе.

Подсистема системы называется *узловой*, если выполнено два условия: (i) подсистема является крайней; (ii) все ее узловые решения удовлетворяют всей системе.

**Пример:** Рассмотрим некоторые подсистемы в СЛН .

Подсистема будет крайней: она ранга *1* и ее узловое решение *(2; 0; –1)* удовлетворяет всей системе неравенств. Она не является крайней: узловое решение *(0; 0; 1)* не удовлетворяет всей системе.

Подсистема тоже крайняя: ее ранг *2* и узловое решение *(1; –1; –1)* удовлетворяет всей системе. Эта подсистема узловая: любое ее узловое решение *(x; y; z)* удовлетворяет СЛУ , т.е. *x = z + 2* и *y = 0,5⋅(2⋅z + 1)*, а значит, имеет вид *(z + 2; z + 0,5; z)* и удовлетворяет оставшемуся неравенству: *2⋅(z + 2)–(z + 0,5) – z = 4 – 0,5 > 0*.

Подсистема не крайняя: хотя и имеет ранг *2*, но узловое решение является решением СЛУ , т.е. имеет вид и не удовлетворяет оставшемуся неравенству

.

Пусть, как и ранее, задана совместная система линейных неравенств , , все строки ненулевые, . Перед изложением самого принципа сформулируем несколько утверждений.

**Лемма (о крайней подсистеме).** *У совместной системы линейных неравенств есть крайняя подсистема.*

**Доказательство.** Действительно, пусть Положим Далее, для всех рассмотрим

Поскольку , найдётся хотя бы одна строка со свойством , т.е. набор всех таких векторов-строк , что для не пуст*.* Тогда и

.

Из непрерывности скалярного произведения и теоремы Коши о промежуточном значении, для каждого найдём со свойствами . Положим . Тогда для любого *l = 1, ... , k*

.

Ввиду получаем

а потому . Для всех остальных неравенств системы будет .

Отсюда следует, что подсистема из одного уравнения , где – номер неравенства, для которого является крайним решением, является крайней для рассматриваемой системы.

Оказывается ([1, глава I]), что справедливы следующие

**Лемма (о расширении крайних подсистем).** *Если ранг крайней подсистемы совместной системы меньше ранга самой системы, то найдется другая крайняя подсистема, содержащая данную, с большим числом неравенств в ней.*

**Лемма (об узловой подсистеме).** *Крайняя подсистема совместной системы является узловой тогда и только тогда, когда ее ранг совпадает с рангом исходной системы.*

Теперь можно перейти к одному из основных результатов теории систем линейных неравенств, а именно – принципу граничных решений С.Н. Черникова.

**Теорема (принцип граничных решений С.Н. Черникова).** *Каждая совместная система линейных неравенств имеет хотя бы одну узловую подсистему.*

**Доказательство.** Предыдущие три леммы дают возможность сконструировать такую подсистему: во-первых, лемма о крайних подсистемах позволяет выбрать крайнюю подсистему ранга не менее *1*; лемма о расширении крайних подсистем позволяет добавлять неравенства в крайнюю подсистему до тех пор, пока её ранг не станет равным рангу исходной системы. Полученная крайняя подсистема, по лемме об узловой подсистеме будет узловой для системы.

Из этой теоремы, очевидно, следует

**Следствие (критерий С.Н. Черникова совместности системы линейных неравенств).** *Система линейных неравенств совместна в том и только том случае, когда у неё есть хотя бы одна узловая подсистема.*

По-простому принцип граничных решений С.Н. Черникова можно сформулировать так:

**Теорема (принцип граничных решений С.Н. Черникова).** *Если система линейных неравенств совместна и имеет ранг r > 0, то найдутся такие r линейно независимых неравенств , что все решения соответствующей системы линейных уравнений будут решениями исходной системы линейных неравенств.*

С использованием этого принципа С.Н. Черниковым доказана следующая

**Теорема (критерий Черникова [17, глава I, § 4]).** *Система линейных неравенств ранга совместна тогда и только тогда, когда среди миноров порядка её основной матрицы найдётся некоторый ненулевой минор , что при окаймлении его любой строкой основной матрицы и столбцом правой части получается минор со свойством .*

Эта теорема обобщает соответствующую теорему для систем линейных уравнений (неравенство заменяется на равенство).

**Пример.** Система линейных неравенств совместна, т.к. имеет решение . Рассмотрим -миноры её расширенной матрицы . Легко увидеть, что минор – базисный: окаймляющие его миноры третьего порядка (в основной матрице) нулевые:

При окаймлении минора первой строкой и столбцом свободных членов получаем и .

**2.** Система неравенств несовместна, т.к. из первых двух неравенств следует , что возможно при , вопреки третьему неравенству. Ранг основной матрицы равен 2: минор – базисный. Рассмотрим -миноры её расширенной матрицы . У ненулевых -миноров нет окаймлений со свойством критерия Черникова: .

(дополнительная строка при окаймлении ставится последней !).

В заключение параграфа приведём вычислительную схему решения системы неравенств по методу С.Н. Черникова.

Прежде всего, заметим, что, имея систему ранга *r*, можно (переставляя строки и перенумеровывая неизвестные), считать, что левый верхний *r×r* минор её матрицы отличен от нуля, т.е. , где матрица *A11* обратима, . Сделаем, как и ранее, замену переменных . Тогда

т.к. ввиду .

Таким образом, решение системы линейных неравенств свелось к решению меньшей системы с неотрицательными неизвестными .

**Пример.** Ранг системы равен 2:

.

Сделаем замену переменных:

.

Поэтому можно искать только неотрицательные решения систем.

Пусть дана система линейных неравенств и нужно найти все её неотрицательные решения.

1) Составим таблицу , где .

Схема алгоритма похожа на описанное в § 2 построение ФСР путём последовательной модификации построенных таблиц.

2) Если все элементы какого-либо столбца неотрицательны (столбец *неотрицателен*), то заменяем их нулями. Соответствующее неравенство можно просто отбросить, т.к. оно всегда выполнено при неотрицательных неизвестных.

3) Выбираем основной столбец таблицы : можно взять любой столбец с хотя бы одним отрицательным элементом. Если таких столбцов нет, то таблица не существует.

4) Если – основной столбец , то в таблицу сначала переписываются строки, пересекающиеся с ним по неотрицательным элементам.

5) Другие строки получаются комбинированием *допустимых пар строк*  таблицы (аналог вычисления при построении ФСР). Пара строк таблицы называется допустимой, если они пересекают основной столбец по ненулевым элементам противоположных знаков. Если таблица содержит более двух строк и есть столбцы матрицы , пересекающие по нулевым элементам обе строки допустимой пары, но не существует никакой другой строки в , пересекающей по нулевым элементам все столбцы указанного вида, то допустимую пару строк назовём *уравновешенной.* В таблице любая допустимая пара строк считается уравновешенной.

*Строкой равновесия* уравновешенной допустимой пары строк назовём линейную комбинацию этих строк с положительными коэффициентами, которая пересекается с основным столбцом по нулевому элементу. Строки равновесия всех уравновешенных допустимых пар вносятся в таблицу .

6) Все ненулевые элементы столбца из на месте основного столбца таблицы заполняются числом *+1*, а все элементы других неотрицательных столбцов – нулями. На этом заканчивается составление таблицы .

7) На следующих переходах от таблиц к таблицам меняется

* во-первых, понятие уравновешенных допустимых пар: для таблицы с числом строк больше двух, уравновешенной называется любая допустимая пара, для которой в , дополненной столбцами, возникшими на местах основных столбцов , таблиц , существуют столбцы, пересекающие обе строки этой пары по нулевым элементам, но не существует ни одной другой строки таблицы , пересекающей по нулям все столбцы описанного рода. Для таблицы с двумя строками, составляющими допустимую пару, эта пара строк считается уравновешенной.
* во-вторых, элементом *+1* заменяются не только ненулевые элементы столбца-наследника основного столбца таблицы , но и все ненулевые элементы столбцов-наследников столбцов предыдущих таблиц. Нулями же заменяются лишь элементы остальных неотрицательных столбцов правой части .

8) Через конечное число шагов этот алгоритм приведёт к таблице, в правой части которой либо все столбцы неотрицательны, либо хотя бы один столбец строго отрицателен (т.е. отрицательны все его элементы). В первом случае невозможно выбрать основной столбец, а во втором – выбирая строго отрицательный столбец в качестве основного, тоже не сможем построить следующую таблицу.

В первом из этих тупиковых случаев строки левой части последней таблицы образуют ФСР. Во втором случае неотрицательных решений система не имеет.

**Пример:** Найдём ФСР системы линейных неравенств с неотрицательными решениями:

Процесс преобразования таблиц следующий (основные столбцы выделены жирным):

Процесс завершён из-за невозможности выбрать неположительный столбец. Сокращая полученные векторы ФСР на подходящие множители, получим:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

**§ 5. Альтернативные системы линейных неравенств**

Одним из фундаментальных фактов для теории математического моделирования и оптимизации являются теоремы об альтернативных системах линейных неравенств. Существуют разные варианты формулировок этих теорем. Многие из них имеют такой вид: каждой системе линейных неравенств можно поставить в соответствие (по некоторым обсуждаемым далее правилам) альтернативную систему линейных неравенств. Альтернативность состоит в том, что одна и только одна из этих двух систем будет иметь решение, а вторая обязательно будет иметь противоречивые условия. При этом имеет место симметрия систем: альтернативная к альтернативной совпадает с исходной. Поскольку указанная конструкция может применяться к разным типам систем линейных неравенств, то существует много внешне сильно различающихся математических формулировок теорем, ряд которых будет приведен в данной главе. Иногда все эти теоремы обобщенно называют теоремой или леммой Фаркаша, по фамилии венгерского математика, опубликовавшего в 1902 г. работу по альтернативным системам линейных неравенств. Иногда теоремой Фаркаша называют только одну из формулировок (приводимую ниже) утверждений об альтернативных системах линейных неравенств, непосредственно рассматривавшуюся им. Другие варианты теорем об альтернативных системах линейных неравенств связывают с именами других математиков (имена которых указываются).

**Теорема (основная).** *Для любой -матрицы существуют такие векторы , что*

*.*

*Здесь последнее неравенство означает, что все компоненты вектора в круглых скобках положительные, т.е. .*

**Доказательство.** Доказательство проведём в несколько этапов.

1. Если , то , а значит, . Учитывая, что получаем, что для любого либо -я компонента вектора , либо -я компонента вектора будут нулевыми.

2. Для любого либо найдётся вектор с положительной -й компонентой и свойством , либо найдётся вектор с ненулевой -й компонентой. Действительно, если -я строка матрицы нулевая, т.е. нулевой -й столбец в матрице , то годится вектор с единицей на -м месте и нулями на остальных. Если же -я строка матрицы ненулевая (), то возьмём вектор c -й компонентой и нулями на остальных местах.

3. По пункту 1 доказательства для каждого вектор с ненулевой -й компонентой есть либо среди векторов со свойством , либо же – среди векторов . Соответственно обозначим эти векторы или , считая и в случае, если соответствующего вектора для данного не существует. Рассмотрим векторы и Тогда , т.к. для любого положительна либо -я компонента вектора , либо -я компонента вектора .

На основе этой теоремы можно доказать приводимые ниже результаты. Наиболее ранним из известных утверждений об альтернативных неравенствах является теорема Гордона, доказанная в 1873 г.

**Теорема (Гордана).** *Либо существует такой вектор , что , либо существует такой вектор , что*

**Доказательство.** Если любое неотрицательное решение системы уравнений является нулевым, то по предыдущей теореме получим .

Обе альтернативы не могут выполняться одновременно ввиду соотношения : если , то и .

Следующая теорема является симметричным аналогом теоремы Гордана, где исходное и ортогональное исходному подпространства заданы соответственно как область значений матрицы и как множество решений однородной системы линейных уравнений с матрицей .

**Теорема (Штимке).** *Либо существует такой вектор , что , либо существует вектор со свойствами*

**Доказательство.** По основной теореме найдутся такие векторы и , что и . Либо , либо (при ) , что и требовалось.

Обе альтернативы не реализуются одновременно, т.к. , и в случае сразу .

**Теорема (Вилля).** *Либо существует такой вектор , что , либо существует такой вектор , что*

**Доказательство.** Применим альтернативу Штимке к матрице , где – единичная -матрица. Тогда

Поэтому либо существует со свойствами теоремы, либо найдётсятакой , что выполнены условия т.е. . Последнее означает, что , что и требовалось.

Теперь рассмотрим несколько альтернатив для неоднородных систем линейных уравнений и неравенств.

**Теорема (альтернатива Фредгольма).** *Либо для некоторого вектора совместна система , либо найдётся вектор , для которого*

**Доказательство.** Следует из критерия несовместности систем линейных уравнений: Теперь либо система совместна, либо для , что и требовалось.

**Теорема (лемма Фаркаша).** *Либо для некоторого совместна система , либо разрешима система*

**Доказательство.** Прежде всего, преобразуем систему при . Если некоторый столбец матрицы является неотрицательной линейной комбинацией других столбцов, то совершим соответствующее элементарное преобразование столбцов, обнулив рассматриваемый столбец матрицы : если это последний столбец (а этого всегда можно добиться перенумеровав компоненты вектора ), то

.

Таким образом, не нарушая неотрицательности вектора , преобразуем систему к виду , где , где ни один столбец матрицы не выражается через остальные с помощью неотрицательной линейной комбинации.

Если , то лемма Фаркаша, очевидно, верна: система всегда разрешима, а альтернативное условие никогда не выполняется.

При по теореме Гордана для системы , : либо эта система разрешима, либо найдётся такой вектор, что, т.е. . Но разрешимость системы при сделанных ограничениях для матрицы означает , т.е. приводит к равенству – совместности исходной системы.

Обе альтернативы не могут реализоваться одновременно: в самом деле, с одной стороны, , а с другой – и

Лемма Фаркаша имеет ясный геометрический смысл, показывающий общий принцип “работы” теорем об альтернативах: если система несовместна, т.е. вектор не является линейной комбинацией столбцов матрицы с неотрицательными коэффициентами, то существует такая проходящая через нуль гиперплоскость в пространстве , что векторы-столбцы матрицы оказываются в положительном полупространстве, образованном этой гиперплоскостью , а – строго в отрицательном полупространстве.

. . .

рис. 9

**Теорема (Гейла).** *Либо найдётся такой вектор , что , либо существует вектор со свойствами*

**Доказательство.** Это – другая форма критерия несовместности системы линейных неравенств: система несовместна тогда и только тогда, когда некоторая неотрицательная линейная комбинация её строк нулевая, а соответствующая линейная комбинация элементов вектора положительна: Транспонируя эти соотношения придём к требуемым условиям при .

Обе альтернативы не выполняются одновременно, т.к.

Таким образом, можно сформулировать следующие правила формирования альтернативной системы к данной системе неоднородных линейных неравенств.

Сначала исходную систему преобразуем путем введения дополнительных переменных к виду

,

т.е. у преобразованной системы ограничения на линейные комбинации переменных будут иметь вид системы однородных (с нулевым вектором в правой части) линейных уравнений. Все переменные ограничены условием неотрицательности, а одна из переменных имеет фиксированное единичное значение. Это переменная при фиксированном векторе исходной системы неравенств. Из полученной системы указанного выше вида с расширенным составом переменных и некоторой специфической матрицей формируем альтернативную систему вида .

Затем путем преобразований, используя специфику имеющейся матрицы, можем перейти к конкретной альтернативной системе.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе рассмотрены системы линейных неравенств с конечным числом вещественных неизвестных. В результате выполнения были решены все поставленные задачи:

* изучена литература по теории систем линейных неравенств;
* изучены доказательства основных теорем этой теории (критерии совместности и несовместности, теорема Минковского о следствиях и др.);
* автор познакомился с принципом граничных решений С.Н Черникова;
* изучены и доказаны некоторые теоремы теории альтернативных систем линейных неравенств;
* все теоретические результаты проиллюстрированы примерами;
* полученные результаты изложены полно, подробно, доказательно и доступно для студентов младших курсов математических факультетов вузов.

Таким образом, цель работы достигнута. Можно продолжать исследования в этом направлении, рассматривая другие многочисленные методы решения систем линейных неравенств.

Дипломная работа имеет теоретическое значение. Хотя в ней нет новых, не известных специалистам математических результатов, но она даёт по возможности связное и обоснованное описание трудных, разнородных и разбросанных в литературе методов и идей. Представленное изложение материала по силам студентам математических факультетов вузов, а некоторые разделы работы – даже школьникам старших классов. Поэтому дипломная работа может быть использована в качестве учебного материала для изучения вопросов, связанных с представленными в ней темами, в учебных курсах и спецкурсах для студентов физико-математических специальностей вузов и на факультативных занятиях в школах.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Александров А.Д. Выпуклые многогранники. – Гостехиздат, М.-Л.: 1950.
2. АрдиГ. X , Литтлвуд Д., Полна Г. Неравенства, М.: ИИЛ, 1948.
3. Астафьев Н.Н. Линейные неравенства и выпуклость. – М.: Наука, 1982.
4. Брёнстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. – М.: Мир, 1988.
5. Вороной Г.Ф. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм. Собрание сочинений, т. 2. – Киев, 1952. – 171–238.
6. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. – М.: Изд-во иностр. лит. – 1963. – 418 с.
7. Зоркальцев В.И. Системы линейных неравенств: учебное пособие. – Иркутск: Издательство ИГУ, 2007.
8. Канторович Л.В. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем. – Докл. АН СССР, 1940, №3, 212–215.
9. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М. Высшая школа, 1979.
10. Остроградский М.В. Полное собрание сочинений академика М.В. Остроградского. Т. 1. Ч. 2. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940–1946.
11. Рокафеллар. Р. Выпуклый анализ. – М.: Мир, 1973.
12. Рубинштейн Г.Ш. Общее решение конечной системы линейных неравенств. – Успехи математических наук. – Т. IX, вып. 2 (60), 1954. – C. 171–177.
13. Солодовников А.С. Системы линейных неравенств. – М: Наука, 1977.

1. [Солодовников А.С.](http://biblioclub.ru/index.php?page=author_red&id=20799) и др. Математика в экономике: учебник. – Ч. 2. – Математический анализ [электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=220237&sr=1>
2. Стройк Д.Я. Краткий очерк развития математики / Д.Я. Стройк. – М.: Наука, 1984.
3. Халмош П. Конечномерные векторные пространства. М.: ГИФМЛ, 1963.
4. Черников С.Н. Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
5. Burger E. Uber homogene lineare Ungleichungsysteme. Z. angew Math. und Mech., 1956, 36, № 3-4, 135–139.
6. Charnes A. Cooper W. W. The strong Minkowski-Farkas-Weyl theorem for vector spaces over ordered field. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1958, 44, № 9, 914–916.
7. Kuhn H. W. Solvability and consistency for linear equations and inequalities. Amer. Math. Monthly, 1956, 63, № 4, 217—232 (РЖМат, 1957, 2903).