Конструктивная теория функций: материалы к курсу

В дальнейшем $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ суть множества натуральных, целых, целых неотрицательных, вещественных, вещественных неотрицательных чисел.

1. Модули непрерывности

Непрерывную в точке 0, неубывающую и полуаддитивную на $\mathbb{R}_+$ функцию ω такую, что $\omega(0) = 0$, будем называть модулем непрерывности. Множество модулей непрерывности обозначим Ω, через Ω^* будем обозначать множество выпуклых вверх модулей непрерывности.

Предложение 1. *Если неубывающая на $\mathbb{R}_+$ функция ω непрерывна в точке 0 и $\omega(0) = 0$, причем функция $t \mapsto \omega(t)/t$ не возрастает, то $\omega \in \Omega$.*

Предложение 2. *Если неубывающая на $\mathbb{R}_+$ выпуклая функция ω непрерывна в точке 0 и $\omega(0) = 0$, то $\omega \in \Omega^*$.*

Теорема 1. *Для любого $\omega \in \Omega$ найдется такой $\omega \in \Omega^*$, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$*

$$\omega(t) \leqslant \omega^*(t) \leqslant 2\omega(t). \tag{1}$$

Задача 1. Показать, что в правой части неравенства (1) коэффициент 2 не может быть заменен на меньший.

Далее, L^1 — множество 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, суммируемых на $[-\pi, \pi]$, C — пространство непрерывных 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, с нормой

$$\|f\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

$C(K)$ — пространство непрерывных на компакте K функций с нормой

$$\|f\| = \max_{x\in K} |f(x)|.$$

Пусть $r \in \mathbb{Z}_+,\ t \in \mathbb{R}$, положим

$$\Delta_t^r(f, x) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{m+r} C_r^m f(x + mt).$$

Если $f \in C$, то модуль непрерывности порядка r с шагом h определяется равенством

$$\omega_r(f, h) = \sup_{|t|\leqslant h} \|\Delta_t^r(f)\|.$$

Если $f \in C([a, b])$, то модуль непрерывности порядка r с шагом h определяется следующим образом:

$$\omega_r(f, h) = \omega_r(f, h, [a, b]) = \sup_{|t|\leqslant h} \|(\Delta_t^r(f, \cdot)|[a, b - rt]\|,\ \text{если } h \in [0, (b - a)/r],$$

$$\omega_r(f, h, [a, b]) = \omega_r(f, (b - a)/r, [a, b]),\ \text{если } h \geqslant (b - a)/r.$$

Предложение 3. *При всех* $h \geqslant 0$, $\omega_r(\cdot, h)$ *полунорма в* C $(C([a,b]))$.

Предложение 4. *Пусть* $f \in C$ $(f \in C([a,b]))$, *тогда* $\omega_1(f, \cdot) \in \Omega$.

Предложение 5. *Если* $\omega \in \Omega$, *то* $\omega_1(\omega, h) = \omega(h)$.

Положим $\omega_1^*(f, \cdot) = \inf\{\omega^* \in \Omega^* : \omega_1(f, \cdot) \leqslant \omega^*(\cdot)\}$.

Задача 2. Пусть $f \in C$, $h \geqslant 0$. Доказать, что найдется $\omega \in \Omega$ такая, что

$$\omega_2(f,h) \leqslant \omega(h^2) \leqslant 4\omega_2(f,h).$$

Пусть $\alpha > 0$, $M > 0, r \in \mathbb{N}$, полагаем

$$Lip_M(r, \alpha, [a,b]) = \{f \in C([a,b]) : \omega_r(f, h, [a,b]) \leqslant Mh^\alpha\},$$
$$Lip_M(r, \alpha) = \{f \in C : \omega_r(f,h) \leqslant Mh^\alpha\}.$$

2. Полиномы Бернштейна

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Тогда

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x)$$

— полином Бернштейна порядка n функции f. Положим

$$M_{n,l}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^l p_{n,k}(x).$$

Предложение 6. *Если* $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, *то*

$$M_{n,0}(x) = 1,\ M_{n,1}(x) = 0,\ M_{n,2}(x) = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Предложение 7. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$. *Тогда* $B_n(\cdot, x)$ — *линейный оператор в* $C([0,1])$.

Предложение 8. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f \in C([0,1])$. *Тогда*

$$|B_n(f,x)| \leqslant \|f\|.$$

Теорема 2. *Если функция* f *ограничена на* $[0,1]$ *и непрерывна в точке* $x_0 \in (0,1)$, *то*

$$B_n(f, x_0) \to f(x_0),\ n \to \infty.$$

Задача 3. Если $x_0 \in (0,1)$ — точка разрыва первого рода функции f, то

$$B_n(f, x_0) \to \frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0)),\ n \to \infty.$$

Теорема 3. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$, $f \in C([0,1])$. *Тогда*

$$|B_n(f,x) - f(x)| \leqslant \omega_1^*\left(f, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right) \leqslant 2\omega_1\left(f, \sqrt{\frac{x(1-x)}{n}}\right).$$

Задача 4. Доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \sup_{f \in Lip_1(1,1,[0,1])} 2\sqrt{2n}\|B_{2n}(f) - f\| \leqslant 1.$$

Считаем, что $p_{n,k}(\cdot) = 0$ при $k < 0$ и $k > n$.

Предложение 9. *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{Z}_+,\ 0 \leqslant k \leqslant n$. *Тогда*

$$p_{n,k}(x) = n(p_{n-1,k-1}(x) - p_{n-1,k}(x)),\ x \in [0,1],$$
$$p_{n,k}(x) = \frac{n}{x(1-x)}\left(\frac{k}{n} - x\right)p_{n,k}(x),\ x \in (0,1).$$

Предложение 10. *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ x \in (0,1)$. *Тогда*

$$B_n'(f,x) = \frac{n}{x(1-x)}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x\right)p_{n,k}(x).$$

Предложение 11. *Пусть* $n,\ l \in \mathbb{N},\ x \in [0,1]$. *Тогда*

$$B_n^{(l)}(f,x) = l!\,C_n^l \sum_{k=0}^{n-l} \Delta_{\frac{1}{n}}^l \left(f, \frac{k}{n}\right) p_{n-l,k}(x).$$

Задача 5. Пусть $f \in C([0,1]),\ x \in (0,1)$, тогда

$$|B_n''(f,x)| \leqslant \frac{\sqrt{2n(n-1)}}{x(1-x)}\|f\|.$$

Предложение 12. *Если* f *неубывает (невозрастает) на* $[0,1]$, *то* $B_n(f)$ *неубывает (невозрастает) на* $[0,1],\ (n \in \mathbb{N})$.

Предложение 13. *Если* f *выпукла вверх (вниз) на* $[0,1]$, *то* $B_n(f)$ *выпукла вверх (вниз) на* $[0,1],\ (n \in \mathbb{N})$.

Задача 6. Пусть $f \in C([0,1])$. Тогда следующие условия равносильны:

1. функция f выпукла на $[0,1]$;
2. для всех $x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $f(x) \leqslant B_n(f,x)$.

Задача 7. Пусть f выпукла на $[0,1]$. Тогда при всех $x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$f(x) \leqslant B_{n+1}(f,x) \leqslant B_n(f,x).$$

Пусть

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \tag{2}$$

— разбиение отрезка $[a,b]$. Полагаем

$$Var(f,[a,b]) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|,$$

где верхняя грань берется по всем разбиениям вида (2). Величина $Var(f,[a,b])$ — вариация функции f на $[a,b]$. Если $Var(f,[a,b]) < \infty$, то говорят, что f есть функция ограниченной вариации на $[a,b]$.

Задача 8. Если f — функция ограниченной вариации на $[0,1]$, то

$$Var(B_n(f),[0,1]) \leqslant Var(f,[0,1]).$$

Задача 9. Пусть $f \in C([0,1])$,

$$\|B_n(f) - f\| = o\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty.$$

Тогда f — линейная функция (полином степени один).

Задача 10. Пусть $f \in C([0,1])$. Тогда следующие условия равносильны:

1. $f(0),\ f(1) \in \mathbb{Z}$;
2. существует последовательность полиномов с целыми коэффициентами равномерно сходящаяся на $[0,1]$ к функции f.

Пусть $f \in C([0,1]^2),\ x,\ y \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}$, положим

$$\mathcal{B}_n(f,x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} C_n^i C_n^j f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) x^i y^j (1-x)^{n-i}(1-y)^{n-j}.$$

Задача 11. Доказать, что $\mathcal{B}_n(f)$ сходится равномерно к f на $[0,1]^2$.

3. Линейные методы приближения

Если $d_k \in \mathbb{C}$, то по определению

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(d_k + d_{-k}).$$

Пусть $f \in L^1,\ x \in \mathbb{R}$, тогда

$$a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}$$

— тригонометрический ряд Фурье функции f, соответственно, в вещественной и комплексной форме, $S_n(f,x)$ — его n-я частичная сумма. Если $r \in [0,1),\ n \in \mathbb{Z}_+,\ f \in L^1,\ x \in \mathbb{R}$ то

$$\mathcal{P}_r(f,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} c_k(f)e^{ikx},$$

$$\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)c_k(f)e^{ikx}$$

— суммы Абеля—Пуассона и Фейера функции f.

Задача 12. Пусть f — непрерывно дифференцируемая 2π-периодическая функция такая, что $c_0(f) = 0$. Тогда

$$\|f\| \leqslant \frac{\pi}{2}\|f'\|.$$

Задача 13. Пусть $n \in \mathbb{N},\ f \in L^1$. Тогда для некоторого $C > 0$ имеет место оценка

$$\|\sigma_{n-1}(f)\| \leqslant C\|\mathcal{P}_{\frac{1}{n}}(f)\|.$$

Задача 14. Пусть $f \in C,\ \alpha > 0$. Тогда

$$\|\mathcal{P}'_\alpha(f)\| \leqslant \frac{2}{\pi \operatorname{sh}\alpha}\|f\|.$$

Задача 15. Если $f \in C$,

$$\|\sigma_n(f) - f\| = o\left(\frac{1}{n}\right),\ n \to \infty,$$

то $f = const$.

Задача 16. Если $f \in C$,

$$\|\mathcal{P}_r(f) - f\| = o(1-r),\ r \to 1-,$$

то $f = const$.

Задача 17. Пусть $f \in C$ — функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$. Тогда

$$|S_n(f,x)| \leqslant \|f\| + Var(f, [0, 2\pi]).$$

Пусть f суммируема на любом отрезке в $\mathbb{R},\ h > 0,\ r - 1 \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$, тогда

$$S_{h,1}(f,x) = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\,dt,$$
$$S_{h,r}(f,x) = S_{h,1}(S_{h,r-1}(f)),x).$$

Функция $S_{h,r}(f)$ называется функцией В. А. Стеклова r-го порядка функции f с шагом h.

Задача 18. Пусть $f \in C([a,b])$. Тогда следующие условия равносильны:

1. функция f выпукла на $[a,b]$;
2. для всех $x \in [a,b],\ h > 0:\ x \pm h/2 \in [a,b]$ выполнено неравенство

$$f(x) \leqslant S_{h,1}(f,x).$$

Предложение 14. *Для* $f \in C$

$$\|f - S_{h,1}(f)\| \leqslant \frac{1}{2}\omega_2\left(f, \frac{h}{2}\right),$$
$$\|f - S_{h,2}(f)\| \leqslant \frac{1}{2}\omega_2(f,h).$$

Задача 19. Если $f \in Lip_M(2,\alpha)$ при $\alpha \in (0,2]$, то

$$\|f - S_{h,1}(f)\| \leqslant \frac{Mh^\alpha}{2^{\alpha+1}(\alpha+1)}.$$

Задача 20. Если $f \in Lip_M(2,\alpha)$ при $\alpha \in (0,2]$, то

$$\|f - S_{h,2}(f)\| \leqslant \frac{Mh^\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}.$$

Список литературы

1. Даугавет И. К. Введение в классическую теорию приближения функций. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2011. 232 с.

2. Жук В. В., Натансон Г. И. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 188 с.

3. Жук В. В. Структурные свойства функций и точность аппроксимации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984. 116 с.

4. Жук В. В. Лекции по теории аппроксимации. СПб.: Изд-во ВВМ, 2008. 396 с.

5. Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. Избранные задачи по вещественному анализу. СПб: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004. 624 с.

6. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М., Л.: ГИТТЛ. 1949. 688 с.

7. Тригуб Р. М. Вокруг аппроксимационной теоремы К. Вейерштрасса. Донецк, 2005. 156 с.

8. De Vore R. A., Lorentz G. G. Constructive Approximation. Kluwer Academic Pub., 1993. 450 pp.

9. Trigub R. M., Belinsky E. S. Fourier Analysis And Approximation Of Functions. Kluwer Academic Pub., 2004.