Министерство образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Учебное методическое пособие к электронному учебнику

2004

Корректор: Воронина М.А.

**Мицель А.А., Шелестов А.А., Романенко В.В.,
Веретенников М.В., Клыков В.В., Романенко А.В.**
Методы оптимизации: Учебное методическое пособие к электронному учебнику / Под ред. А.А. Мицеля. – Томск: Томский межвузовский центр дистанционного образования, 2004. – 99 с.

© Мицель А.А., Шелестов А.А.,
Романенко В.В., Веретенников М.В.,
Клыков В.В., Романенко А.В., 2004
© Томский межвузовский центр
дистанционного образования, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..... 4
1 ПРОГРАММА ЛЕКЦИОННОГО КУРСА..... 6
2 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ НА ТРЕНАЖЕРЕ 9
3 КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ..... 11
3.1 Общие указания 11
3.2 Контрольная работа №1 12
3.2.1 Примеры решения типовых вариантов..... 12
3.3 Контрольная работа №2 30
3.3.1 Примеры решения типовых вариантов..... 31
4 КУРСОВАЯ РАБОТА..... 55
5 РУКОВОДСТВО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНИКА..... 63
5.1 Системные требования..... 63
5.2 Запуск компонентов электронного обучающего курса.... 65
5.3 Структура мультимедиа-информации 66
5.4 Работа с лекционным материалом 67
5.5 Практические работы 69
5.5.1 Начало работы 69
5.5.2 Формирование задачи оптимизации..... 70
5.5.3 Работа с деревом алгоритма 71
5.5.4 Дополнительные возможности..... 72
5.6 Контроль знаний 73
5.6.1 Самостоятельное тестирование..... 73
5.6.2 Контрольные работы..... 74
5.6.3 Курсовое проектирование..... 75
5.7 Подготовка к экзамену 75
6 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ 76
6.1 Основная литература..... 76
6.2 Дополнительная литература 76
ПРИЛОЖЕНИЕ А 77
ПРИЛОЖЕНИЕ Б..... 78

ВВЕДЕНИЕ

В наиболее общем смысле теория оптимизации представляет собой совокупность фундаментальных математических результатов и численных методов, ориентированных на нахождение и идентификацию наилучших вариантов из множества альтернатив и позволяющих избежать полного перебора и оценивания возможных вариантов. Процесс оптимизации лежит в основе всей инженерной деятельности.

Важность и ценность теории оптимизации заключается в том, что она дает адекватные понятийные рамки для анализа и решения многочисленных задач:

– в исследовании операций: оптимизация технико-экономических систем, транспортные задачи, управление запасами и т.д.;

– в численном анализе: аппроксимация, регрессия, решение линейных и нелинейных систем, численные методы, включая методы конечных элементов, и т.д.;

– в автоматике: распознавание образов, оптимальное управление, фильтрация, управление производством, робототехника и т.д.;

– в математической экономике: решение больших макроэкономических моделей, моделей предпринимательства, теория принятия решений и теория игр.

Предлагаемый электронный учебник по методам оптимизации создан на основе учебно-методических материалов, подготовленных на кафедре АСУ Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. Объем и структура материала соответствуют государственным стандартам специальности 220400 – Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем. Курс «Методы оптимизации» изучается в 8 семестре.

Компьютерный обучающий комплект «Методы оптимизации» может быть использован также для заочного обучения студентов, обучающихся по специальностям 220200 – «автоматизированные системы обработки информации и управления», 220300 – «системы автоматизированного проектирования», 075500 –

«комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем», 552800 – «информатика и вычислительная техника», 071900 – «информационные системы в экономике», 351400 – «прикладная информатика в экономике».

Электронный учебник создан творческим коллективом под руководством профессора кафедры АСУ Мицеля А.А.

В электронном учебнике по методам оптимизации представлены следующие разделы:

Глава 1. Исторический путь становления различных методов оптимизации. Связь с теорией автоматического управления.

Глава 2. Основные понятия и определения.

Глава 3. Анализ экстремальных задач.

Глава 4. Методы минимизации функций.

Глава 5. Условная оптимизация.

Глава 6. Вариационное исчисление.

Глава 7. Основные понятия теории оптимального управления.

Учебник включает лекционный материал, практикум с тренажерами, тестовый контроль, две контрольные работы и курсовую работу.

В лекционном курсе после каждой главы приводятся вопросы для самопроверки.

Математические тренажеры предназначены для закрепления студентами теоретических знаний.

Курсовая и контрольные работы выполняются на ЭВМ. В ходе их выполнения предполагается закрепление знаний как по теории оптимизации, так и по программированию.

1 ПРОГРАММА ЛЕКЦИОННОГО КУРСА

1. Введение.

Цель изучения дисциплины. Методологические основы оптимизации. Применение методов оптимизации в инженерной практике. Связь с теорией автоматического управления. Исторический путь становления различных методов оптимизации. Цель, задачи и содержание курса.

2. Основные понятия и определения.

Содержательные и формализованные постановки задач оптимизации. Критерии качества и ограничения. Классификация задач оптимизации по виду целевой функции, критерию и типу ограничений. Задачи математического программирования и управления.

3. Анализ экстремальных задач.

Необходимые и достаточные условия существования экстремума функций без ограничений (скалярный и векторный случаи). Необходимые и достаточные условия существования условного экстремума в задачах с ограничениями. Теорема Сильвестра. Квадратичные формы. Функция Лагранжа. Условия оптимальности в терминах седловых точек функции Лагранжа. Теорема Куна-Таккера. Принцип двойственности в задачах математического программирования.

4. Методы минимизации функций.

4.1. Методы одномерного поиска.

Математическая постановка задачи. Унимодальность и основные свойства унимодальных функций. Глобальная и асимптотическая сходимость. Методы исключения интервалов: равномерного поиска, дихотомии, Фибоначчи, золотого сечения, метод ломанных. Полиномиальная аппроксимация и методы точечного оценивания. Методы оптимизации с использованием производных. Сравнительные оценки методов.

4.2. Методы поиска экстремума функций многих переменных.

Методы покоординатного спуска, метод Хука-Дживса, метод сопряженных направлений Пауэлла. Градиентные методы: метод Коши, метод Ньютона, метод Флетчера-Ривза. Алгоритмы с самонастройкой параметра длины рабочего шага. Пробле-

мы вычисления элементов матрицы Гессе. Квазиньютоновские методы, методы с переменной метрикой. Алгоритмы Дэвидона-Флетчера-Пауэлла, Поллака-Рибьера, Бройдена-Флетчера-Шенно. Сравнение методов и результатов вычислительных экспериментов.

5. Условная оптимизация.

Модели и методы линейного программирования (ЛП).

Математическая постановка и особенности задач ЛП. Основные формы записи задач ЛП. Приведение задач ЛП к стандартной и канонической форме. Графический метод решения задач ЛП, характеристика экстремальных точек. Симплекс-метод. Оптимальные планы и их определение. Симплекс-таблица. Критерий оптимальности симплекс-таблицы и процедура улучшения плана. Метод искусственного базиса. Двойственная задача ЛП, двойственный симплекс-метод. Анализ чувствительности в линейном программировании. Задачи целочисленного ЛП. Метод Гомори. Метод ветвей и границ. Способы построения дополнительных ограничений. Рекомендации составления моделей и решения задач ЛП.

Методы нелинейного программирования для задач с ограничениями.

Математическая постановка и особенности задач НП. Задачи выпуклого программирования. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Задачи квадратичного программирования. Практические приложения алгоритмов к решению экономических задач. Методы штрафных и барьерных функций.

6. Вариационное исчисление.

Функционал. Необходимое и достаточное условия существования экстремума функционалов. Основная лемма вариационного исчисления. Уравнение Эйлера для вариационных задач с закрепленными концами. Многомерный случай. Уравнение Эйлера-Пуассона. Вариационные задачи с подвижными концами. Условие трансверсальности. Исследование функционалов. Смешанные задачи. Вариационные задачи на условный экстремум. Задача об оптимальном управлении. Изопериметрические задачи. Прямые методы решения вариационных задач.

7. Основные понятия теории оптимального управления.

Математическая модель объекта. Критерий оптимальности. Допустимое управление. Дополнительные ограничения. Формулировка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина. Динамическое программирование.

2 ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ НА ТРЕНАЖЕРЕ

Практические занятия предназначены для закрепления лекционного материала и предусматривают решение задач и примеров. По лекционному материалу сформированы шесть практических работ:

1. Прямая оптимизация функций одной переменной.
2. Оптимизация функций одной переменной, основанная на использовании производных.
3. Прямая оптимизация функций многих (двух) переменных.
4. Оптимизация функций многих (двух) переменных, основанная на использовании производных.
5. Решение задач линейного программирования.
6. Решение задач нелинейного программирования.

Практическая работа, реализованная на ЭВМ, начинается с настройки параметров задачи оптимизации. Сначала пользователь выбирает режим работы: изучение, легкий или сложный тренажеры. Затем выбирает один из трех предложенных для изучения алгоритмов. После этого пользователь имеет возможность в символьной форме задать целевую функцию, ограничения и т.д.

В режиме изучения работы алгоритма все вычисления производит компьютер, отображая в специальных окнах перемещение по дереву решения задачи и промежуточные данные.

На легком уровне тренажера на тех этапах решения, когда требуется ввод расчетных параметров, компьютер снимает блокировку с полей ввода, соответствующих данным параметрам. Пользователь может получить подсказку на ввод параметров, в том числе и подсказку об использовании символа – десятичного разделителя. Введенное значение считается правильным, если погрешность относительно значения, вычисленного компьютером, не превышает заданной величины. Корректно введенное, правильное значение заменяется, тем не менее, на значение, вычисленное комьютером.

На трудном уровне тренажера подсказка запрещена. Компьютер просто производит перемещение по дереву решения в соответствии со значениями, введенными пользователем. При

некорректно введенном, или неверном значении процесс останавливается, выдается сообщение об ошибке, тренежер ожидает повторного ввода значения.

При выборе режима «Изучение работы алгоритмов» пользователь получает возможность сравнения работы алгоритмов по двум критериям: количество пройденных итераций для достижения заданной точности и погрешность расчета, полученную после прохождения заданного количества итераций. Алгоритмы сравниваются по одной задаваемой пользователем задаче оптимизации.

В практических работах №3 и №4, посвященных оптимизации функций двух переменных, пользователь может посмотреть вид функции в специальном окне «Библиотека функций». В этом окне строится поверхность, описываемая заданной функцией двух переменных, с возможностью вращения точки зрения по всем осям.

3 КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

3.1 Общие указания

Учебная программа по дисциплине «Методы оптимизации» предполагает выполнение студентом двух контрольных работ.

Вариант контрольной работы выбирается студентом по формуле:

$$V = (N \cdot P) \cdot \mathrm{div}\ 100,$$

где V – искомый номер варианта (при $V = 0$ берется $V = N$),

N – количество вариантов (в данном случае – 1000),

P – значение двух последних цифр пароля (0..99),

div – операция целочисленного деления.

Каждая контрольная работа, включающая в себя десять вопросов, состоит из двух частей: теоретической и практической (расчетной).

В теоретической части необходимо представить письменные ответы на контрольные вопросы.

В практической части на каждое задание необходимо представить не только ответ в виде числового значения, но и описать последовательность действий (вычислений) в соответствии со схемой работы оптимизационного алгоритма, с помощью которого решалась каждая конкретная задача оптимизации.

Первая контрольная работа посвящена безусловным методам оптимизации (одномерным и многомерным).

Во второй – приведены вопросы и задания, связанные с условной линейной и нелинейной многомерной оптимизацией.

Каждая контрольная работа содержит большое количество вариантов. Номер Вашего варианта определяется путем введения двух последних цифр личного пароля.

Задания выполняются на одном из языков программирования Pascal или C/C++ для платформ DOS или Windows и высылаются в виде архивированного (moN.zip, moN.rar) пакета файлов, который должен содержать:

- файлы исходного кода, файлы и/или номер контрольной работы и варианта;
- идентификационный файл (about.me), содержащий:

– ФИО и код студента;

– номер специальности;

– наименование системы программирования и версия;

– список каталогов и файлов, входящих в пакет, с описанием каждого;

– дополнительные комментарии;

- файл отчета по проделанной работе (moN.doc) в формате Word 6.0/97 и выше.

Варианты контрольных работ генерируются из банка вопросов и задач с помощью датчика случайных чисел.

Поскольку количество вариантов во всех контрольных работах равно 1000, то студент выполняет вариант с одним и тем же номером в обеих контрольных работах.

Ответы на теоретические вопросы даются в редакторе Word 6.0 – 7.0 и выше. При ответе на теоретические вопросы требуется изучить и обдумать соответствующий теоретический материал из учебного пособия, затем уяснить, что именно требуется ответить на поставленный вопрос, кратко сформулировать ответ и изложить его, используя соответствующую терминологию. При решении практических заданий необходимо полностью приводить ход решения. Ответ на задачу пишется отдельной строкой под решением.

3.2 Контрольная работа №1

Контрольная работа № 1 выполняется после изучения глав «Основные понятия и определения», «Анализ экстремальных задач» и «Методы безусловной минимизации функций». Контрольная работа содержит десять вопросов, пять из которых – теоретические и пять – практические.

3.2.1 Примеры решения типовых вариантов

Задача 1. Убедиться в унимодальности функций $f(x)$ на указанных отрезках [а, б].

а) $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x; \quad x \in [0; \pi/4].$

Решение: $\dfrac{2}{1+x^2}-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}+\sin x = f''(x)$

или $$f''(x)=2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}+\sin x \ge 0$$

Ответ: $f(x)\in Q[0,\pi/4]$.

б) $f(x)=\dfrac{1}{4}\cdot x^4+x^2-8\cdot x+12;\quad x\in[0;\,2]$.

Решение: $f''(x)=3x^2+2\ge 0$.

Ответ: $f(x)\in Q[0;2]$.

в) $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\sin x;\ x\in[0;1]$.

Решение: $f''(x)=1+\sin x\ge 0$ при любых значениях *x*.
Ответ: $f(x)\in Q[0;1]$.

г) Показать, что если фунция унимодальна на отрезке $[a;b]$, т.е. $f(x)\in Q[a;b]$ и $a\le c<d\le b$, то данная функция будет унимодальна и на отрезке $[c;d]$: $f(x)\in Q[c;d]$.

Решение:

- Если $c=a,\ d=b$, то $f(x)\in Q[c;d]$ (по условию).
- Пусть $a<c,\ d\le b$, если $x^*\in[a;c]$, то на интервале $[c;d]$ $f'(x)\ge 0$, и следовательно, $f(x)\in Q[c;d]$. Если $x^*\in[a;d]$, то $f(x)\le 0$ на $[c;x^*]$, $f(x)\ge 0$ на $[x^*;d]$, следовательно, $f(x)\in Q[c;d]$. Аналогично можно рассмотреть и другие ситуации ($a\le c, d<b$).

д) Показать, что функция

$$f(x)=x^4-10\cdot x^3+36\cdot x^2+5\cdot x$$

унимодальна на отрезке [3; 5].

Решение. Вторая производная функции $f(x)$ имеет вид

$$f^{//}(x) = 12 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 72 .$$

Корни полученного квадратного трехчлена $12 \cdot x^2 - 60 \cdot x + 72 = 0$ есть $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Следовательно, $f^{//} \geq 0$, если $x \geq 3$ и, в частности, при $x \in [3, 5]$. Используя 2-ой критерий унимодальности, можно сделать вывод о том, что данная функция унимодальна на указанном отрезке, т.е. $f(x) \in Q\ [3,5]$.

Задача 2. Поиск нулей функции.

а) Найти нуль функции методом Ньютона.

$$f(x) = x^3 - x + 1;\ x \in [-2;0].$$

Выполнить две-три итерации.

Решение. Выберем x_0 из неравенства $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1;$

$f''(x) = 6x.$

$x_0 = -2,\ f(-2) = -5,\ f''(-2) = -12;\ f(-2) \cdot f''(-2) = 60 > 0;$

$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1}).$

N	x	$f(x)$	$f'(x)$
0	–2	–5	11
1	–1.55	–1.17	6.2
2	–1.362	–0.164	4.56

Ответ: $\xi = -1.362$.

б) Методом хорд найти положительный корень функции с точностью до 0.002

$$f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 .$$

Решение. Определяем интервал, на котором находится корень.

Т.к. $f(1) = -0.6 < 0;\ f(2) = 5.6 > 0$, то $\xi \in [1;2]$.

Вычисляем

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b-a) = 1 - \frac{-0.6 \cdot 2}{5.6 - (-0.6)} \approx 1.194.$$

$f(1.194) = -0.022.$ Так как $f(1.194) \cdot f(2) < 0$, то корень находится в интервале $[1.194, 2]$. Продолжим вычисления

$$x_2 = 1.194 - \frac{-0.022}{5.6 - (-0.022)}(2 - 1.194) \approx 1.197.$$

Проверяем условие $|1.197 - 1.194| = 0.003 > \varepsilon.$

Продолжаем процесс: $f(1.197) = -0.011;$

$$x_2 = 1.197 - \frac{-0.011}{5.6 - (-0.011)}(2 - 1.197) = 1.199;$$

$|1.199 - 1.197| = 0.002 = \varepsilon$. Процесс можно закончить.

Ответ: $\xi = 1.199$.

в) Найти комбинированным методом корень уравнения $f(x) = x^5 - x - 0.2 = 0$ на интервале $[1,1.1]$ с точностью $\varepsilon = 0.0005$.

Решение. Проверим наличие корня: $f(1) = -0.2;$ $f(1.1) = 0.3105$; $f(1) \cdot f(1.1) < 0$, следовательно, корень существует. Вычислим производные $f'(x) = 5x^4 - 1;$ $f''(x) = 20x^3$. Итак на интервале $[1,1.1]$ $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знаки, причем $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$. Далее, так как $f(1.1) \cdot f''(1.1) > 0$, то вычисления проводим по формулам (2.8): $x_0 = a = 1;$ $b_0 = b = 1.1;$ $f(b_0) = 6.3205$;

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)(b_0 - x_0)}{f(b_0) - f(x_0)} = 1 - \frac{-0.2(1.1-1)}{6.3205} = 1.03917;$$

$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = 1.1 - \frac{0.3105}{6.3205} = 1.05087.$$

Проверяем условие останова:
$\left|b_1 - x_1\right| = \left|1.05087 - 1.03917\right| = 0.0117 > \varepsilon$; точность не достигнута, продолжаем вычисления.

$f(x_1) = f(1.03917) = -0.02736$;

$f(b_1) = f(1.05087) = 0.0307$; $f'(b_1) = f'(1.05087) = 5.0977$;

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b_1 - x_1)}{f(b_1) - f(x_1)} = 1 - \frac{-0.02736}{0.0307 - (-0.02736)}(1.05087 -$$

$$-1.03917) = 1.04468;$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = 1.05087 - \frac{0.0307}{5.0977} = 1.04485.$$

$$\left|b_2 - x_2\right| = \left|1.04485 - 1.04468\right| = 0.0002 < \varepsilon;$$

Ответ: $\xi = \frac{1}{2}(b_2 + b_2) = 1.045$.

Задача 3. Выпуклые функции.

а) Выяснить, является ли функция $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2)$ выпуклой в пространстве R^2.

Решение. Дважды дифференцируемая функция является выпуклой в пространстве R^2, если главные угловые миноры матрицы Гессе неотрицательны. Запишем матрицу Гессе – матрицу вторых производных:

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{dx_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{dx_1 x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{dx_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{dx_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - \sin(x_1 + x_1) & -\sin(x_1 + x_1) \\ -\sin(x_1 + x_2) & 2 - \sin(x_1 + x_2) \end{bmatrix}.$$

Угловые миноры Δ_i соответственно равны:

$$\Delta_1 = 4 - \sin(x_1 + x_2) > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 - \sin(x_1 + x_2) & -\sin(x_1 + x_2) \\ -\sin(x_1 + x_2) & 2 - \sin(x_1 + x_2) \end{vmatrix} = 8 - 6\sin(x_1 + x_2) > 0.$$

Таким образом, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ при всех значениях $x \in R^2$, т.е. функция $f(x)$ выпукла.

б) Выяснить, является ли функция $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - \cos(\frac{x_1 - x_2}{2})$ выпуклой в пространстве R^2.

Решение. Дважды дифференцируемая функция является выпуклой в пространстве R^2, если главные угловые миноры матрицы Гессе неотрицательны. Запишем матрицу Гессе – матрицу вторых производных:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 + \frac{1}{4} \cdot \cos(\frac{x_1 - x_2}{2}), & -\frac{1}{4} \cdot \cos(\frac{x_1 - x_2}{2}) \\ -\frac{1}{4} \cdot \cos(\frac{x_1 - x_2}{2}) & 2 + \frac{1}{4} \cdot \cos(\frac{x_1 - x_2}{2}) \end{bmatrix}.$$

Угловые миноры равны:

$$\Delta_1 = 2 + \frac{1}{4} \cdot \cos(\frac{x_1 - x_2}{2}) > 0;$$

$$\Delta_2 = \left[2 + \left(\frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2} \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \cdot \cos\left(\frac{x_1 - x_2}{2} \right) \right) \right]^2 > 0.$$

Таким образом, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ при всех значениях $x \in R^2$, т.е. функция $f(x)$ выпукла.

〔 〕

Задача 5. Безусловная оптимизация.

Методы нулевого порядка (без использования производных).

1) Методом перебора найти минимум целевой функции

$$f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x,$$

$$x \in [1{,}5;\ 2].$$

Точку x^* найти с точностью $\varepsilon = 0.05$.

Решение: $f(x) \in Q[1.5;2]$, т.к. $f''(x) = 12x + 48x - 12 > 0$, при $x \in [1.5,\ 2]$.

Выбрав $n = \dfrac{2-1.5}{0{,}05} + 1 = 10$, вычислим значения $f(x_i)$ в точках $x_i = 1.5 + i \times 0.05$.

Составим таблицу

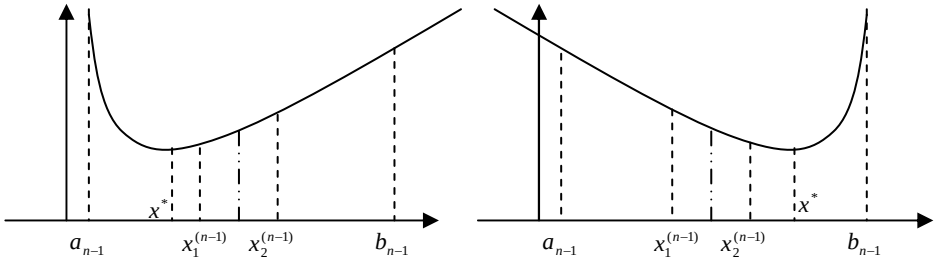
x_i	1.5	1.55	1.6	1.65	1.7	1.75
$f(x_i)$	–89.4	–90.2	–91.2	–91.8	–92.08	–92.12
x_i	1.8	1.85	1.9	1.95	2.0	
$f(x_i)$	–91.9	–91.4	–90.5	–89.4	–88.0	

Из таблицы находим наибольшее значение целевой функции: $f^* \approx -92.12$. Следовательно, точка максимума есть точка $x^* \approx 1.75$.

2) Метод деления отрезка пополам.

Пусть задана $f(x) \in Q[a;b]$. Надо найти x^* и f^*. Пусть $\varepsilon > 0$ – требуемая точность определения точки x^*. Выбрав $\delta \in (0;2\varepsilon)$, построим последовательность $\{a_n\}, \{b_n\}, \{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}$, $n = 0,1,...,$ используя рекуррентные формулы:

$$\begin{cases} a_0 = a; b_0 = b; \\ x_1^{(n-1)} = (a_{n-1} + b_{n-1} - \delta)/2; \\ x_2^{(n-1)} = (a_{n-1} + b_{n-1} + \delta)/2; \\ a_n = a_{n-1} \quad b_n = x_2^{(n-1)}, \quad \textit{если} \quad f(x_1^{(n-1)}) \le f(x_{21}^{(n-1)}); \\ a_n = x_1^{(n-1)} \quad b_n = b_{n-1}, \quad \textit{если} \quad f(x_1^{(n-1)}) > f(x_{21}^{(n-1)}). \end{cases}$$



За точку x^* принимаем $x^* \approx (a_n + b_n)/2$.

$$\varepsilon_n = \frac{(b_n - a_n)}{2} = \frac{(b - a + \delta)}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2^n} + \frac{\delta}{2^{n-1}} + \ldots + \frac{\delta}{2^3} + \frac{\delta}{2^2}.$$

Или

$$\varepsilon_n = \frac{(b - a - \delta)}{2^{n+1}} + \frac{\delta}{2}.$$

Останов: $\varepsilon_n \le \varepsilon$, обычно берут $\delta = \varepsilon$.

Решить предыдущую задачу методом деления отрезка пополам.

Положим $\delta = 0.02 < 2;\ \varepsilon = 0.1$. Построим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ по вышеприведенным рекуррентным формулам и занесем результаты в таблицу.

Таблица

n	a_n	b_n	$\varepsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2}$	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$f(x_1^{(n)})$	$f(x_2^{(n)})$	Прим.
0	1.5	0.25	0.25	1.74	1.76	–92.135	–92.096	
1	1.5	0.13	0.13	1.62	1.64	–91.486	–91.696	
2	1.62	0.07	0.07	1.68	1.7	–91.995	–92.084	
3	1.68	0.04	0.04					т.д.

Следовательно, $x^* \approx 1.72$ и $f^* \approx f(1.72) = -92.13$.

3) Оценить координаты минимума функции с помощью квадратичной аппроксимации.

$$f(x) = 2x^2 + 16/x \;;\; x \in [1;\ 5].$$

Если ЦФ $f(x)$ и аппроксимирующий полином являются унимодальными на рассматриваемом интервале, то $\bar{x} = \frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{a_1}{2a_2}$ является приемлемой оценкой координаты точки истинного экстремума x^*.

Пусть $x_1 = 1,\ x_3 = 5,\ x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$. Вычислим соответствующие значения функции: $f_1 = 18;\ f = 23,\ 33;\ f_3 = 52,\ 3.$

Далее находим параметры a_0, a_1, a_2. Имеем:

$$a_0 = 18;\ a_1 = \frac{23,33 - 18}{3-1} = \frac{8}{3};\ a_2 = \left[\frac{53,2 - 18}{5-1} - \frac{8}{3}\right] = \frac{46}{15}.$$

Подставляя эти значения в выражение для $\bar{x}$, получим:

$$\bar{x} = \frac{3+1}{2} - \frac{8}{3} \cdot \left[2 \cdot \frac{46}{15}\right] = 1,\ 565.$$

4) Методом Пауэлла найти минимум целевой функции

$$f(x) = 2x^2 + 16/x.$$

Пусть начальная точка $x_1 = 1$ и длина шага $\Delta x = 1$.

Критерии останова:

$$\left|\frac{разность\ \ значений\ \ x}{x}\right| \le 3\cdot 10^{-2};$$

$$\left|\frac{разность\ \ значений\ \ f}{f}\right| \le 3\cdot 10^{-3}.$$

Замечание. Оба критерия должны выполняться одновременно.

Итерация 1:

Шаг 1: $x_2 = x_1 + \Delta x = 2.$

Шаг 2: $f(x_1) = 18;\ \ f(x_2) = 16.$

Шаг 3: $f(x_1) > f(x_2)$, следовательно $x_3 = 1 + 2 = 3.$

Шаг 4: $f(x_3) = 23,\ \ 33$; $F_{\min} = 16$; $X_{\min} = x_2$.

Шаг 5:

$$a_1 = \frac{16-8}{2-1} = -2;\ \ a_2 = \frac{1}{3-2}\cdot\left[\frac{23,\ \ 33-18}{3-1} - (-2)\right] = \frac{5,33}{2} + 2 = 4,665.$$

Вычислим $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1+2}{2} - \frac{(-2)}{2\cdot 4,665} = 1,5 + \frac{1}{4,665} = 1,714\ \ ;\ \ f(\bar{x}) = 15,210.$$

Шаг 6: Проверка на окончание поиска:

а) $\left|\dfrac{16-15,210}{15,210}\right| = 0,0519 > 0,003$. Критерий останова не выполняется, следовательно поиск продолжается. Переход на Шаг 7.

Шаг 7: Выбираем $\bar{x}$ как «наилучшую» точку, а $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2$ – как точки, которые ее окружают. Обозначим эти точки в естественном порядке и переходим к Шагу 4.

Итерация 2:

Шаг 4: $x_1 = 1,\ \ f_1 = 18;\ \ x_2 = 1,714,\ \ f_2 = 15,210 = F_{\min}$;
$X_{\min} = x_2 = 1,714;\ \ x_3 = 2;\ \ f_3 = 16.$

Шаг 5:

$$a_1 = \frac{15,210 - 18}{1,714 - 1} = -3,908;$$

$$a_2 = \frac{1}{2 - 1,714} \cdot \left[\frac{16 - 18}{2 - 1} - (-3,\ \ 908) \right] = \frac{1,908}{0,286} = 6,671;$$

$$\overline{x} = \frac{2,714}{2} - \frac{(-3,908)}{2 \cdot 6,671} = 1,357 + 0,293 = 1,650;\quad f(\overline{x}) = 15,142.$$

Шаг 6: Проверка на окончание поиска:

$$\text{а)}\ \left| \frac{15,210 - 15,142}{15,142} \right| = 0,0045 > 0,003.$$

Первый критерий останова не выполняется. Переход на Шаг 7.

Шаг 7: Выбираем $\overline{x}$ как «наилучшую» точку, а $x_1 = 1,\ \ x_2 = 1,714$ – как точки, которые ее окружают. Обозначим эти точки в естественном порядке и переходим к Шагу 4.

Итерация 3:

Шаг 4:

$x_1 = 1;\ \ f_1 = 18;\ \ x_2 = 1,65;\ \ f_2 = 15,142 = F_{\min};\ \ X_{\min} = x_2 = 1,65;$
$x_3 = 1,174;\ \ f_3 = 15,210.$

Шаг 5:

$$a_1 = \frac{15,142 - 18}{1,65 - 1} = -\ \ 4,397;$$

$$a_2 = \frac{1}{1,714 - 1,650} \cdot \left[\frac{15,210 - 18}{1,714 - 1} - (-4,397) \right] = 7,647;$$

$$\overline{x} = \frac{2,65}{2} - \frac{(-4,397)}{2 \cdot 7,647} = 1,6125;\quad f(\overline{x}) = 15,123.$$

Шаг 6: Проверка на окончание поиска:

а) $\left|\dfrac{15,\ 142-15,\ 123}{15,\ 123}\right| = 0,0013 < 0,003;$

б) $\left|\dfrac{1,65-1,6125}{1,6125}\right| = 0,023 < 0,03.$

Оба критерия останова выполняются, следовательно, поиск закончен.

Ответ: $\bar{x} = 1,6125$.

5) Найти точку минимума ЦФ с помощью метода Хука-Дживса:

$$f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2;$$

начальная точка: $x^0 = [-4;\ -4]^T$.

Решение. Зададим следующие величины:

$\Delta\ \ x = [1;\ 1]^T$ – векторная величина приращения шага;

$\alpha = 2$ – коэффициент уменьшения шага $\Delta\ \ x$;

$\varepsilon = 10^{-4}$ – параметр окончания поиска.

Итерации начинаются с исследующего поиска вокруг точки x^0, которой соответствует значение ЦФ $f(x^0) = 272$.

Фиксируя переменную $x_2 = -4$, дадим приращение x_1:

$$x_1 = -4+1 \to f(-3;\ -4) = 200 < f(x^0) \to \text{успех.}$$

Далее, фиксируем $x_1 = -3$ и дадим приращение x_2:

$$x_2 = -4+1 \to f(-3;\ -3) = 153 < 200 \to \text{успех.}$$

Таким образом, в результате исследующего поиска найдена точка $x^1 = [-3;\ -3]^T$, в которой значение ЦФ $f(x^1) = 153$.

Так как исследующий поиск был удачным, переходим к поиску по образцу:

$$x_p^2 = x^1 + (x^1 - x^0) = [-2;\ -2]^T; \qquad f(x_p^2) = 68.$$

Далее проводится исследующий поиск вокруг точки x_p^2. В результате получаем точку $x^2 = [-1;\ -1]^T$, в которой значение ЦФ $f(x^2) = 17$.

Поскольку $f(x^2) < f(x^1)$, поиск по образцу следует считать успешным, и x^2 становится новой базовой точкой. Итерации продолжаются до тех пор, пока уменьшение величины шага не укажет на окончание поиска в ε-окрестности точки минимума $x^* = [0;\ 0]^T$.

Градиентные методы

1. Найти максимум функции $f(x)$ методом Коши (методом наискорейшего спуска).

$$f(x) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 5 \longrightarrow \max.$$

Начальное приближение: $x^0 = [4;5]^T$; $f(x^0) = -10$. Сопроводить решение графической иллюстрацией (изобразить линии уровня ЦФ и траекторию спуска).

Решение: первая итерация.

Общая итерационная формула метода Коши имеет вид:

$$x^{i+1} = x^i + \lambda_i \cdot grad \quad f(x^i),$$

следовательно,

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 \nabla f(x^0);$$

$$\nabla f(x) = [4 - 2x_1; 2 - 2x_2];\ \nabla f(x^0) = [-4; -8];$$

$$x^1 = [4;5] + \lambda_0[-4;-8] = [4 - 4\lambda_0; 5 - 8\lambda_0].$$

Найдем λ_0 из условия ортогональности двух смежных направлений спуска, т.е. скалярное произведение смежных векторов-градиентов должно быть равно нулю:

$$\frac{\partial f(x_1)}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow \nabla f^T(x^1) \cdot \nabla f(x) = 0.$$

Вычислим компоненты вектора-градиента $\nabla f(x^1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4 - 2(4 - 4\lambda_0) = -4 + 8\lambda_0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2 - 2(5 - 8\lambda_0) = -8 + 16\lambda_0.$$

Т. о., скалярное произведение векторов $\nabla f^T(x^1) \cdot \nabla f(x^0)$ имеет вид:

$$\left(-4 + 8\lambda_0, -8 + 16\lambda_0\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} = 80 - 160\lambda_0 = 0 \quad .$$

Следовательно, $\lambda_0 = 0.5$.

Таким образом, имеем: $x^1 = [4;\ 5] + 0,\ \ 5 \cdot [-4; -8] = [2;\ 1]$.

Вторая итерация.

$$x^2 = x^1 + \lambda_1 \nabla f(x^1).$$

Вычислим градиент функции в точке x^1:

$$\nabla f(x^1) = [-4 + 8\lambda_0; -8 + 16\lambda_0] = [0; 0].$$

Вектор-градиент в данной точке обращается в нуль, следовательно точка x^2 является стационарной, а т.к. функция $f(x)$ – вогнутая (матрица Гессе является отрицательно определенной

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \Delta_1 = -2 < 0; \quad \Delta_2 = 4 > 0 \ ) \ ,$$

то точка $x^2 = [2;1]$ является точкой максимума ЦФ:

$$f(x^*) = f(x^2) = 10.$$

Чтобы построить линии уровня $f(x)$, преобразуем эту функцию. Для этого дополним исходное выражение ЦФ до полных квадратов относительно переменных x_1 и x_2, получим:

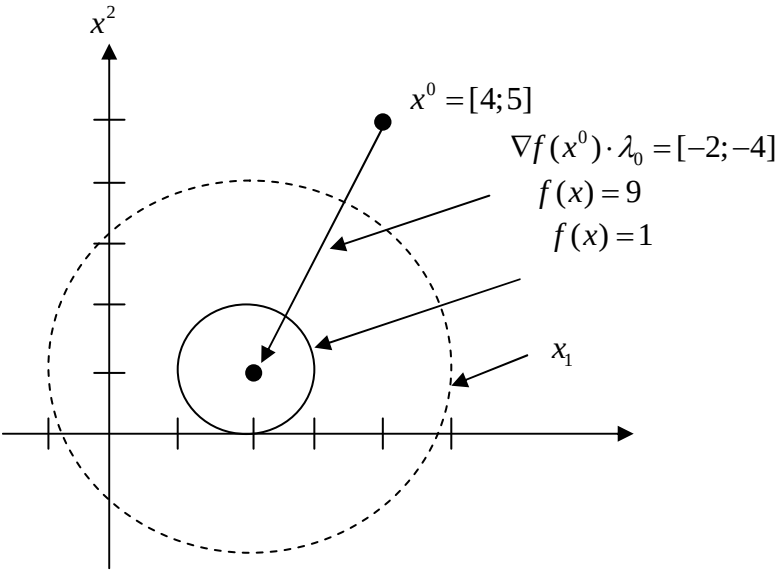
$$f(x) = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 1)^2 + 10 \text{ или } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 10,$$

т.е. линии уровня ЦФ представляют собой концентрические окружности с центром в точке [2; 1].

Составим таблицу:

Таблица

$f(x)$	R (радиус)
10	0
9	1
1	3
0	$\sqrt{10}$
–6	4
–15	5



2. Методом Ньютона найти

$$\min \quad f(x) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2, \text{ где } x^0 = [10;\ 10]^T.$$

Решение. Найдем градиент и матрицу Гессе в начальной точке

$$\nabla f\left(x^0\right)=\left(16x_1+4x_2;\ 10x_2+4x_1\right),$$

$$H_f\left(x^0\right)=\nabla f\left(x^0\right)=\begin{pmatrix}16 & 4\\ 4 & 10\end{pmatrix}.$$

Используя формулу метода Ньютона, получаем:

$$x^1=\left[10;\ 10\right]^T-\frac{1}{144}\cdot\begin{pmatrix}10 & -4\\ -4 & 16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}200\\ 140\end{pmatrix}=\left[0;\ 0\right]^T,$$

что совпадает с точным решением. Так как целевая функция выпукла, то метод сходится за одну итерацию.

Ответ: $x^*=[0;0]^T$.

3. Найти точку минимума целевой функции методом Флетчера-Ривза.

$$f\left(x\right)=4x_1^2+3x_2^2-4x_1x_2+x_1,\ x^0=\left[0;0\right]^T.$$

Решение.

Ш. 1 $\nabla f\left(x\right)=\left(8x_1-4x_2+1,\ 6x_2-4x_1\right),$

$$d_0=-\nabla f\left(x^0\right)=\left[-1;0\right]^T.$$

Ш. 2 Поиск минимума λ вдоль прямой:

$$x^1=x^0-\lambda_0\nabla f\left(x^0\right)\to\lambda_0=1/8;$$

$$x^1=\left[0;\ 0\right]-\left(1/8\right)\ \left[1;\ 0\right]=\left[-1/8;\ 0\right].$$

Ш. 3

$k=1:\nabla f\left(x^1\right)=\left[0;\ 1/2\right];\ \beta_0=1/4;$

$$d_1 = -\nabla f\left(x^1\right) + \beta_0 d_0 = -\left[0;\ 1/2\right] + \frac{1}{4}\ \left[-1;\ 0\right] = \left[-1/4;\ -1/2\right].$$

Ш. 4 Поиск вдоль прямой:

$$x^2 = x^1 + \lambda_1 d_1 \to \lambda_1 = 1/4,$$

$$x^2 = \left[-1/8;\ 0\right] - \frac{1}{4}\times\ \left[1/4;\ 1/2\right] = \left[-3/16;\ -1/8\right],$$

$\nabla f\left(x^2\right) = \left[0;\ 0\right]^T$ – следовательно, имеем стационарную точку.

Решение получено в результате проведения двух одномерных поисков, а т.к. ЦФ – квадратичная функция, то ошибка округления отсутствует.

Таким образом, $x^* = x^2$.

Ответ: $x^* = [-3/16; -1/8]$.

4) Найти минимум ЦФ $f(x)$ методом Дэвидона–Флетчера–Пауэлла:

$$f\left(x\right) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_1 \to \min,\ x^0 = \left[0;\ 0\right].$$

Решение.

Ш. 1 Положить $d_0 = -\nabla f\left(x^0\right) = -\left[1;\ 0\right]$.

Ш. 2 Поиск вдоль d_0 приводит к результату: $\lambda_1 = 1/8$, $x^1 = \left[-1/8;\ 0\right]$.

Ш. 3 $k = 1;\ A^1 = A^0 + A_c^0$;

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$A_c^0 = \frac{\Delta x^0 \Delta x^{0^T}}{\Delta x^{0^T} \Delta g^0} - \frac{A^0 \Delta g^0 \Delta g^{0^T} A^0}{\Delta g^{0^T} A^0 \Delta g^0};$$

$$\Delta \quad x^0 = [-1/8;\ 0] - [0;\ 0] = [-1/8;\ 0];$$

$$\Delta g^0 = \nabla f\left(x^1\right) - \nabla f\left(x^0\right) = [0;\ 1/2] - [1;\ 0] = [-1;\ 1/2];$$

$$A_c^0 = \frac{[-1/8;\ 0]^T [-1/8;\ 0]}{[-1/8;\ 0]\ [-1;\ 1/2]^T} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [-1;\ 1/2]^T [-1;\ 1/2] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{[-1;\ 1/2] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} [-1;\ldots 1/2]^T};$$

$$A_c^0 = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27/40 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix};$$

$$A^1 = A^0 + A_c^0 = \begin{pmatrix} 13/40 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{pmatrix};$$

$$d_1 = -A^1 \nabla f\left(\ x^1\right) = -[1/5;\ 2/5].$$

Ш. 4 Поиск вдоль прямой

$$x^2 = x^1 + \lambda_1 d_1 \to \lambda_1 = 5/16;$$

$$x^2 = [-1/8;\ 0] - (5/16) \times [1/5;\ 2/5] = [-3/16;\ -1/8].$$

Ответ: $x^* = [-3/16; -1/8]$.

5) Минимизировать в пространстве R^n функцию

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + e^{x_1 + x_2}$$

методом градиентного спуска, завершив вычисления при

$$\left| \frac{\partial f(x_k)}{\partial x_i} \right| \le 0.05; \qquad i = 1, 2 \ .$$

Решение. Выбрав начальное приближение $x^0 = [0;0]$; $\lambda_0 = 1$, построим последовательность, записывая результаты вычислений в таблицу.

Таблица

x_1^k	x_2^k	$f(x^k)$	$\frac{\partial f(x^k)}{dx_1}$	$\frac{\partial f(x^k)}{dx_2}$	λ_k	Примечание
0	0	1	1	1	1	Условие (2) нарушено. Уменьшаем λ_0 в 2 раза.
–1	–1	3.135	-	-	-	
0	0	1	1	1	0.5	Уменьшаем λ_0 в 2 раза.
–0.5	–0.5	1.118	-	-	-	
0	0	1	1	1	0.25	Условие (2) выполнено.
–0.25	0.25	0.794	0.106	–0.393	-	
–0.2766	–0.1516	0.774	0.0983	0.0451	0.25	Точность достигнута
–0.3012	–0.1629	0.772	0.0262	–0.023	-	

Ответ: $x^* = [-0.301; -0.162]$; $f^* = 0.772$.

3.3 Контрольная работа №2

Контрольная работа № 2 выполняется после изучения материалов главы «Условная оптимизация», включающей в себя части:

- Линейное программирование.
- Нелинейное программирование.
- Приближенные методы решения ЗЛП на примере транспортной задачи.

Контрольная работа содержит десять вопросов, пять из которых – теоретические и пять – практические.

3.3.1 Примеры решения типовых вариантов

Линейное программирование

1. Привести к стандартной форме записи задачу линейного программирования:

$$\min \quad (5x_1 - 3x_2);$$
$$x_1 - x_2 \geq 2; \; 2x_1 + 3x_2 \leq 4;$$
$$-x_1 + 6x_2 = 10; \; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Любую задачу линейного программирования можно представить в стандартной форме, используя дополнительные переменные. Введя дополнительные переменные $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$ в первом и втором ограничении, получим задачу в эквивалентной стандартной форме:

$$\min \quad (5x_1 - 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4).$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = 2;$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 4;$$
$$-x_1 + 6x_2 = 10;$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0.$$

2. Записать следующую задачу линейного программирования в стандартной форме:

$$\max \; f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3;$$

ограничения:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7, \qquad (1)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2, \qquad (2)$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5, \qquad (3)$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \; (\geq / \leq) \; 0,$$

где x_3 – переменная, не ограниченная по знаку.

Преобразуем эту задачу к стандартной форме (СФ):

1) заменим x_3 на $x_4 - x_5$, где x_4, $x_5 \geq 0$;
2) умножим обе части уравнения (3) на (–1);
3) введем дополнительные переменные x_6, x_7 в ограничения (1) и (2) соответственно;
4) припишем нулевой коэффициент переменным x_6, x_7, а целевую функцию умножим на (–1).

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к следующей задаче линейного программирования в СФ:

$$\min \ [-f(x)] = -x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 3x_5 - 0 \cdot x_6 - 0 \cdot x_7;$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7, \\ &x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2, \\ &-3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 5; \\ &x_j \geq 0;\ j = 1, \ldots, 7. \end{aligned}$$

3. Решить графически ЗЛП:

$$\begin{aligned} &\min f = 40x_1 + 36x_2 \ , \\ &5x_1 + 3x_2 \geq 45; \\ &x_1 \geq 0; x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

В качестве первого шага решения следует определить все возможные неотрицательные значения x_1, x_2, которые удовлетворяют ограничениям. Например, для точки $x = (8;\ 10)$ выполняются все ограничения. Такая точка называется допустимым решением. Множество всех допустимых точек называется *допустимой областью* или ОДР. Решение задачи линейного программирования состоит в отыскании наилучшего решения в ОДР.

Для изображения ОДР следует начертить графики всех ограничений. Все допустимые решения лежат в первом квадранте, так как $x_1, x_2 \geq 0$.

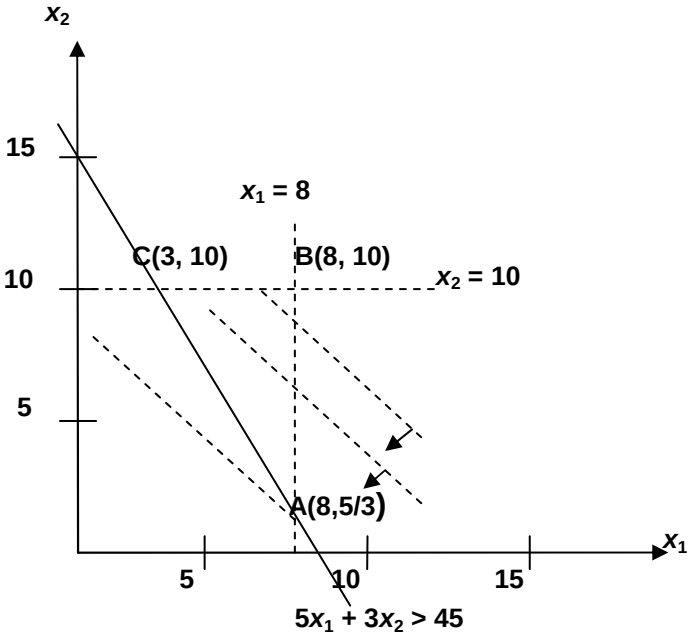


Рисунок 1

В силу ограничения $5x_1 + 3x_2 \geq 45$ все допустимые решения (x_1, x_2) располагаются по одну сторону от прямой $5x_1 + 3x_2 = 45$. Нужную полуплоскость можно найти, проверив, например, удовлетворяет ли начало координат ограничениям задачи. Нужная полуплоскость отмечается штриховкой. Аналогичным образом представлены ограничения $x_1 \leq 8$, $x_2 \leq 10$. ОДР или многогранник $(n > 2)$ решений ABC содержит бесконечное число допустимых точек с минимальным значением целевой функции $f(x)$.

Если зафиксировать значение целевой функции $f = 40x_1 + 36x_2$, то соответствующие ему точки будут лежать на некоторой прямой. При изменении величины f прямая подвергается параллельному переносу. Рассмотрим прямые, соответствующие различным значениям f, имеющие с ОДР хотя бы одну общую точку. Положим, $f_0 = 600$. При приближении прямой к началу координат значение f уменьшается. Ясно, что для прямой, проходящей через угловую точку $A = (8;\ 1,6)$, дальнейшее движение невозможно. Следовательно, $x^* = (8;\ 1,6)$ – оптимальное решение (план) и $f^*(8;\ 1,6) = 377,6$ – оптимальное значение целевой функции.

4. Решить задачу линейного программирования симплекс–методом.

$$f(x) = x_1 + 9 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 + 4 \cdot x_5 + 14 \cdot x_6 \to \min.$$

$$x_1 + x_4 = 20\ ,\ x_2 + x_5 = 50\ ,\ x_3 + x_6 = 30,$$

$$x_4 + x_5 + x_6 = 60;\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве начальной угловой точки x^0 используем базисное решение, соответствующее свободным переменным $x_1,\ x_3$.

Решение: столбцы с номерами 2, 4, 5, 6 матрицы A системы ограничений равенств образуют базисный минор (проверить самостоятельно). С помощью эквивалентных преобразований приводим эту систему к каноническому или ступенчатому виду, где базисными являются переменные x_2, x_4, x_5, x_6.

$$x_2 + x_1 + x_3 = 40,$$
$$x_4 + x_1 = 20,$$
$$x_5 - x_1 - x_3 = 10,$$
$$x_6 + x_3 = 30.$$

Полагая в этих равенствах свободные переменные x_1, x_3 равными нулю $(x_1 = 0,\ x_3 = 0)$, находим $x_2 = 40,\ x_4 = 20,$ $x_5 = 10,\ x_6 = 30$, то есть базисным решением является точка $x^0 = (0,\ 40,\ 0,\ 20,\ 10,\ 30)$.

Так как все базисные переменные в x^0 положительны, данное базисное решение является допустимым (т.е. угловой точкой) и невырожденным.

Исключив с помощью канонической системы базисные переменные в выражении для целевой функции, получим:

$$f(x) = 880 - 7x_1 - 14x_3.$$

Составим СТ 1, соответствующую угловой точке x^0.

Таблица 1

	x_1	x_3	
x_2	1	1	40
x_4	1	0	20
x_5	–1	–1	10
x_5	0	1	***30***
	–7	–14	–880

Среди коэффициентов p_j^0, $j \neq 0$ есть отрицательные – это элементы (–7) и (–14) последней строки СТ 1. Следовательно, угловая точка x^0 не является решением задачи.

Для каждого из отрицательных элементов p_j^0 среди соответствующих коэффициентов $\overline{a}_{ij}^{0}$ (т.е. элементов СТ 1, стоящих в том же столбце, что и p_j^0) есть положительные, значит, возможен переход к новой угловой точке x^1 с меньшим значением $f(x)$.

Найдем разрешающий элемент. В качестве опорного можно взять любой из столбцов таблицы, соответствующих свободным переменным x_1, x_3. Выберем, например, столбец при свободной переменной x_3.

Найдем разрешающую строку. Так как $\min\ (40/1, 30/1) = 30/1$, то разрешающей строкой является строка, соответствующая базисной переменной x_6. Итак, опорный элемент (30) найден, в СТ 1 он выделен.

Заполнив новую СТ 2 по правилам, описанным выше, получим следующую симплекс-таблицу (см. таблицу 2).

Таблица 2

	x_1	x_3	
x_2	***1***	–1	10
x_4	1	0	20
x_5	–1	1	40
x_5	0	1	30
	7	14	– 460

Отметим, что значение ЦФ $f(x)$ в новой угловой точке уменьшилось по сравнению со значениями в исходной: 460 вместо 880.

В нижней строке последней таблицы есть отрицательный элемент (–7), стоящий в столбце при свободной переменной x_1. Кроме того, в этом столбце имеются положительные элементы, поэтому возможно дальнейшее уменьшение $f(x)$ с помощью очередного шага.

На данном шаге выбор опорного столбца однозначен и определяется отрицательным элементом (–7) последней строки. Разрешающая строка находится из условия (5.19): т.к. $\min\ (10/1, 20/1) = 10/1$, то эта строка при базисной переменной x_2. Опорный элемент выделен.

Как и на предыдущем шаге, находим очередную СТ 3 по общим правилам.

В этой таблице оба коэффициента $p_j^2,\ j \neq 0$ в последней строке положительны. Поэтому угловая точка x^2, соответствующая свободным переменным $x_2,\ x_6$, является минимумом целевой функции $f(x)$: $x^* = x^2 = (10,\ 0,\ 30,\ 10,\ 50,\ 0)$. Минимальное значение $f(x)$ со знаком минус записано в правом нижнем углу СТ 3, поэтому $f^* = 390$.

Таблица 3

	x_1	x_3	
x_2	1	–1	10
x_4	–1	1	10
x_5	1	0	50

Продолжение табл. 3

x_5	0	1	30
	7	7	– 390

5. Построить двойственную задачу к ЗЛП в стандартной форме

$$\min Z = 2x_1 - 3x_2 \ ,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \ b_1 = 1 \ , \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 4, \ b_2 = 4 \ , \\ x_1 + x_2 = 3, \ b_3 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \ x_2 >< 0 \ ,$$

т.е. вторая переменная не ограничена по знаку, она может быть как больше 0, так и меньше 0.

Построим двойственную задачу (Д). Так как число ограничений равно трем, то имеем три переменных: u_1, u_2, u_3. ЦФ задачи (Д) имеет вид:

$$\max \ W = UB = u_1 b_1 + u_2 b_2 + u_3 b_3 = u_1 + 4u_2 + 3u_2 \, .$$

В прямой задаче имеем матрицу A: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

В задаче (Д) имеем транспонированную матрицу:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, двойственная задача выглядит так:

$$\max W = u_1 + 4u_2 + 3u_3.$$

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 \le 2 \ ; \ c_1 = 2 \ , \\ -u_1 + 3u_2 + u_3 = -3 \ ; \ c_2 = -3 \ , \end{cases}$$

$$u_1 \le 0 \ ; \ u_2 \ge 0 \ ; \ u_3 >< 0.$$

Нелинейное программирование

1. Методом замены переменных решить задачу нелинейного программирования с ограничениями:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \to \min,$$

$$x_1 - x_2 = 1.$$

Решение: выразим переменную $x_1 = 1 + x_2$ и подставим в ЦФ $f(x)$. Получим:

$$f(x) = (1 + x_2)^2 + x_2^2 \to \min,$$

$$f'(x) = 2 \cdot (1 + x_2) + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,5 \ ; \ x_2 = 0,5.$$

Ответ: оптимальное решение $x^* = [0,5; \ -0,5]^T$.

2. Методом множителей Лагранжа решить следующую задачу оптимизации:

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 \ ,$$

$$h_1(x) = 2x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

Соответствующая задача оптимизации без ограничений записывается в следующем виде:

$$L(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda \cdot (2x_1 + x_2 - 2) \to \min.$$

Решение:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2\lambda = 0 \to x_1^* = -\lambda \ ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0 \to x_2^* = -\frac{\lambda}{2}.$$

Для того чтобы проверить, соответствует ли стационарная точка x^* минимуму, вычислим матрицу Гессе функции $L(x,\lambda)$, рассматриваемой как функция от x,

$$H_L(x,\ \lambda)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

которая оказывается положительно определенной.

Это означает, что $L\ \ (x,\lambda)$ – выпуклая функция. Следовательно, координаты $x^*=(-\lambda,\ -\lambda/2\ )$ определяют точку глобального минимума. Оптимальное значение λ находится путем подстановки значений x_1^* и x_2^* в уравнение ограничений $2x_1+x_2-2=0$, откуда вычисляем значение λ^*:

$$2\lambda+\lambda/2=-2\rightarrow\lambda^*=-0{,}8\,.$$

Таким образом, минимум достигается в точке x^* с координатми $x_1^*=0{,}4$ и $x_2^*=0{,}4$. Значение ЦФ:

$$f^*=\min f(x)=0.8\,.$$

Ответ: $x^*=[0.4;\ 0.4]^T$, $f^*=f(x^*)=0.8$.

3. Найти решение задачи оптимизации на основе необходимых и достаточных условий Куна-Таккера;

$$f(x)=(x_1-1)^2+x_2^2\rightarrow\min;$$
$$g_1(x)=-x_1+x_2^2/5\geq 0.$$

Найти точку минимума x^*.

Решение. Запишем условия Куна-Таккера для данной задачи:

$$L = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - \mu \quad (-x_1 + \frac{x_2^2}{5}),$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1) + \mu = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \dfrac{2}{5}\mu \quad x_2 = 0, \\ \mu \quad g_1(x) = \mu \quad (-x_1 + \dfrac{x_2^2}{5}) = 0; \ \mu \geq 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получим $x_2 = 0$; подставим в третье уравнение, найдем $x_1 = 0$. Тогда из первого уравнения следует $\mu = 2$. Таким образом, мы нашли точку $x^* = [0; \ 0]$, которая может быть точкой минимума. Для этой точки ограничение $g_1(x^*) = 0$, т.е. активно. Проверим выполнение условия: $\nabla g_1(x^*) = [-1; \ 2x_2/5]\big|_{x_2=0} = [-1; \ 0]$. Условие будет выполнено для всех векторов y вида $y = [0; y_2]$. Действительно, имеем:

$$\nabla g_1(x^*) \cdot y = [-1; \ 0] \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -y_1 = 0, \text{ т.е. } y_1 = 0.$$

Матрица Гессе функции L в точке (x^*, μ^*) имеет вид:

$$H_L(x^*, \mu^*) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1,2 \end{pmatrix}; \ \Delta_1 = 2 > 0; \ \Delta_2 = \frac{6}{5} > 0,$$

т.е. матрица H_L положительно определена и, следовательно, для любого вектора $y \neq 0$ имеем $y^T \cdot H_L(x^*, \mu^*) \ \cdot y > 0$, в том числе и для вектора вида $y = [0 \ ; y_2]$.

Таким образом, точка $x^* = [0, 0]$ является точкой строгого локального минимума.

4. Решить задачу оптимизации на основе метода штрафных функций (квадратичный штраф.)

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min,$$
$$h(x) = x_1 + x_2 - 5 = 0.$$

Введем ШФ вида:

$$P(x, R) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + R \cdot (x_1 + x_2 - 5)^2 .$$

Запишем уравнения, определяющие стационарную точку функции $P(x, R)$:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 2 \cdot (x_1 - 4) + 2R \cdot (x_1 + x_2 - 5) = 0,$$
$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 2 \cdot (x_2 - 4) + 2R \cdot (x_1 + x_2 - 5) = 0,$$

откуда следует:

$$x_1 = x_2 = \frac{5R + 4}{2R + 1} .$$

Переходя к пределу, получим:

$$\lim_{R \to \infty} \left(\frac{5R + 4}{2R + 1} \right) = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Таким образом, метод сходится к точке $X^*_{выч} = [2,5;\ 2,5]$ и $f^* = 4,5$.

В таблице приведены координаты стационарных точек ШФ $P\ \ (x, R)$:

Таблица 4

R	$x_1 = x_2$	$P \quad (x, R)$	$f(x)$
0	4,0	0	0
0,1	3,75	0,75	0,2
1	3,0	3,0	2
10	2,57	4,29	4
100	2,51	4,447	4,44
∞	2,5	4,5	4,5

5. Решить задачу оптимизации на основе метода штрафных функций (штраф типа квадрата срезки)

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min,$$
$$g(x) = 5 - x_1 - x_2 \geq 0,$$

ограничение ЗО является неравенством.

Используем штраф типа квадрата срезки.

$$P(x, R) = f(x) + R \cdot (< g(x) >)^2, \text{ где } < \alpha > = \begin{cases} \alpha, & \alpha \leq 0 \\ 0, & \alpha > 0. \end{cases},$$

Для нашего случая:

$$P(x, R) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + R \cdot (< 5 - x_1 - x_2 >)^2.$$

Уравнения, определяющие стационарную точку функции, имеют вид:

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = 2(x_1 - 4) + 2R \cdot (< 5 - x_1 - x_2 >) \cdot (-1) = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) + 2R \cdot (< 5 - x_1 - x_2 >) \cdot (-1) = 0,$$

откуда следует $x_1 = x_2$. С учетом этого получим: $(x_1 - 4) - R \cdot \underbrace{< 5 - 2x_1 >}_{\alpha} = 0$. Проанализируем результаты, когда аргумент оператора срезки $\alpha \le 0$ и $\alpha > 0$. Пусть $\alpha \le 0$, т.е. $2x_1 - 5 \ge 0$. Тогда имеем

$$x_1 = \frac{5R + 4}{2R + 1}.$$

Это получается из выражения $(x_1 - 4) - R \cdot (5 - 2x_1) = 0$. Откуда найдем значение переменной: $\lim\limits_{R \to \infty} x_1 = 2,5$.

Ответ: $x^* = [2,5;\ 2,5]^T$, $f^* = f(x^*) = 4.5$.

6. Решить задачу оптимизации на основе метода штрафных функций (логарифмический штраф).

$$f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \min,$$
$$g(x) = 5 - x_1 - x_2 \ge 0.$$

Данный тип штрафа применительно к задаче является барьерной функцией вида:

$$P(x, R) = f(x) - R \cdot \ln(g(x)).$$

В данном случае:

$$P(x, R) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 - R \cdot \ln(5 - x_1 - x_2).$$

Условия стационарности:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 4) + R \cdot \left[\frac{1}{5 - x_1 - x_2}\right] = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 4) + R \cdot \left[\frac{1}{5 - x_1 - x_2}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \to x_1 = x_2.$$

С учетом этого получим: $2(x_1-4)+\dfrac{R}{5-2x_1}=0$.

Отсюда приходим к уравнению:

$$2x_1^2-13x_1+20-(R/2)=0;\ x_1=\frac{13}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^2-\left(10-\frac{R}{4}\right)}.$$

Один из корней этого уравнения является недопустимым, т.к. выходит за границы допустимой области даже при $R=0$ и отбрасывается, второй допустимый:

$$x_1=\frac{13}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{9+4R}.$$

В пределе получаем:

$$x_1^k=\lim_{R\to 0}\ x_1(R)=2,5;\qquad x_2^k=2,5;\qquad f(x^k)=4,5.$$

Ответ: $x^*=[2,5;\ 2,5]^T$, $f^*=f(x^*)=4.5$.

7. Решить задачу оптимизации на основе метода штрафных функций (штраф – обратная функция).

$$f(x)=(x_1-4)^2+(x_2-4)^2\to\min,$$
$$g(x)=5-x_1-x_2\geq 0.$$

Данный тип штрафа применительно к задаче является барьерной функцией вида:

$$P(x,R)=f(x)+R\frac{1}{g(x)}.$$

Для нашей задачи

$$P(x,R)=(x_1-4)^2+(x_2-4)^2+\frac{R}{5-x_1-x_2}.$$

Исследуем стационарные точки функции $P(x,R)$ при различных R:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial x_1} &= 2\cdot(x_1-4)+\frac{R}{(5-x_1-x_2)^2}\\ \frac{\partial P}{\partial x_2} &= 2\cdot(x_2-4)+\frac{R}{(5-x_1-x_2)^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_1=x_2.$$

Отсюда получим уравнение:

$$4x_1^3-36x_1^2+105x_1-100+R/2=0.$$

Корни полученного уравнения дают нам стационарные точки (см. табл. 5).

Таблица 5

R	$x_1=x_2$	$f(x)$	$g(x)$	$R/g(x)$	$P(x,R)$
100	0,5864	3,3053	3,8272	26,1288	49,4341
10	1,7540	10,089	1,492	6,7024	16,7914
1	2,234	6,2375	0,532	1,8797	8,1172
0,1	2,4113	5,0479	0,1774	0,5637	5,6116
0,01	2,4714	4,6732	0,0572	0,1748	4,848
0,001	2,4909	4,5548	0,0182	0,0549	4,6097
0	2,5	4,5	0,0000	0,0000	4,5

Ответ: $x^*=[2,5;\ 2,5]^T$, $f^*=f(x^*)=4.5$.

Транспортная задача

1. Решить задачу методом северо-западного угла.

Исходные пункты	Пункты назначения 1	2	3	4	Объем пр-ва
1	x_{11} 10	x_{12} 0	x_{13}	x_{14} 11	15
2	x_{21} 12	x_{22} 7	x_{23} 9	x_{24} 20	25
3	x_{31} 0	x_{32} 14	x_{33} 16	x_{34} 18	5
Спрос	5	15	15	10	

Следуя правилу северо-западного узла, начинают с того, что приписывают переменной x_{11} (расположенной в северо-западном угле таблицы) максимальное значение, допускаемое ограничениями на спрос и объем производства. После этого вычеркивают соответствующий столбец (или строку), фиксируя при этом, что остальные переменные вычеркнутого столбца (строки) полагаются равными нулю. Если ограничения, представляемые столбцом и строкой, выполняются одновременно, то можно исключить либо столбец, либо строку.

Далее, в невычеркнутой строке (столбце) максимальное значение приписывается первому невычеркнутому элементу. Процесс завершается, когда остается невычеркнутой одна строка (один столбец).

Применим эту процедуру к нашему примеру

5	x_{12}	x_{13}	x_{14}	15
×	x_{22}	x_{23}	x_{24}	25
×	x_{32}	x_{33}	x_{34}	5
5	15	15	10	

5	10	×	×	15
×	x_{22}	x_{23}	x_{24}	25
×	x_{32}	x_{33}	x_{34}	5
5	15	15	10	

1) $x_{11} = 5$. Вычеркиваем первый столбец. На первую строку остается 10 единиц (15–5=10).

5	10	×	×	15
×	5	x_{23}	x_{24}	25
×	×	x_{33}	x_{34}	5
5	15	15	10	

2) $x_{12} = 10$. Вычеркиваем первую строку. На второй столбец приходится теперь 5 единиц (15–10=5).

5	10	×	×	15
×	5	15	5	25
×	×	×	5	5
5	15	15	10	

3) $x_{22} = 5$. Вычеркиваем второй столбец. На вторую строку остается 20 единиц.

Таким образом, получим следующее базисное решение:
$x_{11} = 5;\ x_{12} = 10;\ x_{22} = 5;\ x_{23} = 15;\ x_{24} = 5;\ x_{34} = 5.$

2. Решить предыдущую транспортную задачу методом наименьшей стоимости.

В таблице переменным x_{12}, x_{31} соответствует минимальная стоимость ($c_{12} = 0,\ c_{31} = 0$). Выберем произвольно x_{12}. Соответствующие значения спроса и предложения определяют $x_{12} = 15$, т.е. и по строке и по столбцу ограничения выполняются. После вычеркивания столбца 2 объем производства в строке 2 остается равным нулю. Теперь среди оставшихся переменных минимальной стоимости соответствует x_{31}. Значение $x_{31} = 5$ удовлетворяет и по строке 3 и по столбцу 1. После вычеркивания строки 3 оставшийся спрос в таблице равен нулю. Наименьший невычеркнутый элемент $- c_{23} = 9$. Находим $x_{23} = 15$ и вычеркиваем столбец 3, т.к. ограничение по нему выполнено.

0 (10)	15 (0)	× (20)	0 (11)	15
× (12)	× (7)	15 (9)	10 (20)	25
5 (0)	× (14)	× (16)	× (18)	5
5	15	15	10	

Наименьший невычеркнутый элемент $c_{11} = 10$; но т.к. ограничения по столбцу 1 и по строке 1 выполнены, то $x_{11} = 0$. После вычеркивания столбца 1 наименьший невычеркнутый элемент $c_{41} = 11$. Соответствующая переменная $x_{14} = 0$. Наконец, осталось $x_{24} = 10$. Суммарные затраты, соответствующие этому базисному решению, равны:

$$0 \cdot 10 + 15 \cdot 0 + 0 \cdot 11 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 0 = 335.$$

3. Решить транспортную задачу с помощью приближенного метода Фогеля.

		Пункты назначения				Объем пр-ва	Штраф
		1	2	3	4		
Исходные пункты	1	x_{11} (10)	x_{12} (0)	x_{13} (20)	x_{14} (11)	15	10
	2	x_{21} (12)	x_{22} (7)	x_{23} (9)	x_{24} (20)	25	2
	3	x_{31} (0)	x_{32} (14)	x_{33} (16)	x_{34} (18)	5	$14 - \max$
Спрос		5	15	15	10		
Штраф		$10 - 0 = 10$	$7 - 0 = 7$	$16 - 9 = 7$	$18 - 11 = 7$		

Так как строка 3 имеет максимальный штраф равный 14 и $c_{31} = 0$ является наименьшим элементом в этой строке, то x_{31} присваивается значение 5, т.е. $x_{31} = 5$. Ограничения по строке и столбцу выполняются одновременно. Пусть вычеркивается столбец 1. Остаток объема производства для строки 3 равен 0, и эта строка на Шаге 3 не используется.

Вычислим новые штрафы.

		Пункты назначения				Объем пр-ва	Штраф
		1	2	3	4		
Исходные пункты	1	10 x_{11}	0 x_{12}	20 x_{13}	11 x_{14}	15	11
	2	12 x_{21}	7 x_{22}	9 x_{23}	20 x_{24}	10	2
	3	0 x_{31}	14 x_{32}	16 x_{33}	18 x_{34}	0	-
Спрос		-	5	15	10		
Штраф		-	7	11	9		

Строке 1 и столбцу 3 соответствуют одинаковые штрафы. Выберем столбец 3. При этом x_{23} принимает значение 15, столбец 3 вычеркивается, а объем производства в строке 2 становится равным $25 - 15 = 10$. Последовательное применение ПМФ позволяет получить следующие результаты:

- $x_{22} = 10$ (вычеркнуть строку 2);
- $x_{12} = 5$ (вычеркнуть столбец 2);
- $x_{14} = 10$ (вычеркнуть строку 1);
- $x_{34} = 0$.

Общие суммарные затраты составляют 315 единиц, что соответствует оптимальному решению.

5. Решить задачу о назначениях (ЗоН) с 3-мя работами и 3-мя станками.

		Станки			Предложение
		1	2	3	
Работы	1	5 x_{11}	7 x_{12}	9 x_{13}	1
	2	4 x_{21}	10 x_{22}	12 x_{23}	1
	3	5 x_{31}	13 x_{32}	16 x_{33}	1
Спрос		1	1	1	

Оптимальное решение ЗоН не изменится, если к любой строке или столбцу матрицы стоимостей прибавить или вычесть постоянную величину. В следующей таблице данного примера нулевые элементы получены путем вычитания наименьшего в каждой строке (столбце) из соответствующей строки (столбца).

		Станки			Предложение	*min*-й элемент
		1	2	3		
Работы	1	0 x_{11}	2 x_{12}	4 x_{13}	1	$p_1 = 5$
	2	4 x_{21}	0 x_{22}	2 x_{23}	1	$p_2 = 10$
	3	2 x_{31}	0 x_{32}	3 x_{33}	1	$p_3 = 13$
Спрос		1	1	1		

Вычитая $q_3 = 2$ из элементов 3-го столбца, последнюю матрицу можно преобразовать так, чтобы она имела как можно больше нулей. Таким образом, получим:

		Станки			Предложение
		1	2	3	
Работы	1	x_{11} **0**	x_{12} 2	x_{13} 2	1
	2	x_{21} 4	x_{22} 0	x_{23} **0**	1
	3	x_{31} 2	x_{32} **0**	x_{33} 1	1
Спрос		1	1	1	

Выделенные в таблице элементы x_{11}, x_{23}, x_{32} соответствуют оптимальному назначению со стоимостью $5+12+13=30$. Заметим, что эта стоимость равна $p_1 + p_2 + p_3 + q_3 = 30$.

К сожалению, не всегда удается определить допустимое назначение столь просто, как в приведенном примере.

6. Решить следующую ЗоН.

		Работа				*min*-й элемент
		1	2	3	4	
Станки	1	x_{11} 1	x_{12} 4	x_{13} 6	x_{14} 3	$p_1 = 1$
	2	x_{21} 9	x_{22} 7	x_{23} 10	x_{24} 9	$p_2 = 7$
	3	x_{31} 4	x_{32} 5	x_{33} 11	x_{34} 7	$p_3 = 4$
	4	x_{41} 8	x_{42} 7	x_{43} 8	x_{44} 5	$p_4 = 5$

Выполняя те же начальные шаги, получим следующую стоимостную матрицу.

		Работа				*min*-й элемент
		1	2	3	4	
Станки	1	x_{11} 0	x_{12} 3	x_{13} 5	x_{14} 2	$p_1 = 1$
	2	x_{21} 2	x_{22} 0	x_{23} 3	x_{24} 2	$p_2 = 7$
	3	x_{31} 0	x_{32} 1	x_{33} 7	x_{34} 3	$p_3 = 4$
	4	x_{41} 3	x_{42} 2	x_{43} 3	x_{44} 0	$p_4 = 5$

В каждой строке и столбце, кроме 3-го, есть нули. Из элементов 3-го столбца вычитаем минимальный $q_{23} = q_{43} = 3$. Получим следующий результат.

		Работа			
		1	2	3	4
Станки		x_{11} 0	x_{12} 3	x_{13} 2	x_{14} 2
		x_{21} 2	x_{22} 0	x_{23} 0	x_{24} 2
		x_{31} 0	x_{32} 1	x_{33} 4	x_{34} 3
		x_{41} 3	x_{42} 2	x_{43} 0	x_{44} 0

В этом случае невозможно найти допустимое решение, состоящее из нулей. Дальнейшая процедура состоит в проведении минимального числа прямых через некоторые строки и столбцы

с тем, чтобы все нули оказались вычеркнутыми. В данном примере необходимо вычеркнуть 1-й столбец, 2-ю и 4-ю строки.

На следующем шаге выбирается наименьший невычеркнутый элемент (в нашем случае это $c_{32} = 1$). Этот элемент вычитается из каждого невычеркнутого элемента таблицы и прибавляется к каждому элементу, стоящему на пересечении вычеркнутых строк и столбцов. В результате получим таблицу, соответствующую оптимальному назначению: $x_{11} = x_{23} = x_{32} = x_{44}$. Соответствующие суммарные затраты равны: $1 + 10 + 5 + 5 = 21$.

Замечание. Если на последнем шаге оптимальное решение не достигнуто, то процедуру проведения прямых для вычеркивания нулей следует повторять до тех пор, пока не будет получено допустимое решение.

		Работа				*min*-й элемент
		1	2	3	4	
Станки	1	$x_{11} = \mathbf{1}$ ***0***	x_{12} 2	x_{13} 1	x_{14} 1	$p_1 = 1$
	2	x_{21} 3	x_{22} 0	$x_{23} = \mathbf{1}$ ***0***	x_{24} 2	$p_2 = 7$
	3	x_{31} 0	$x_{32} = \mathbf{1}$ ***0***	x_{33} 3	x_{34} 2	$p_3 = 4$
	4	x_{41} 4	x_{42} 2	x_{43} 0	$x_{44} = \mathbf{1}$ ***0***	$p_4 = 5$

4 КУРСОВАЯ РАБОТА

Учебная программа по дисциплине «Методы оптимизации» предполагает выполнение студентами курсовой работы (КР). Каждая курсовая работа состоит из двух частей: тестовой задачи оптимизации (ЗО) и ЗО в содержательной постановке. Первая часть курсовой работы посвящена *безусловным методам оптимизации* (одномерным и многомерным). Во второй приведены задачи, связанные с *условной линейной и нелинейной многомерной оптимизацией*. Каждая КР содержит несколько вариантов. Номер Вашего варианта КР определяется путем введения двух последних цифр личного пароля.

Задания могут выполняться на одном из языков программирования Pascal, C или C++ для платформ DOS и Windows и высылаются в виде архивированного (mo_KRN.zip или mo_KRN.rar, где N – номер КР) пакета файлов, который должен содержать:

♦ файлы исходного кода, файлы и/или номер контрольной работы и варианта;

♦ идентификационный файл (about.me), содержащий:

– ФИО и код студента;

– номер специальности;

– наименование системы программирования и версия;

– список каталогов и файлов, входящих в пакет, с описанием каждого;

– дополнительные комментарии;

♦ файл отчета по проделанной работе (mo_KRN.doc) в формате Word 6.0/97 и выше.

Порядок выполнения работы

Работа над курсовым заданием выполняется поэтапно:

1. Во второй части КР необходимо самостоятельно построить математическую модель объекта исследования согласно Вашему варианту КР. Для первой части задания математическая постановка ЗО будет задана.

2. Исследовать каждую задачу оптимизации, т.е. выяснить: размерность, наличие ограничений, вид целевой функции и ог-

раничений – является ли ЦФ унимодальной, квадратичной, выпуклой, сепарабельной и т.п. При необходимости выяснить обусловленность матрицы Гессе. Естественно, что в первой части КР ограничения отсутствуют.

3. Построить или выбрать алгоритм оптимизации в соответствии с результатами этапа 2, а также с требованиями, предъявляемыми к оптимизационному процессу: точность, надежность, скорость сходимости, ограничения требуемой памяти персонального компьютера (ПК), простота реализации, чувствительность к изменениям параметров алгоритма.

4. Реализовать выбранный алгоритм на ПК и провести исследования. В результате исследований желательно выяснить:

♦ сходимость метода (т.е. выполняется ли условие $f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^{k}\right)$) и ее зависимость от значения параметров, используемых в методе;

♦ скорость сходимости и ее зависимость от значения параметров; если скорость сходимости мала, то пояснить и обосновать причину этого;

♦ точность метода (в зависимости от выбранного метода оптимизации, например, для задачи линейного программирования нет необходимости оценивать точность метода).

Точность. Характеристикой точности полученного решения может служить величина абсолютного отклонения значения минимизируемой функции, достигнутого в точке $x^n \in D$, от точного значения ее минимума на множестве D:

$$\delta\left(x\right) = \left| f\left(x^{n}\right) - \min f\left(x\right) \right|, \quad x \in D.$$

Ясно, что чем меньше неотрицательная величина δ, тем точнее полученное решение. Недостатком использования абсолютной погрешности является то обстоятельство, что она меняется при умножении ЦФ на положительную константу α:

$$f\left(x\right) \to \alpha f\left(x\right) \Rightarrow \delta\left(x\right) \to \alpha\delta\left(x\right).$$

Целесообразнее использовать следующую оценку точности:

$$c = \frac{\min f\left(x\right) - f\left(x^{*}\right)}{f\left(x^{*}\right)} \times 100\%,$$

где $f\left(x^*\right)$ – либо точное значение минимума ЦФ, либо полученное «точным» алгоритмом. Алгоритм называется «ε–приближенным», если выполняется неравенство $c \le \varepsilon$.

Параметры алгоритма рекомендуется выбирать следующим образом. Исходя из идеи метода, определяются предельно допустимые значения параметров, а затем в этом интервале выбираются 4-6 точек, которые используются при исследовании алгоритма.

5. Желательно реализовать в программе проверку результатов решения ЗО (для второго задания).

Проверка. Представим любую задачу оптимизации в следующей форме:

$$f\left(x^*\right) = \min_x f\left(x\right),\ \ x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right),$$

$$g_j\left(x\right)\left\{<, \le, =, \ge, >\right\} 0,\ \ j = 1, 2, ..., m.$$

Предположим, что реализованный алгоритм находит некоторое «оптимальное» решение

$$x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right),\ \ f^* = f\left(x^*\right).$$

Проверить, действительно ли найденное решение является оптимальным, можно любым способом, но таким образом, чтобы корректность решения была очевидной. Рассмотрим два варианта доказательства.

1. Табличный способ. В программе необходимо реализовать возможность построения таблицы следующего вида:

Таблица 4.1 – Табличный способ проверки

x_i / i	$x_i^* - ph$	…	$x_i^* - h$	x_i^*	$x_i^* + h$	…	$x_i^* + ph$
1							
2							
…							
n							

В ячейках таблицы приводятся соответствующее значение аргумента и следующие значения ЦФ и ограничений:

$$f\left(x\right)=f\left(x_1^*,x_2^*,...,x_i,...,x_{n-1}^*,x_n^*\right),$$

$$g_j\left(x\right)=g_j\left(x_1^*,x_2^*,...,x_i,...,x_{n-1}^*,x_n^*\right)\left\{<,\le,=,\ge,>\right\}0,$$

$$j=1,2,...,m.$$

То есть в векторе полученного решения варьируется только *i*-я компонента, остальные остаются фиксированными. Переменные *h* (шаг проверки) и *p* (количество шагов) задаются в программе.

Пример. Пусть дана следующая линейная задача оптимизации:

$$f\left(x\right)=2x_1+x_2\to\min,$$

$$g_1\left(x\right)=x_2-4.5\ge 0,$$

$$g_2\left(x\right)=x_1\ge 0,\ g_3\left(x\right)=x_2\ge 0.$$

Два последних ограничения (в виде $x_i \ge 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$) встречаются практически во всех линейных ЗО. Итак, пусть найдено следующее решение: $x^* = (0; 5)$, $f^* = 5.0$. Задаем в программе $h = 0.5$, $p = 2$, после чего построенная таблица должна выглядеть следующим образом:

Таблица 4.2 – Проверка корректности решения

x_i i	x_i^*-2h	x_i^*-h	x_i^*	x_i^*+h	x_i^*+2h
1	x_1=-1.0 f=3.0 g_1=0.5≥0 g_2=–1.0≥0! g_3=5.0≥0	x_1=–0.5 f=4.0 g_1=0.5≥0 g_2=–0.5≥0! g_3=5.0≥0	x_1=0.0 f=5.0 g_1=0.5≥0 g_2=0.0≥0 g_3=5.0≥0	x_1=0.5 f=6.0 g_1=0.5≥0 g_2=0.5≥0 g_3=5.0≥0	x_1=1.0 f=7.0 g_1=0.5≥0 g_2=1.0≥0 g_3=5.0≥0
2	x_2=4.0 f=4.0 g_1=–0.5≥0! g_2=0.0≥0 g_3=4.0≥0	x_2=4.5 f=4.5 g_1=0.0≥0 g_2=0.0≥0 g_3=4.5≥0	x_2=5.0 f=5.0 g_1=0.5≥0 g_2=0.0≥0 g_3=5.0≥0	x_2=5.5 f=5.5 g_1=1.0≥0 g_2=0.0≥0 g_3=5.5≥0	x_2=6.0 f=6.0 g_1=1.5≥0 g_2=0.0≥0 g_3=6.0≥0

Восклицательными знаками обозначены условия, которые при соответствующих значениях вектора x не выполняются. Видно, что найденное решение не оптимально: при $x_1 = 0.0$ и $x_2 = 4.5$ решение удовлетворяет всем ограничениям при меньшем значении целевой функции. Если бы речь шла о решении целочисленной ЗО, то полученное решение было бы верным.

2. Графический способ (более наглядный и более предпочтительный). В программе необходимо реализовать построение графиков ЦФ и ограничений (1.4). Предусмотреть возможность задания любого индекса i.

Пример. Пусть дана следующая нелинейная задача оптимизации:

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + 1 \to \min,$$

$$g_1(x) = (4 - x_1)^3 - x_2 \le 0,$$

$$g_2(x) = x_1 \ge 0.$$

Предположим, было найдено следующее решение: $x^* = (2.85;\ 1.53)$, $f^* = 4.7034$. Проведем проверку. Для $i = 1$ строим графики следующих функций:

$$f(x) = f(x_1, x_2^*) = (x_1 - 1)^2 + (x_2^* - 1)^2 + 1 =$$

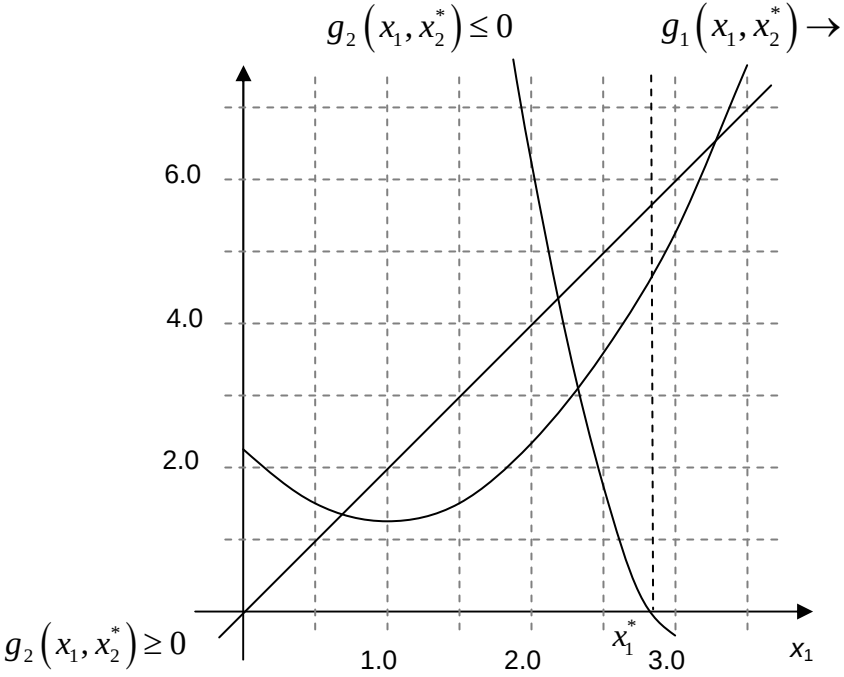
$$= (x_1 - 1)^2 + 1.2809,$$

$$g_1(x) = g_1(x_1, x_2^*) = (4 - x_1)^3 - x_2^* =$$

$$= (4 - x_1)^3 - 1.53 \le 0,$$

$$g_2(x) = g_2(x_1, x_2^*) = x_1 \ge 0.$$

Программа должна нарисовать приблизительно следующий рисунок:



Для i = 2 строим графики функций:

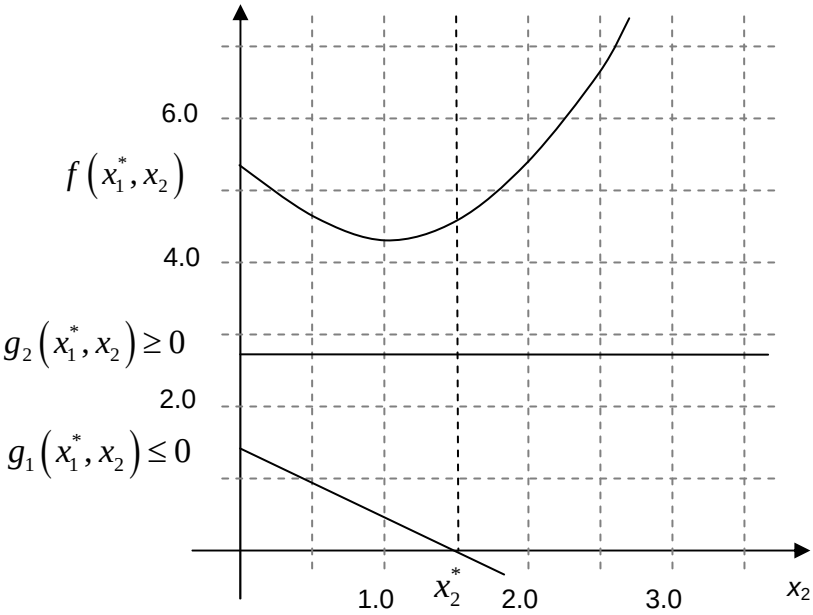
$$f(x) = f\left(x_1^*, x_2\right) = \left(x_1^* - 1\right)^2 + \left(x_2 - 1\right)^2 + 1 =$$

$$= 4.4225 + \left(x_2 - 1\right)^2,$$

$$g_1(x) = g_1\left(x_1^*, x_2\right) = \left(4 - x_1^*\right)^3 - x_2 =$$

$$= 1.520875 - x_2 \le 0,$$

$$g_2(x) = g_2\left(x_1^*, x_2\right) = x_1^* = 2.85 \ge 0.$$



Видно, что решение верное, так как в найденной точке наблюдается минимум целевой функции при условии удовлетворения всех ограничений. Небольшая погрешность объясняется неточностью нелинейных методов.

6. Провести анализ результатов и выработать рекомендации по улучшению работы алгоритма.

7. Оформление отчета. Результаты исследований могут быть оформлены в виде таблицы, например:

Таблица 1.3 – Результаты исследований

Параметр 1	…	Параметр *n*	Заданная точность ε	Сходимость метода	Скорость сходимости	Достигнутая точность

Желательно (т.е. в случае размерности ЗО не выше двух) осуществить визуализацию результатов работы алгоритма в ви-

де графической иллюстрации линий уровня и траектории спуска в точку экстремума. Чем больше указанных пунктов реализовано, тем больше вероятность получения хорошей оценки курсовой работы.

Курсовой проект оформляется в виде пояснительной записки (ПЗ) объемом 15 – 20 листов формата А4.

Рекомендуется следующая структура отчета (ПЗ):

1. Титульный лист.
2. Задание на курсовое проектирование.
3. Содержание.
4. Введение.
5. Постановка задачи.
6. Исследование задачи оптимизации.
7. Выбор и обоснование алгоритма оптимизации.
8. Описание алгоритма и его схема.
9. Исследование работы алгоритма.
10. Анализ результатов.
11. Заключение.
12. Список литературы.
13. Приложения (графическая иллюстрация результатов работы алгоритма, листинг программы).

5 РУКОВОДСТВО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНИКА

В данном разделе приводится руководство пользователя электронного обучающего комплекса (ЭОК) «Методы оптимизации». Приведенные сведения верны для оригинальных версий программного продукта. Если в исполняемые модули ЭОК или в модули данных были внесены несанкционированные авторами изменения, корректность функционирования ЭОК не гарантируется, а претензии от пользователей не принимаются.

Коллектив авторов желает Вам приятной работы с ЭОК «Методы оптимизации».

5.1 Системные требования

Минимальные системные требования для работы с электронным обучающим курсом «Методы оптимизации»:

- Процессор с тактовой частотой 400MHz.
- 16M свободной оперативной памяти.
- SVGA видеокарта и монитор, поддерживающие разрешение 800 на 600 пикселей и глубину цвета 32 бита (True Color).
- 8X привод CD-ROM или DVD-ROM.
- Манипулятор типа «мышь».

Когда речь идет о свободной оперативной памяти, имеется в виду объем памяти, не используемой во время работы ЭОК операционной системой (ОС) и другими прикладными и системными программами (драйверами, сервисами и др.).

Рекомендуемые системные требования:

- Процессор с тактовой частотой 600MHz и выше.
- 32M и более свободной оперативной памяти.
- SVGA видеокарта и монитор, поддерживающие разрешение не ниже 1024 на 768 пикселей и глубину цвета 32 бита (True Color).
- 24X привод CD-ROM или DVD-ROM.
- Звуковая карта.
- Колонки.
- Манипулятор типа «мышь».

При работе ЭОК с компакт-диска нет необходимости копировать какие-либо компоненты ЭОК на жесткий диск. При работе ЭОК с жесткого диска требуется около 260М свободного места.

Требования к программной совместимости:

❑ Наличие ОС семейства Windows. Корректное функционирование ЭОК гарантируется для ОС Windows версий 98/NT4.0 и выше.

❑ Установленные драйвера для просмотра видео в формате MPEG4 со звуком, сжатым в формате MP3 или AC3 (их можно найти в папке «Drivers» на компакт-диске ЭОК, или в Internet).

❑ Размер экрана не должен быть меньше, чем 800 на 600 пикселей (рекомендуется разрешение 1024 на 768 пикселей). Убедительная просьба использовать стандартные для ОС Windows размеры экрана с отношением ширины и высоты как 4:3 (800x600, 1024x768, 1152x864, 1280x960, 1600x1200 и т.д.).

❑ Поддержка 32-битной палитры (True Color).

❑ Использование обычного размера системного шрифта (96 dpi, то есть на один дюйм изображения должно приходиться 96 пикселей). Для крупного размера (125% обычного, что соответствует 120 dpi) и нестандартных размеров системных шрифтов корректность отображения информации в различных компонентах ЭОК не гарантирована.

❑ Для просмотра описания вариантов курсовых работ по различным предметным областям, входящих в состав ЭОК, требуется внешний редактор, поддерживающий формат RTF (например, Microsoft Word версии 97 и выше).

Некорректное отображение учебной информации в некоторых компонентах ЭОК (непропорциональное масштабирование, нарушение отображения цвета и т.п.) может быть связано с использованием неподходящих размеров системного шрифта, размеров экрана и глубиной палитры. Изменить их, например, в Windows 98, можно следующим способом:

1. Щелкните правой кнопкой мыши (левой, если мышь настроена для левши) на пустой области экрана, появится всплывающее меню работы с объектами экрана.

2. Выберите пункт «Свойства», появится диалог настройки свойств экрана.

3. В данном диалоге выберите закладку «Настройка». Здесь, в элементах управления «Цветовая палитра» и «Область экрана», Вы можете установить требуемые значения глубины палитры и размеров экрана, если они не соответствуют требуемым.

4. Нажмите на этой закладке кнопку «Дополнительно…», появится диалог дополнительных свойств монитора и видеокарты.

5. Выберите в данном диалоге закладку «Общие».

6. В окне выпадающего списка «Размер шрифта» отображается текущий размер системного шрифта.

Если используется крупный или нестандартный размер, для изменения настройки необходимо выполнить следующие действия.

1. Закройте все запущенные программы, в том числе компоненты ЭОК.

2. Выберите в указанном выпадающем списке пункт «Мелкий шрифт».

3. Нажмите кнопку «ОК», произойдет возврат в диалог свойств экрана.

4. Нажмите кнопку «Закрыть». Windows предложит Вам произвести перезагрузку компьютера, после чего будет использоваться требуемый размер системного шрифта.

В зависимости от операционной системы, установленной на Вашем компьютере, эти действия могут быть несколько другими.

5.2 Запуск компонентов электронного обучающего курса

Для централизованного запуска всех компонентов ЭОК необходимо воспользоваться ядром курса – программой «MO.EXE», расположенной в корневой директории компакт-диска. Программа разработана с помощью пакета EduCAD Presentation и включает стандартные элементы работы с презентациями, созданными в рамках данного пакета. Интерфейс основного окна программы разбит на два фрейма.

В левом фрейме находятся кнопки, позволяющие выбрать необходимый вид учебной информации: мультимедиа, теоретический лекционный материал, практические работы или контроль знаний. Последняя кнопка обеспечивает выход из ЭОК.

Правый фрейм отображает содержание учебной информации, соответствующее ее виду:

Мультимедиа-информация, включающая анимированную презентацию, вводную видеолекцию по дисциплине «Методы оптимизации», а также анимированные презентации, освещающие основные разделы лекционного курса.

Отображается содержание лекционного материала. При выборе ссылок, расположенных на фрейме, возможен запуск модуля лекционного материала, открытого на странице его главного содержания, а также на любом пункте главного содержания.

Содержит ссылки на модули практических работ, представляющих собой многоуровневые интерактивные тренажеры, и на модуль генерации заданий на курсовое проектирование.

Здесь находятся три ссылки на модули, отвечающие за контроль знаний студентов. Первый модуль обеспечивает текущий самоконтроль знаний, второй – выдачу вариантов контрольных работ, третий – подготовку к экзамену.

Существует демо-версия ЭОК (о том, что Ваша версия ЭОК является демонстрационной, должно быть написано на конверте компакт-диска и в заголовке главного окна ядра курса). В демоверсии отсутствуют некоторые из перечисленных компонентов ЭОК, в связи с чем при выборе ссылок на них появляется сообщение, что компонент недоступен, так как данная версия программы является демонстрационной.

5.3 Структура мультимедиа-информации

В состав ЭОК «Методы оптимизации» включены три вида мультимедиа-информации:

1. Анимированная лекция, рассказывающая об ЭОК и его авторах и специальностях, на которых изучается дисциплина «Методы оптимизации».

2. Вводная видеолекция, освещающая задачи и историю развития методов оптимизации.

3. Ряд анимированных лекций, освещающих основные разделы лекционного курса: введение, основные понятия и определения, безусловная одномерная и многомерная оптимизация, линейное и нелинейное программирование, вариационное исчисление и основы теории оптимального управления.

Для всех видов мультимедиа-информации возможны остановка воспроизведения и перемотка, доступные с помощью элементов управления в нижней части фрейма. Там же отображается текущая позиция воспроизведения.

5.4 Работа с лекционным материалом

Модуль, представляющий лекционный материал по дисциплине «Методы оптимизации», выполнен с помощью пакета EduCAD Textbook 2.0, поэтому работа с ним включает те же действия, что и для подобных модулей по другим дисциплинам, созданным в рамках данного пакета.

Запуск программы EduCAD Textbook 2.0 Viewer, обеспечивающей просмотр лекционного материала, возможен из ядра курса, либо из директории «Lections», расположенной на компакт-диске с курсом.

Лекционный материал представляет собой гипертекстовый документ, разбитый на отдельные фреймы (кадры, страницы). Выбирая встречающиеся в тексте ссылки, Вы можете осуществлять переход к другим фреймам или к фреймам других уровней иерархии, появляющихся в специальных панелях. Скрыть такую панель можно с помощью щелчка мыши или нажатия клавиши «Escape». Ниже приводится список других команд, включающий их описание, горячие клавиши и вид кнопок быстрого доступа.

Горячая клавиша	Кнопка быстрого доступа	Описание команды
Ctrl+Left		Переход к началу раздела
Left		Переход к предыдущей странице
Space		Оставить закладку на странице (или убрать, если она уже есть)
Right		Переход к следующей странице
Ctrl+Right		Переход в конец раздела
		Сквозное пролистывание учебного материала (без учета разделов)
PgUp		Возврат назад по истории перемещений (на один шаг или на выбранную позицию)
PgDn		Переход вперед по истории перемещений (на один шаг или на выбранную позицию)
		Переход к оставленной закладке
Esc		Переход к содержанию раздела
Gray +		Увеличить размер фрейма
Gray –		Уменьшить размер фрейма
		Включить или выключить всплывающие подсказки
		Уменьшить или увеличить размер кнопок
F1		Помощь
Ctrl+Space		Запустить или остановить воспроизведение мультимедиа-информации
Ctrl+PgUp		Перемотка потока мультимедиа вперед на 10% длины трека
Ctrl+PgDn		Перемотка потока мультимедиа назад на 10% длины трека
Alt+F4		Выход из программы

5.5 Практические работы

Практические работы представляют собой шесть независимых модулей, запустить которые можно двумя способами:

1. Из директории «Practice\PracticeN» компакт-диска ЭОК, где N – номер практической работы (от 1 до 6), которую Вы желаете запустить. Исполняемый файл имеет имя «PracticeN.exe».
2. Из ядра ЭОК.

5.5.1 Начало работы

Структура практических работ одинакова, поэтому, освоившись с одной работой, Вы сможете работать со всеми другими, не затрачивая времени на изучение их интерфейса. Ход выполнения практической работы представлен чередой кадров (фреймов, окон), сменяющих друг друга.

Каждая практическая работа начинается с кадра «Введение». В нижней части каждого кадра Вы можете увидеть инструментальную панель. В правой части панели расположено окно подсказки, содержащее указание по дальнейшей работе с программой на любом этапе ее выполнения. Кнопки имеют следующее назначение:

Вид кнопки	Описание
	Перейти на предыдущий кадр
	Выйти из программы
	Перейти на следующий кадр
	Перейти на начало решения задачи

Вид кнопки	Описание
	Сделать шаг назад
	Сделать шаг вперед
	Решить задачу до конца

Если Вы не уверены в назначении какого-либо элемента управления, просто подержите указатель мыши на нем несколько секунд, появится всплывающая подсказка, поясняющая его назначение.

Маркер в виде зеленой галочки, стоящий возле одного из пунктов возможных дальнейших действий, обозначает Ваш текущий выбор. Если Вы с ним согласны, просто нажмите кнопку «Далее». Если же Вы желаете выбрать другой пункт, щелкните на нем мышью, программа учтет Ваш выбор и сразу перейдет к следующему кадру.

Следующий кадр предназначен для выбора изучаемого алгоритма. Чтобы продолжить работу, Вам необходимо либо нажать кнопку «Далее», либо щелкнуть мышью на любом из приведенных алгоритмов. На этой форме так же присутствует кнопка «?», по нажатию которой загрузится модуль лекционного материала, открытый на разделе, посвященном изучаемой группе алгоритмов.

5.5.2 Формирование задачи оптимизации

На данном кадре Вам предоставляется возможность сформировать произвольную задачу оптимизации, решаемую выбранным алгоритмом. Для ввода задачи необходимо заполнить приведенный шаблон.

Для того, чтобы задать минимизируемую функцию, можно посмотреть справку (кнопка «?»). В появившемся окне Вы уви-

дите информацию о том, как задать функцию с клавиатуры. Функция задается аналитически, аргументами могут быть числовые константы и переменные, обозначаемые латинской буквой X (без учета регистра). В некоторых практических работах, например, в четвертой, необходимо задать функции двух переменных. В этом случае переменные должны называться X1 и X2. В третьей работе используются переменные X и Y.

В практических работах 5 и 6 задачи оптимизации задаются в виде матриц. Для удобства в этих работах предусмотрены возможности загрузки и сохранения матриц, а также их очистки.

При нажатии кнопки «Далее» появиться новый кадр решения задачи.

5.5.3 Работа с деревом алгоритма

Появившийся кадр содержит:

1) дерево алгоритма (правая верхняя часть);
2) окно просмотра состояния работы алгоритма (под деревом);
3) окно графического представления работы алгоритма.

Обратите внимание, что неактивные ранее кнопки на панели управления окрасились в темно-синий цвет, теперь они активны.

На данном кадре Вам в наглядной форме представлена работа выбранного вами алгоритма по решению задачи оптимизации. Вы имеете возможность пошаговой прогонки алгоритма как вперед, так и назад. В режиме изучения алгоритмов Вы можете «проскакивать» целые группы подпунктов алгоритма, свернув их в один большой пункт нажатием мыши на значке «минус» рядом с раскрытым узлом дерева. Закрытые узлы, обозначенные «плюсом», можно развернуть таким же образом. Детально изучите работу алгоритма, отмечая изменения контрольных параметров, представленных в окне просмотра состояния (под деревом алгоритма).

Если Вы готовы проверить свои знания, нажмите кнопку «Далее». Произойдет переход на кадр выбора алгоритма. Нажав кнопку «Назад», выберите на появившемся кадре легкий или сложный тренажер. Затем перейдите далее к кадру работы с деревом алгоритма.

Возьмите лист бумаги и ручку. Глядя на дерево алгоритма, проделайте вычисления по текущему его шагу. Компьютер, проделывая параллельные вычисления, будет выводить некоторые контрольные значения в окно состояния. Другие же контрольные значения потребуется ввести Вам. Соответствующее поле подсветится и появится подсказка о том, что именно нужно ввести.

Отличие сложного тренажера от легкого заключается в том, что при неправильном вводе легкий тренажер продолжит работу, уведомив Вас об ошибке, в то время как сложный будет ожидать корректного ответа.

5.5.4 Дополнительные возможности

В лабораторных работах 4 и 5 на кадре формирования задачи оптимизации присутствует специальная кнопка, вызывающая библиотеку функций. При ее нажатии происходит переход к демонстрационному окну. Дважды щелкнув мышкой в окне, Вы увидите диалоговую панель. Двойным же щелчком она убирается. Нажмите кнопку «Обновить» – кнопка «утопится». Дождитесь ее возвращения в нормальное состояние (на медленных компьютерах это может занять до десятка секунд), на экране появится трехмерное изображение функции, введенной в выпадающем списке. Вы можете ввести туда любую свою функцию для исследования. Поэкспериментируйте с элементами управления, расположенным в закладках «Сплошной», «Сетка», «Уровни» и «Точки» – их смысл станет Вам сразу же понятен.

Самыми важными параметрами визуализации являются границы области отсечения – того параллелепипеда, за пределами которого функция не рисуется. Границы задаются:

– по оси абсцисс полями слева и справа от текста «< X <»;

– по оси ординат полями слева и справа от текста «< Y <»;

– по оси аппликат полями слева и справа от текста «< Z <».

«Количество узлов» задает количество узлов сетки интерполирования. Чем больше это значение, тем лучше получится изображение, однако рисоваться оно будет медленнее. Параметр «Уровни» задает количество визуализируемых линий уровня.

Данный кадр «Библиотека функций» полезен для нахождения начальных точек для алгоритмов безусловной оптимизации функций двух переменных.

В лабораторных работах 1–4 имеется возможность сравнения работы вычислительных алгоритмов по двум параметрам:

– количеству итераций, потребовавшихся алгоритму для достижения заданной точности;

– точности, достигнутой алгоритмом по прохождении заданного числа итераций.

Для этого перейдите к кадру «Выбор режима работы», выберите пункт «Изучить работу алгоритмов». Далее, на следующем кадре выберите пункт «Сравнение работы алгоритмов», потом введите параметры задачи оптимизации и нажмите кнопку «Далее». Результаты сравнения будут представлены в виде гистограмм.

5.6 Контроль знаний

Раздел контроля знаний в ЭОК «Методы оптимизации» включает в себя модуль самостоятельного тестирования и модули генерации заданий для контрольных и курсовых работ. Выполненные контрольные и курсовые работы отправляются в центр ДО для проверки.

5.6.1 Самостоятельное тестирование

Запуск программы, осуществляющей контроль знаний, производится либо из ядра курса, либо из директории «Control\Tests» компакт-диска.

Проверка знаний возможна в двух вариантах: самостоятельное и контрольное тестирование. Выбор типа тестирования осуществляется переключателем, доступным после запуска программы. Переключением флажка «Ограничение тестирования по времени» можно включить или отключить временной контроль при проверке знаний.

❑ При самостоятельном тестировании необходимо ответить на 10 вопросов, случайным образом выбранных из банка вопросов.

- Контрольное тестирование осуществляется по указанию преподавателя. Необходимо ответить на 10 вопросов, но после завершения тестирования дается еще две попытки улучшить результат.

Тестирование начинается после нажатия кнопки «Начать тестирование» и может быть прервано в любой момент нажатием кнопки «Отменить тестирование». Для ответа на тестовый вопрос необходимо выбрать единственно верный вариант из предложенного списка вопросов, либо ввести число или вектор (в зависимости от типа вопроса).

После завершения тестирования Вам будет поставлена оценка и выдан список вопросов, на которые дан неверный ответ. Оценка ставится исходя из набранного числа баллов. Каждый верный ответ оценивается от одного балла (за вопросы, где нужно выбрать ответ из списка предложенных) до трех баллов (за вопросы, где нужно ввести вектор решения):

- Оценка «отлично» ставится при правильном ответе на 95% вопросов.
- Оценка «хорошо» ставится при правильном ответе на 80% вопросов.
- Оценка «удовлетворительно» ставится при правильном ответе на 60% вопросов.
- При ответе менее чем на 60% вопросов ставится оценка «неудовлетворительно».

Нажатием кнопки «Завершение тестирования» программа переходит в режим выбора типа тестирования.

5.6.2 Контрольные работы

Запуск генератора контрольных работ производится из ядра курса или из директории «Control\Control» компакт-диска ЭОК.

Помощь по выполнению контрольных работ можно получить, нажав кнопку «Помощь». Для получения списка вопросов к контрольным работам необходимо:

1. Выбрать контрольную работу (первую или вторую).
2. Выбрать вариант контрольной работы. Для выбора варианта введите две последние цифры личного пароля.

3. После выполнения пунктов (1) и (2) нажать кнопку «Продолжить».

Полученный список вопросов можно распечатать, выбрав в меню команду «Печатать вопросы». Выбрать принтер, которым осуществляется печать, можно с помощью команды «Выбор принтера» в меню.

5.6.3 Курсовое проектирование

Запуск генератора заданий на курсовое проектирование производится из ядра курса или из директории «Course» компакт-диска ЭОК.

Задание на выполнение курсового проектирования можно получить, нажав кнопку «Задание». Полученное задание является общим для всех студентов, его можно распечатать на принтере, выбрав в меню команду «Печать». Для получения индивидуального задания к курсовому проектированию необходимо:

1. Выбрать вариант курсового проектирования. Для выбора варианта введите две последние цифры личного пароля.
2. Нажать кнопку «Продолжить».

Полученные индивидуальные задания (задачу безусловной оптимизации и задачу линейного программирования) можно распечатать, выбрав в меню команду «Печатать вопросы». Выбрать принтер, которым осуществляется печать, можно с помощью команды «Выбор принтера» в меню.

5.7 Подготовка к экзамену

Запуск модуля подготовки к экзамену возможен как из ядра курса, так и с помощью исполняемого файла CHELP.EXE, запущенного с параметром EXAM.BIN. Данные файлы расположены в директории «Control\Exam» компакт-диска.

Модуль содержит банк вопросов, задаваемых при сдаче экзамена, но в сокращенном объеме.

6 СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

6.1 Основная литература

1. Мицель А.А., Шелестов А.А. Методы оптимизации. Часть 1: Учебное пособие. – Томск: ТМЦ ДО, 2002. – 192 с.

2. Мицель А.А., Шелестов А.А. Методы оптимизации. Часть 2: Учебное пособие. – Томск: ТМЦ ДО, 2002. – 73 с.

3. Рубан А.И. Методы оптимизации: Учебное пособие. Изд. 2-ое исправ. и дополн. – Красноярск: НИИ ИПУ, 2001. – 528 с.

4. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986.

6.2 Дополнительная литература

1. Сборник задач по математике для втузов. Ч.4. Методы оптимизации / Вуколов и др.; под ред. А.В. Ефимова. – М.: Наука, 1990.

2. Габбасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. – Минск: Изд-во БГУ, 1988.

3. Карманов В.Г. Математическое программирование: Учебное пособие. – М.: Наука, 1989.

4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.– М.: Мир, 1991.

5. Аоки М. Введение в методы оптимизации. – М.: Наука, 1988.

6. Гилл Ф. и др. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1992.

7. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование: Учебное пособие для студентов втузов. – М.: Наука, 1989.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
(Форма титульного листа контрольной работы)

Министерство образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №__
по дисциплине «Методы оптимизации»

Выполнил
Студент П. В. Основоположников
(шифр)
(код доступа)
(дата выполнения работы)

2004

ПРИЛОЖЕНИЕ Б
(Пример оформления пояснительной записки по курсовой работе)

Министерство образования Российской Федерации

ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Факультет систем управления (ФСУ)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

ФОРМИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ СОСТАВОВ

Пояснительная записка к курсовому проекту по дисциплине «Методы оптимизации»

Выполнил: студент гр. 435-1

Романенко В.В.

«_5_» ____мая____ 2004 г.

Проверил: руководитель проекта

д.т.н., профессор кафедры АСУ
Мицель А.А.

«_6_» ____мая____ 2004 г.

2004

Министерство образования Российской Федерации
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ (ТУСУР)

Кафедра автоматизированных систем управления (АСУ)

УТВЕРЖДАЮ:
Зав. кафедрой АСУ
А. М. Кориков
« 20 февраля » 2004 г.

ЗАДАНИЕ

на выполнение курсового проекта по дисциплине «Методы оптимизации» студенту 435-1 группы Романенко В. В.

1 Тема работы: Построение математической модели оптимизационной задачи и ее решение
2 Срок сдачи законченной работы: « 30 мая » 2004 г.
3 Перечень вопросов, подлежащих разработке
3.1 Разработать формат входных и выходных данных
3.2 Разработать схему интерфейса с пользователем
3.3 Составить программу
3.4 Отладить программу на компьютере
3.5 Предусмотреть в программе обработку ошибочных ситуаций
4 Содержание пояснительной записки
4.1 Введение
4.2 Технические характеристики
4.2.1 Постановка задачи
4.2.2 Исследование задачи оптимизации
4.2.3 Описание алгоритма
4.2.4 Исследование работы алгоритма
4.2.5 Выходные данные
4.2.6 Программное обеспечение
4.3 Руководство пользователя
4.3.1 Запуск программы

4.3.2 Возможные варианты команд внутри программы

4.3.3 Сообщения, выдаваемые в ходе выполнения программы и соответствующие действия пользователя

4.4 Заключение

5 Приложения

Дата выдачи задания: «5 марта » 2004 г.

Руководитель работы: А. А. Мицель

Задание приняли к исполнению «10 марта » 2004 г.

_____ _____

СОДЕРЖАНИЕ

1 Введение....4
2 Технические характеристики....5
2.1 Постановка задачи....5
2.2 Исследование задачи оптимизации....5
2.3 Описание алгоритма....6
2.3.1 Симплекс-метод....6
2.3.2 Метод Гомори....9
2.4 Исследование работы алгоритма....10
2.4.1 Пример задачи при наличии решения....10
2.4.2 Пример задачи, не имеющей решения....11
2.5 Выходные данные....12
2.6 Программное обеспечение....12
3 Руководство пользователя....13
3.1 Запуск программы....13
3.2 Возможные варианты команд внутри программы....13
3.3 Сообщения, выдаваемые в ходе выполнения программы и соответствующие действия пользователя....13
4 Заключение....14
5 Приложения....15
Приложение А. Список использованной литературы....15
Приложение Б. Окно вывода карты путей....15
Приложение В. Окно вывода результатов....15
Приложение Г. Листинг процедур оптимизации....16

1 ВВЕДЕНИЕ

В повседневной жизни человек постоянно сталкивается с тем, что в математике называется задачами оптимизации, решая их интуитивно. Например, это может быть проблема распределения свободного времени или попытка обойти достопримечательности города по кратчайшему маршруту.

Реально рассматриваемые на практике задачи оптимизации значительно сложнее и требуют специальных методов решения. В зависимости от типа решаемой задачи эти методы можно разделить на линейные, нелинейные и динамические.

В данном курсовом проекте рассматривается задача формирования оптимальных железнодорожных составов. Несмотря на то, что населенные пункты и соединяющие их железнодорожные ветки образуют граф и, следовательно, полное решение задачи потребовало бы динамических методов решения, в данной реализации были сделаны некоторые допущения, а задача сведена к линейной. В частности, было предположено, что расписание движения поездов уже существует и требуется лишь определить оптимальное количество вагонов, цепляемых к локомотиву на различных участках пути.

К достоинствам постановки задачи относится то, что, во-первых, населенные пункты образуют граф, а во-вторых, рассматривается формирование составов из вагонов разных типов. Это приближает постановку задачи к реальной, делая возможным ее использование на практике для подбора оптимального количества вагонов, подцепляемых к локомотивам на существующих железнодорожных маршрутах.

2 ТЕХНИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

2.1 Постановка задачи

Итак, задан граф, вершинами которого являются населенные пункты, а ребрами – соединяющие их железнодорожные ветки, по которым ходят поезда. Известны среднестатистические данные о количестве пассажиров, проезжающих за рассматриваемый период между этими городами в разных типах вагонов, вместимость вагонов различного типа, их количество в парке, а также максимальное количество локомотивов и вагонов, проходящих по каждой ветке за тот же период. Вводятся также следующие коэффициенты:

1) стоимости прогона вагона

$$K_{1k},\ k = 1, 2, ...m,$$

где m – количество различных типов вагонов. Расходы на вагон типа k находятся по следующему выражению:

$$R = K_{1k} \cdot L, \tag{2.1}$$

где L – расстояние, проезжаемое вагоном.

2) стоимости прогона локомотива K_2.

Расходы на локомотив находятся как

$$R = K_2 \cdot L; \tag{2.2}$$

3) прибыли от пассажира

$$K_{3k}, k = 1, 2, ..., m.$$

Аналогично первому случаю, прибыль от одного пассажира, путешествующего вагоном типа k, составляет

$$D = K_{3k} \cdot L. \tag{2.3}$$

Необходимо, используя эти данные, сформировать оптимальные составы, т.е. определить количество вагонов каждого типа, проходящих по каждой ветке за рассматриваемый период. При этом доход от эксплуатации парка вагонов должен быть максимальным.

2.2 Исследование задачи оптимизации

Пусть n – число городов, m – число типов вагонов. Анализируя поставленную задачу, можно заметить, что практически все данные удобно представить в ЭВМ в виде матриц (векторов):

а) A_{ijk} – матрица пассажиров. Это количество пассажиров, переезжающих из города i в город j вагоном класса k (i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., m).

б) B_k – вектор вместимости вагонов. Это количество пассажиров, которых может вместить один вагон типа k (k = 1, 2, ..., m).

в) P_k – вектор общего количества вагонов k-го типа в парке (k = 1, 2, ..., m).

г) L_{ijz} – матрица поездов (z = 1, 2), где L_{ij1} – это количество вагонов в одном поезде из i-го города в j-ый, а L_{ij2} – соответствующее количество поездов (i = 1,2, ..., n; j = 1, 2, ..., n).

д) $k1_k$ – вектор коэффициентов стоимости прогона вагона (k = 1, 2, ..., m).

е) $k2$ – коэффициент стоимости прогона локомотива.

ж) $k3_k$ – вектор коэффициентов прибыли от пассажира (k = =1, 2, ..., m).

з) N_{ijk} – результат решения задачи, т.е. матрица количества вагонов типа k, следующих из города i в город j (i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n; k = 1, 2, ..., m).

и) C_{ij} – модифицированная матрица смежности,

$$C_{ij} = \begin{cases} L, & \textit{если ветка между пунктами } i \textit{ и } j \textit{ существует}; \\ 0, & \textit{если не существует}, \end{cases} \tag{2.4}$$

где L – расстояние между пунктами.

С учетом зависимостей (2.1) – (2.4) и рассмотренных выше обозначений доход, получаемый от эксплуатации железной дороги за рассматриваемый период, составит:

$$D_{\sum} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[C_{ij}\cdot\sum_{k=1}^{m}\left(A_{ijk}\cdot k3_k - N_{ijk}\cdot k1_k\right) - L_{ij1}\cdot k2\right] \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[C_{ij}\cdot\sum_{k=1}^{m}\left(B_k\cdot N_{ijk}\cdot k3_k - N_{ijk}\cdot k1_k\right) - L_{ij1}\cdot k2\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[C_{ij}\cdot\sum_{k=1}^{m}\left[\left(B_k\cdot k3_k - k1_k\right)\cdot N_{ijk}\right] - L_{ij1}\cdot k2\right]. \qquad (2.5)$$

Сформулируем задачу линейного программирования. Как следует из (2.5), целевая функция есть

$$f(N) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[C_{ij}\cdot\sum_{k=1}^{m}\left[\left(B_k\cdot k3_k - k1_k\right)\cdot N_{ijk}\right] - L_{ij1}\cdot k2\right] \to \max.$$

Так как оптимизируется количество вагонов, решение задачи является целочисленным. Поэтому решение задачи можно искать с помощью симплекс-метода и метода Гомори. Анализируя поставленную задачу, сформулируем ограничения для данной целочисленной задачи линейного программирования:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} N_{ijk} \le P_k, \quad k = 1,2,...,m; \\ N_{ijk} \le \left[\dfrac{A_{ijk}}{B_k\cdot L_{ij1}}\right] + 1, \quad i = 1,2,...,n \quad j = 1,2,...,n \quad k = 1,2,...,m; \\ \sum_{k=1}^{m} N_{ijk} \le L_{ij1}, \quad i = 1,2,...,n \quad j = 1,2,...,n; \\ N_{ijk} \ge 0, \quad i = 1,2,...,n \quad j = 1,2,...,n \quad k = 1,2,...,m; \\ N \in Z. \end{cases}$$

2.3 Описание алгоритма

2.3.1 Симплекс-метод

Общим методом решения произвольной задачи линейного программирования является симплекс-метод, однако он приме-

ним лишь к задачам линейного программирования, записанным в канонической (стандартной) форме:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m; \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., n. \end{cases} \tag{2.9}$$

Для решения системы уравнений (2.9) относительно базисных переменных x_j (j = 1, 2, …, m) с помощью эквивалентных преобразований приведем ее к следующему виду:

$$\begin{aligned} &x_1 + \alpha_{1m+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n}^{(0)} x_n = \beta_1^{(0)}, \\ &x_2 + \alpha_{2m+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{2n}^{(0)} x_n = \beta_2^{(0)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_m + \alpha_{mm+1}^{(0)} x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn}^{(0)} x_n = \beta_m^{(0)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Тогда общее решение системы (2.9) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &x_1 = -\alpha_{1m+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{1n}^{(0)} x_n + \beta_1^{(0)}, \\ &x_2 = -\alpha_{2m+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{2n}^{(0)} x_n + \beta_2^{(0)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_m = -\alpha_{mm+1}^{(0)} x_{m+1} - \ldots - \alpha_{mn}^{(0)} x_n + \beta_m^{(0)}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где свободные переменные $x_{m+1}, \ldots, x_n$ могут принимать произвольные значения. Положив их равными нулю, получим частное решение

$$x_1 = \beta_1^{(0)}, \quad x_2 = \beta_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad x_m = \beta_m^{(0)}, \quad x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots = x_n = 0$$

или

$$x^{(0)} = (\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \ldots, \beta_m^{(0)}, 0, 0, \ldots, 0), \tag{2.12}$$

которое назовем базисным решением системы (2.9). Каждому выбору базисных переменных соответствует свое базисное решение системы (2.9) .

Если все компоненты базисного решения (2.12) удовлетворяют условию неотрицательности, т.е. если $\beta_i^{(0)} \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, m,$ то такое решение называют допустимым базисным решением системы (2.9) или угловой точкой допустимого множества задачи линейного программирования. Если среди неотрицательных чисел $\beta_i^{(0)}$ в (2.12) есть равные нулю, то допустимое базисное решение называется вырожденным (вырожденной угловой точкой), а соответствующая задача линейного программирования также называется вырожденной.

В основе симплекс-метода лежит следующий факт: если задача линейного программирования разрешима, то минимум целевой функции $f(x)$ из (2.8) достигается хотя бы в одной из угловых точек допустимого множества этой задачи.

Задачу линейного программирования можно решать посредством перебора конечного числа угловых точек из допустимого множества решений, сравнивая значения целевой функции в этих точках. Однако при большой размерности n задачи линейного программирования этот подход затруднителен. Идея симплекс-метода состоит в направленном переборе угловых точек допустимого множества решений с последовательным уменьшением целевой функции $f(x)$.

Предположим, что задача линейного программирования (2.8) – (2.9) является невырожденной, а базисное решение (2.12) – допустимым. Используя соотношение (2.11), выразим целевую функцию из (2.8) через свободные переменные x_j, $j = m+1, \ldots, n$:

$$f(x) = p_0^{(0)} + \sum_{j=m+1}^{n} p_j^{(0)} x_j, \qquad (2.13)$$

где $p_0^{(0)} = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i^{(0)}; \ \ p_j^{(0)} = c_i - \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij}^{(0)}, \ \ j = m+1, \ldots, n.$

Справедливы следующие утверждения:

а) Если в выражении (2.13) все коэффициенты $p_j^{(0)}, \ \ j = m+1, \ldots, n$ неотрицательны, то в угловой точке (2.12)

достигается минимум целевой функции $f(x)$ из (2.8) на допустимом множестве решений задачи (2.8 – 2.9) и этот минимум равен $p_0^{(0)}$;

б) если среди отрицательных коэффициентов $p_j^{(0)}$, $j \neq 0$ из (2.13) есть такой (например $p_l^{(0)}$), что в (2.10) все коэффициенты $\alpha_{il}^{(0)} \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$, то целевая функция $f(x)$ не ограничена снизу на допустимом множестве решений и задача (2.8) – (2.9) не имеет решений;

в) если хотя бы один из коэффициентов $p_j^{(0)}$, $j \neq 0$, в (2.13) отрицателен (например $p_l^{(0)} < 0$) и при этом среди коэффициентов $\alpha_{il}^{(0)}$ в (2.10) есть хотя бы один положительный, то существует такая угловая точка $x^{(1)}$ множества допустимых решений, что $f(x^{(1)}) < f(x^{(0)})$.

В случаях а) и б) процесс решения задачи линейного программирования на этом заканчивается. Остается подробнее рассмотреть оставшийся случай. Найдем номер k базисной переменной из условия

$$\frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} = \min_{i:\alpha_{il}^{(0)}>0} \left\{ \frac{\beta_i^{(0)}}{\alpha_{il}^{(0)}} \right\}. \tag{2.14}$$

Найдем решение системы (2.9), считая свободными переменные $x_{m+1}, \ldots, x_{i-1}, x_k, x_{i+1}, \ldots, x_n$, т.е. поменяв местами свободную переменную x_l с базисной переменной x_k. Система уравнений вида (2.10) в этом случае запишется следующим образом:

$$x_i + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j\neq l}}^{n} (\alpha_{ij}^{(0)} - \alpha_{il}^{(0)} \frac{\alpha_{kj}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}}) x_j - \frac{\alpha_{il}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_k = \beta_i^{(0)} - \alpha_{il}^{(0)} \frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}},$$

$$i = 1, \ldots, m, \quad i \neq k, \tag{2.15}$$

$$x_l + \sum_{\substack{j=m+1 \\ j\neq l}}^{n} \frac{\alpha_{kj}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_j + \frac{1}{\alpha_{kl}^{(0)}} x_k = \frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}}.$$

Зависимость целевой функции от новых свободных переменных примет вид

$$f(x)=\sum_{\substack{j=m+1\\ j\neq l}}^{n}(p_j^{(0)}-p_l^{(0)}\frac{\alpha_{kj}^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}})x_j-\frac{p_l^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}}x_k+p_0^{(0)}-p_l^{(0)}\frac{\beta_k^{(0)}}{\alpha_{kl}^{(0)}}.$$

Компоненты нового базисного решения $x^{(1)}$ можно найти, приравняв к нулю свободные переменные x_j, $j=m+1,\ldots,n,\quad j\neq l$ и найдя при этом условии значения базисных переменных из (2.15). Базисное решение $x^{(1)}$ является допустимым, причем $f(x^{(1)})<f(x^{(0)})$.

По знакам коэффициентов в системе (2.15) и выражении для целевой функции (2.16) можно сделать одно из трех приведенных выше заключений, как это было сделано для угловой точки $x^{(0)}$. В случае в) следует совершить переход к очередной угловой точке $x^{(2)}$, аналогичный переходу от $x^{(0)}$ к $x^{(1)}$, и т.д.

Так как число угловых точек допустимого множества решений конечно (в [1] приведено число C_n^m), то случай в) может повторяться конечное число раз, т.е. в результате конечного числа шагов перехода к новой угловой точке будет либо найдено решение задачи, либо сделано заключение о том, что она не имеет решений.

Преобразуем рассматриваемую задачу (2.6) – (2.7) к стандартной форме:

$$f(N)=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[C_{ij}\cdot\sum_{k=1}^{m}\left[\left(B_k\cdot k3_k-k1_k\right)\cdot N_{ijk}\right]-L_{ij1}\cdot k2\right]\to\min.$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} N_{ijk} + N_k^{(1)} = P_k, \quad k = 1, 2, ..., m; \\ N_{ijk} + N_{ijk}^{(2)} = \left[\dfrac{A_{ijk}}{B_k \cdot L_{ij1}} \right] + 1, \quad i = 1, 2, ..., n; \\ k = 1, 2, ..., m; \\ \sum_{k=1}^{m} N_{ijk} + N_{ij}^{(3)} = L_{ij1}, \quad i = 1, 2, ..., n; \\ N_{ijk} \geq 0, \quad N_k^{(1)} \geq 0, \quad N_{ijk}^{(2)} \geq 0, \quad N_{ij}^{(3)} \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n; \\ N \in Z; \\ j = 1, 2, ..., n; \\ k = 1, 2, ..., m. \end{cases} \tag{2.18}$$

Очевидно, что выравнивающие переменные можно считать базисными. Все правые части полученных равенств можно считать неотрицательными (следует из смысла этих констант). Применяя методику метода, описанную выше, получается решение поставленной задачи без учета целочисленности переменных.

Алгоритм симплекс-метода выглядит следующим образом:

1) инициализация данных;

2) поиск отрицательных p_j, $j = m+1, \ldots, n$. Если таких не оказалось, то идет переход на метод Гомори;

3) номер базисной переменной находится из выражения (2.14), причем индекс l выбирается из условия отрицательности p_l. Если минимума не существует ($\alpha_{il} \leq 0$), то следует вывод об отсутствии решения поставленной задачи и происходит выход из подпрограммы реализации этого метода;

4) совершается переход к следующему базисному решению по формулам (2.15). После этого происходит переход на шаг 2).

2.3.2 Метод Гомори

Как уже было сказано выше, задача относится к классу целочисленных. В данном курсовом проекте для нахождения целочисленного решения применяется метод Гомори. Полностью целочисленная задача линейного программирования (требованию целочисленности, как в задаче этого проекта, должны удовлетворять все переменные) в каноническом виде записывается следующим образом:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m; \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., m; \\ x_j \in Z, \end{cases} \qquad (2.19)$$

где Z – множество целых чисел.

Для решения полностью целочисленных задач линейного программирования с произвольным числом переменных используется метод Гомори. Он состоит в последовательном отсечении от допустимого множества решений нецелочисленной задачи частей, не содержащих точек с целыми координатами. Эти отсечения производятся включением в задачу дополнительных ограничений на переменные x_j.

Сначала с помощью симплекс-метода находится решение x^* задачи линейного программирования без учета требования целочисленности (2.19). Если для x^* условие (2.19) выполняется, то задача решена. В противном случае среди чисел β_i есть такие, что { β_i }>0.

Среди нецелых элементов β_i выбирается произвольный элемент β_r (например, с максимальной дробной частью). В систему (2.10) вставляется дополнительное ограничение вида

$$\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{rj}\} x_j \le -\{\beta_r\}. \qquad (2.20)$$

С помощью вспомогательной переменной $x_{n+1} \ge 0$ это ограничение представляется в виде равенства

$$x_{n+1} - \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{rj}\} x_j = -\{\beta_r\}.$$

Так как $\beta_{n+1} = -\{\beta_r\} < 0$, то после дополнения в (2.10) эта система перестает отвечать допустимому базисному решению задачи линейного программирования, которую она описывает.

Для перехода к допустимому базисному решению производятся следующие операции:

а) строка с отрицательным свободным членом β_k считается разрешающей;

б) если все коэффициенты $\alpha_{kj} > 0$, то задача не имеет решения, в противном случае номер l переменной находится из условия

$$\frac{p_l}{|\alpha_{kl}|} = \min_{j:\alpha_{kj}<0} \frac{p_j}{|\alpha_{kj}|}; \qquad (2.21)$$

в) совершается переход к новой угловой точке. Если остался хотя бы один отрицательный свободный член, то описанная процедура повторяется, начиная с а), необходимое число раз.

Если найденное решение удовлетворяет условию целочисленности, то вычисления заканчиваются, а если нет, то метод повторяется сначала.

Алгоритм метода Гомори выглядит следующим образом:

1) анализ целочисленности переменных. Если это условие выполняется, то следует выход из подпрограммы этого метода;

2) по описанной выше методике вставляется новое ограничение (2.20). Индекс r присваивается первому попавшемуся числу β_r, у которого есть ненулевая дробная часть;

3) анализируется отрицательность свободных членов. Если таковых нет, то следует переход на шаг 1);

4) по формуле (2.21) находится номер базисной переменной и совершается переход к новому базисному решению. Происходит переход на шаг 3).

2.4 Исследование работы алгоритма

Рассмотрим работу алгоритма на конкретных примерах, а именно – его поведение при работе с симплекс-таблицами, относящимися к задачам, имеющим либо не имеющим решения. Ниже приведены распечатки симплекс-таблиц на всех этапах решения, полученные с помощью оформленной отдельно тестовой процедуры симплекс-метода.

2.4.1 Пример задачи при наличии решения

СТ 0	x1	x4	
x2	**1**	–2	2
x3	1	3	3
x5	–2	1	1
	–1	1	0

СТ 1	x2	x4	
x1	1	–2	2
x3	–1	**5**	1
x5	2	–3	5
	1	–1	2

СТ 2	x2	x3	
x1	0.6	0.4	2.4
x4	–0.2	0.2	0.2
x5	1.4	0.6	5.6
	0.8	0.2	2.2

СТ 2а	x2	x3	
x1	0.6	0.4	2.4
x4	–0.2	0.2	0.2
x5	1.4	0.6	5.6
x6	–0.6	**–0.4**	–0.4
x6	0.8	0.2	2.2

СТ 3	x2	x6	
x1	0	1	2
x4	–0.5	0.5	0
x5	0.5	1.5	5
x3	1.5	–2.5	1
	0.5	0.5	2

Решение: X = (2, 0, 1, 0, 5).

2.4.2 Пример задачи, не имеющей решения

СТ 0	x4	x5	
x1	**1**	–1	1
x2	–5	–2	2
x3	2	–1	2
	–3	0	5

СТ 1	x1	x5	
x4	1	–1	1
x2	5	–7	7
x3	–2	**1**	0
	3	–3	8

СТ 2	x1	x3	
x4	–1	1	1
x2	–9	7	7
x5	–2	1	0
	–3	3	8

Решений нет.

2.5 Выходные данные

Выходными данными алгоритма (и его программной реализации) являются:

а) матрица A размерностью $[n \times n \times m]$, показывающая, сколько вагонов каждого типа следует формировать в составы на каждом отрезке пути;

б) вещественная величина D, характеризующая ожидаемый доход;

в) графическая демонстрация правильности решения задачи (для этого для каждой из переменных, по которым проводится оптимизация, строятся графики целевой функции и ограничений, где выбранная переменная варьируется, а остальные остаются фиксированными).

2.6 Программное обеспечение

Для нормальной работы программы необходима операционная система Windows 95/NT или выше. Исходные файлы, написанные на C++, были откомпилированы при помощи визуальной среды программирования Borland C++ Builder 3.0.

3 РУКОВОДСТВО ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

3.1 Запуск программы

Программной реализацией алгоритма с необходимым интерфейсом является приложение TS.EXE. При своем запуске приложение не требует никаких входных параметров, все входные и выходные данные считываются и записываются непосредственно в процессе работы.

3.2 Возможные варианты команд внутри программы

Все команды в программе подаются при помощи выбора пункта меню, либо нажатия кнопок на панели инструментов (многие кнопки дублируют соответствующие пункты меню и служат для удобства общения с программой). Все кнопки имеют иконки, поясняющие выполняемое ими действие, а также все кнопки и пункты меню снабжены подсказками.

3.3 Сообщения, выдаваемые в ходе выполнения программы и соответствующие действия пользователя

Если пользователь хочет выйти из программы или загрузить новый набор данных, а текущий был изменен и не сохранен, появляется диалоговое окно, предлагающее прежде сохранить его. Можно отказаться либо согласиться, в этом случае пользователь получает возможность сохранить набор данных на диске при помощи стандартного диалога Windows.

Единственное предупреждение иного рода, выдаваемое программой, появляется лишь в том случае, когда осуществляется попытка решить задачу оптимизации, а граф населенных пунктов и железных дорог не является связанным. Пользователю предоставляется выбор – решать в таком случае задачу или нет.

Дополнительно в программу встроен блок, отслеживающий появление исключительных ситуаций, то есть все серьезные сбои в ее работе будут обработаны операционной системой.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения курсового проекта была разработана и реализована (в виде алгоритма, а затем и программы на ЭВМ) поставленная задача формирования оптимальных железнодорожных составов. Были получены практические навыки в составлении и дальнейшем решении оптимизационных задач.

Программно реализованы и проверены с помощью тестовых задач алгоритмы симплекс-метода и метода Гомори. Полученные процедуры написаны достаточно универсально и могут быть использованы в любом проекте, требующем применения рассмотренных методов.

Программный продукт, являющийся результатом работы, разработан с учетом стандартов интерфейса с пользователем (GUI в ОС семейства Windows) и имеет удобную графическую оболочку. Реализована достаточно общая задача формирования составов, приближенная к реальным условиям, поэтому она может быть использована для формирования составов на действующих в настоящее время маршрутах (после необходимых тестов и модификаций для приспособления к конкретным условиям).

В целом можно видеть, что большой класс задач (как научных, так и практических), не рассматривавшихся ранее с математической точки зрения, может быть решен оптимизационными методами. Дополнительным аргументом в пользу этого предположения служит факт все возрастающей производительности ЭВМ, что позволяет решать с их помощью все более сложные задачи.

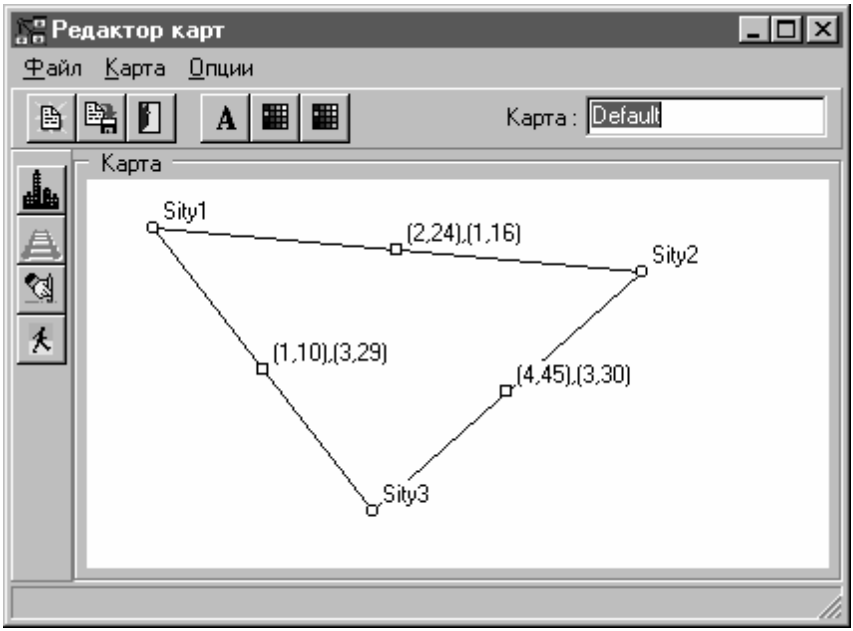
Данный курсовой проект является примером реализации на ЭВМ задачи, до сих пор не решаемой в качестве оптимизационной.

5 ПРИЛОЖЕНИЯ

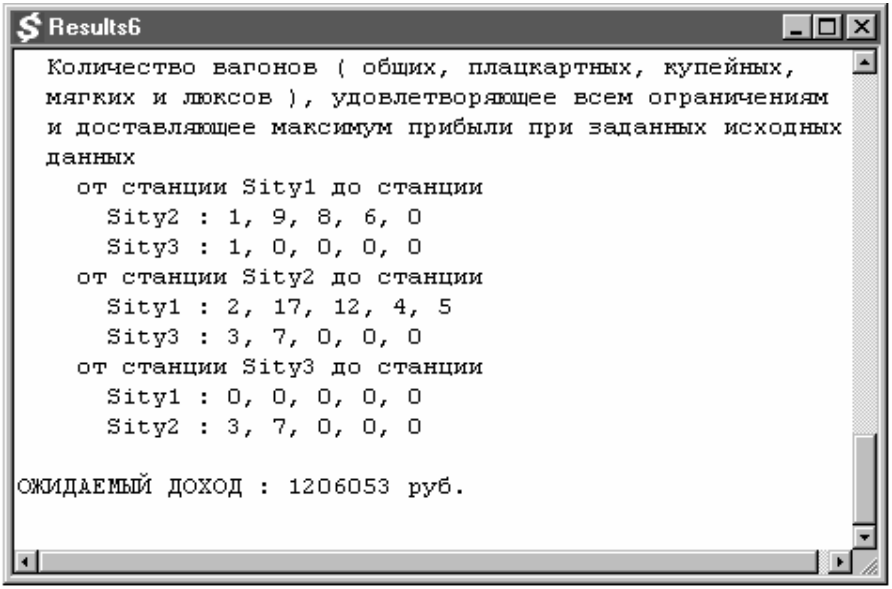
Приложение А. Список использованной литературы

1. Сборник задач по математике для ВТУЗов, ч. 4. – М.: Наука, 1990. – 304 с.

Приложение Б. Окно ввода карты путей



Приложение В. Окно вывода результатов



Приложение Г. Листинг процедур оптимизации

(*Здесь привести листинг той части программы, которая отвечает за процедуру оптимизации*).