

ТЕМА 14. ОСНОВЫ РАСЧЕТОВ ПРИ СЛОЖНОМ СОПРОТИВЛЕНИИ

Алгоритм решения задач

Оценка прочности

по известному напряженному состоянию в опасной точке

1. **Анализ напряженного состояния:**

- определить и пронумеровать главные напряжения в опасной точке элемента конструкции: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$;
- применить одну из гипотез прочности и определить наибольшее эквивалентное напряжение в элементе конструкции **$\max \sigma_{\text{эkv}}$** .

2. **Расчет на прочность:**

- записать условие прочности элемента конструкции;
- определить допускаемые напряжения.

3. **Определение искомой величины:**

- выразить из условия прочности и вычислить искомую величину.

Расчет на прочность вала круглого сечения

при изгибе с кручением

1. **Расчетная схема вала:**

- изобразить вал в масштабе, указать размеры, выразив их через параметры длины и размера сечения;
- показать внешние нагрузки, выразив их через параметр нагрузки.

2. **Анализ нагруженности вала:**

- построить эпюры **ВСФ** в вале.

3. **Анализ напряженного состояния:**

- построить эпюру эквивалентного момента **$\mathcal{M}_{\text{эkv}}$** ;
- определить наибольшее действующее напряжение **$\max \sigma_{\text{эkv}}$** .

4. **Расчет на прочность:**

- записать условие прочности вала;
- определить допускаемые напряжения.

5. **Определение искомой величины:**

- выразить из условия прочности и вычислить искомую величину.

З а м е ч а н и я

1. Решение должно быть выполнено в общем виде. Числовые значения исходных данных необходимо подставлять только в конечную расчетную формулу для вычисления искомой величины. Подстановку выполнять с учетом размер-

ностей всех величин. Ответ приводить с точностью до трех значащих цифр (например, 8,51 кН; 5,67 мм).

2. В проектировочных расчетах размеры сечения вала требуется округлить в **большую** сторону в соответствии с ГОСТом 6636–69 на нормальные линейные размеры, часть которого приведена в табл. 1.

Таблица 1

Нормальные линейные размеры. ГОСТ 6636–69. Ряд Ra40.

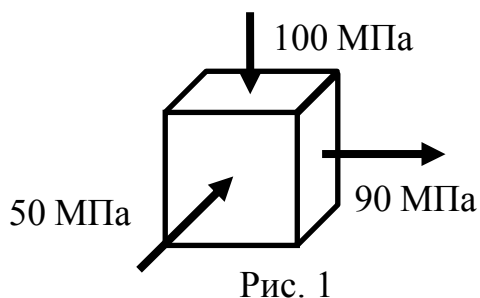
1.00	1.05	1.10	1.15	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9
2.0	2.1	2.2	2.4	2.5	2.6	2.8				
3.0	3.2	3.4	3.6	3.8						
4.0	4.2	4.5	4.8							
5.0	5.6									
6.0	6.3	6.7								
7.1	7.5									
8.0	8.5									
9.0	9.5									
10										

Числа <1 и >10 получают соответственно делением или умножением приведенных выше величин на 10, 100, 1000 и т. д.

Примеры решения задач

Задача 1

Дано



Напряженное состояние в опасной точке элемента конструкции изображено на рис. 1. элемент конструкции изготовлен из стали Ст. 4 с $\sigma_m = 240$ МПа.

Определить

коэффициент запаса прочности n_m по критерию Треска – Сен-Венана.

Решение

1. Анализ напряженного состояния. Пронумеруем главные напряжения в опасной точке элемента конструкции:

$$\sigma_1 = +90 \text{ МПа}; \sigma_2 = -50 \text{ МПа}; \sigma_3 = -100 \text{ МПа}.$$

Применим критерий пластичности Треска – Сен-Венана (III-ю гипотезу прочности) и определим наибольшее эквивалентное напряжение в элементе конструкции:

$$\max \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = +90 \text{ МПа} - (-100 \text{ МПа}) = +190 \text{ МПа}.$$

2. Оценка прочности. Определим коэффициент запаса прочности элемента конструкции:

$$n_T = \frac{\sigma_T}{\max \sigma_{\text{экв}}} = 240 \text{ МПа} / 190 \text{ МПа} = 1,26.$$

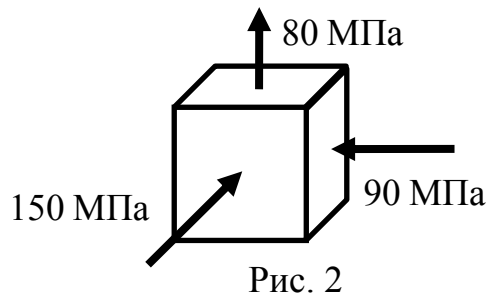
Условие прочности элемента конструкции не нарушено: $n_T > 1$.

Ответ

Коэффициент запаса прочности элемента конструкции $n_T = 1,26$.

Задача 2

Дано



Напряженное состояние в опасной точке элемента конструкции изображено на рис. 2. элемент конструкции изготовлен из чугуна СЧ 21–40 с $\sigma_{\text{вр}} = 210 \text{ МПа}$, $\sigma_{\text{вс}} = 800 \text{ МПа}$.

Определить

коэффициент запаса прочности n_σ .

Решение

1. Анализ напряженного состояния. Пронумеруем главные напряжения в опасной точке элемента конструкции:

$$\sigma_1 = +80 \text{ МПа}; \sigma_2 = -90 \text{ МПа}; \sigma_3 = -150 \text{ МПа}.$$

Применим критерий разрушения Мора (VI-ю гипотезу прочности) и определим наибольшее эквивалентное напряжение в элементе конструкции:

$$\max \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \nu \sigma_3 = +80 \text{ МПа} - 0,263 \cdot (-100 \text{ МПа}) = +119,5 \text{ МПа};$$

$$\nu = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}} = 210 \text{ МПа} / 800 \text{ МПа} = 0,263.$$

2. Оценка прочности. Определим коэффициент запаса прочности элемента конструкции:

$$n_B = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{\max \sigma_{\text{экв}}} = 210 \text{ МПа} / 119,5 \text{ МПа} = 1,76.$$

Условие прочности элемента конструкции не нарушено: $n_b > 1$.

Ответ

Коэффициент запаса прочности элемента конструкции $n_b = 1,76$.

Задача 3

Дано

В опасной точке стержня действуют нормальные напряжения, равные 120 МПа, и касательные напряжения, равные 80 МПа. Материал стержня — сталь 35 с $\sigma_m = 270$ МПа.

Определить

коэффициент запаса прочности n_m по критерию Губера – Мизеса – Генки.

Решение

1. Анализ напряженного состояния. Определим главные напряжения в опасной точке стержня:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = (120 \text{ МПа} / 2) + \left[(120 \text{ МПа} / 2)^2 + (80 \text{ МПа})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = 60 \text{ МПа} + 100 \text{ МПа} = 160 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = 0;$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = 60 \text{ МПа} - 100 \text{ МПа} = -40 \text{ МПа}.$$

Применим критерий пластичности Губера – Мизеса – Генки (IV-ю гипотезу прочности) и определим наибольшее эквивалентное напряжение в стержне:

$$\max \sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[(160 \text{ МПа} - 0)^2 + (0 + 40 \text{ МПа})^2 + (160 + 40 \text{ МПа})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 259,2 \text{ МПа} = 183,3 \text{ МПа}.$$

Кроме того, для напряженного состояния в стержне наибольшее эквивалентное напряжение можно определить сразу по нормальным и касательным напряжениям в опасной точке:

$$\max \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \left[(120 \text{ МПа})^2 + 3 \cdot (80 \text{ МПа})^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 183,3 \text{ МПа}.$$

2. Оценка прочности. Определим коэффициент запаса прочности стержня:

$$n_{\text{т}} = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\max \sigma_{\text{экв}}} = 270 \text{ МПа} / 183,3 \text{ МПа} = 1,47 > 1.$$

Условие прочности не нарушено.

Ответ

Коэффициент запаса прочности стержня $n_T = 1,47$.

Задача 4

Дано

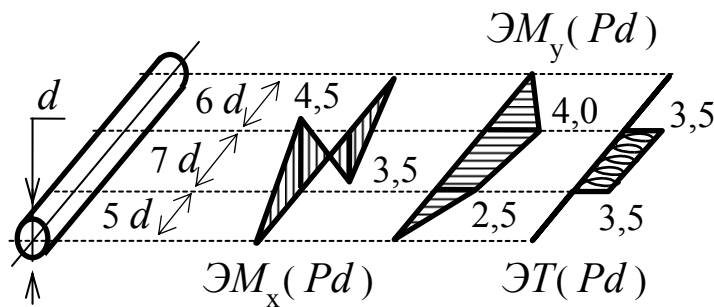


Рис. 3

Вал круглого сечения (см. рис. 3) диаметром $d = 45$ мм изготовлен из стали 20ХН с $\sigma_m = 600$ МПа.

Известны эпюры внутренних силовых факторов в валу.

Принять $[n_m] = 3$.

Определить

допускаемое значение параметра нагрузки P из расчета на прочность.

Решение

1. Расчетная схема вала. Задана в условии задачи.

2. Анализ нагруженности вала. Эпюры **ВСФ** в валу заданы в условии задачи.

3. Анализ напряженного состояния. Вычислим $M_{\text{экв}}$ по формуле:

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T^2}$$

в начале и в конце каждого участка вала:

$$\text{сечение 1: } M_{\text{экв}} = [(0Pd)^2 + (0Pd)^2 + (0Pd)^2]^{\frac{1}{2}} = 0Pd.$$

$$\text{сечение 2: } M_{\text{экв}} = [(4,5Pd)^2 + (2,5Pd)^2 + (0Pd)^2]^{\frac{1}{2}} = 5,15Pd.$$

$$\text{сечение 3: } M_{\text{экв}} = [(5,0Pd)^2 + (2,5Pd)^2 + (3,5Pd)^2]^{\frac{1}{2}} = 6,22Pd.$$

$$\text{сечение 4: } M_{\text{экв}} = [(3,5Pd)^2 + (4,0Pd)^2 + (3,5Pd)^2]^{\frac{1}{2}} = 6,36Pd.$$

$$\text{сечение 5: } M_{\text{экв}} = [(3,5Pd)^2 + (4,0Pd)^2 + (0Pd)^2]^{\frac{1}{2}} = 5,32Pd.$$

$$\text{сечение 6: } M_{\text{экв}} = [(0Pd)^2 + (0Pd)^2 + (0Pd)^2]^{\frac{1}{2}} = 0Pd.$$

Построим эпюру эквивалентного момента $\mathcal{M}_{\text{экв}}$ (см. рис. 4).

$$\max M_{\text{экв}} = 6,36Pd.$$

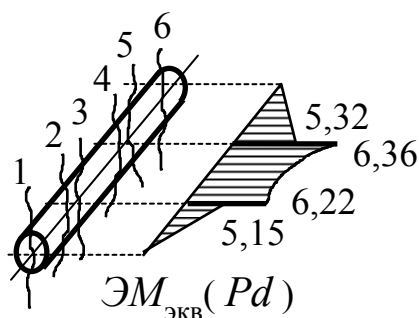


Рис. 4

Определим наибольшее действующее напряжение $\max \sigma_{\text{экр}}$ по формуле:

$$\begin{aligned} \max \sigma_{\text{экр}} &= \frac{\max M_{\text{экр}}}{W} = \\ &= (6,36 Pd) / \left(\frac{\pi}{32} d^3 \right) = 64,8 \cdot \frac{P}{d^2}. \end{aligned}$$

3. Расчет на прочность.

Запишем условие прочности вала:

$$\max \sigma_{\text{экр}} \leq [\sigma].$$

Определим допускаемое напряжение:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{[n_m]} = 600 \text{ МПа} / 3 = 200 \text{ МПа}.$$

Подставим наибольшее действующее напряжение в условие прочности:

$$64,8 \cdot \frac{P}{d^2} \leq [\sigma].$$

5. Допускаемое значение параметра нагрузки. Выразим и вычислим параметр нагрузки P :

$$P \leq [\sigma] \cdot d^2 / 64,8 = 200 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot (0,045 \text{ м})^2 / 64,8 = 6250 \text{ Н} \approx 6,25 \text{ кН}.$$

Ответ

Допускаемое значение параметра нагрузки $[P] = 6,25 \text{ кН}$.

Задача 5

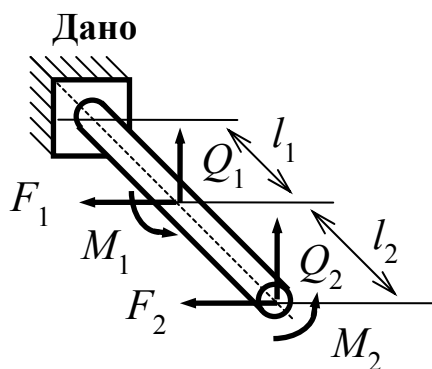


Рис. 5

Вал круглого сечения (см. рис. 5) диаметром d нагружен сосредоточенными нагрузками. Исходные данные: $l_1 = l$; $l_2 = 2 l$;
 $F_1 = P$; $F_2 = P$; $Q_1 = 3 P$; $Q_2 = -2 P$;
 $M_1 = Pl$; $M_2 = -2 Pl$. Параметр длины $l = 40 \text{ см}$;
 параметр нагрузки $P = 1,0 \text{ кН}$. Материал стержня — сталь 40 с $\sigma_m = 280 \text{ МПа}$; $[n_m] = 4$.

Определить

диаметр d поперечного сечения вала из расчета на прочность.

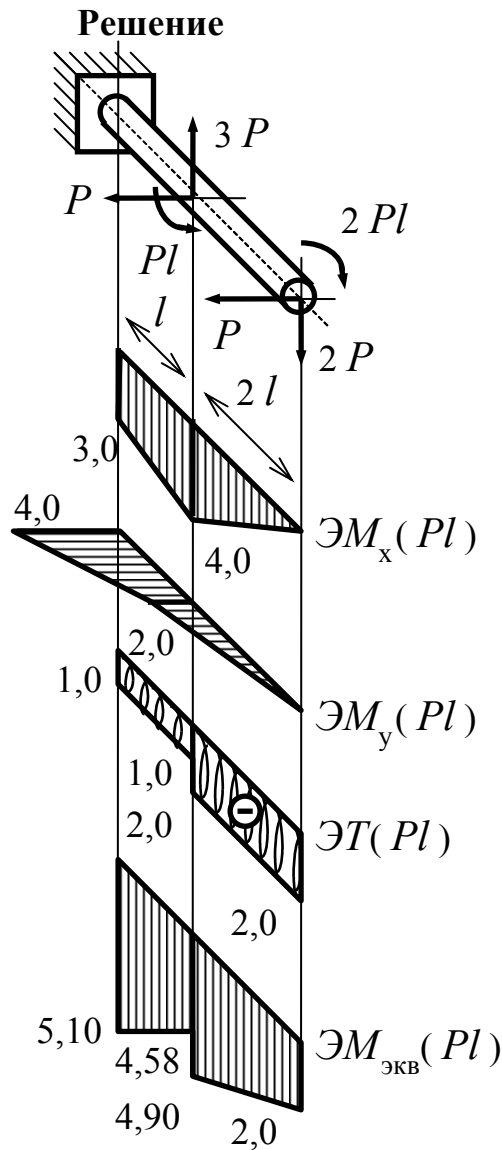


Рис. 6

1. Расчетная схема вала. Изобразим вал в масштабе (см. рис. 6), проставим размеры, выразив их через параметры длины l . Покажем внешние нагрузки, выразив их через параметр нагрузки P .

2. Анализ нагруженности вала. Построим эпюры **ВСФ** в вале с помощью принципа суперпозиции.

2.1. Рассмотрим случай нагружения вала только вертикальными силами и построим $\mathcal{E}M_x$ (см. рис. 6).

2.2. Рассмотрим случай нагружения вала только горизонтальными силами и построим $\mathcal{E}M_y$ (см. рис. 6).

2.3. Рассмотрим случай нагружения вала только моментами, действующими вокруг оси вала, и построим $\mathcal{E}T$ (см. рис. 6).

3. Анализ напряженного состояния. Вычислим $M_{\text{эKB}}$ по формуле:

$$M_{\text{эKB}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T^2}$$

в начале и в конце каждого участка вала. Построим эпюру эквивалентного момента $\mathcal{E}M_{\text{эKB}}$ (см. рис. 6).

$$\max M_{\text{эKB}} = 5,10 Pl.$$

$$\max \sigma_{\text{эKB}} = \frac{\max M_{\text{эKB}}}{W} = (5,10 Pl) / \left(\frac{\pi}{32} d^3 \right) = 51,9 \cdot \frac{Pl}{d^3}.$$

3. Расчет на прочность. Запишем условие прочности вала:

$$\max \sigma_{\text{эKB}} \leq [\sigma]; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_m}{[n_m]} = 70 \text{ МПа}; \quad 51,9 \cdot \frac{Pl}{d^3} \leq [\sigma].$$

5. Диаметр вала.

$$d \geq \sqrt[3]{51,9 Pl / [\sigma]} = [51,9 \cdot 1000 \text{ Н} \cdot 0,4 \text{ м} / 70 \cdot 10^6 \text{ Па}]^{\frac{1}{3}} = 0,0667 \text{ м} \approx 67 \text{ мм (по ГОСТ 6636-69)}.$$

Ответ

Диаметр вала $d = 67 \text{ мм}$.

Практическое задание

Задача 16

Дано

Консольный вал круглого поперечного сечения диаметром d (см. рис. 7) нагружен сосредоточенными нагрузками. Параметр длины l ; параметр нагрузки P . Принять $l = 0,3$ м; $[n_m] = 2,5$. Исходные данные приводятся в табл. 2. Механические характеристики материалов взять из табл. 3.

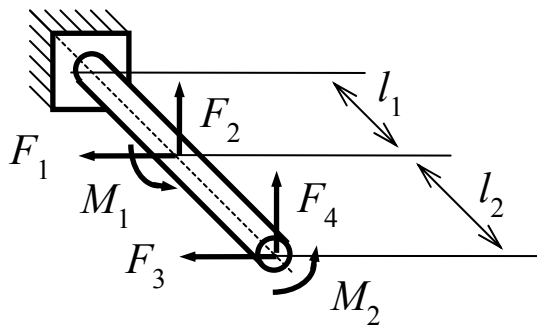


Схема 7.1

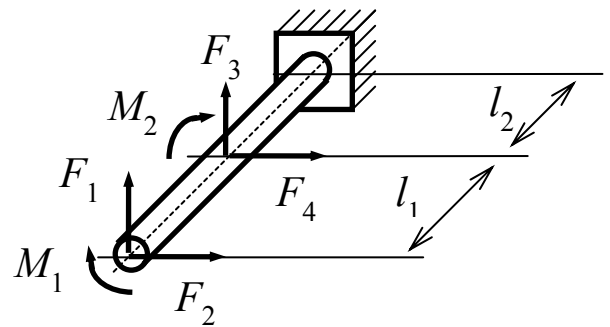


Схема 7.2

Рис. 7

Таблица 2

Цифра вари- анта	Порядковый номер цифры в варианте											
	1			2			3			4		
	$\frac{M_1}{M}$	$\frac{F_2}{F}$	$\frac{F_3}{F}$	$\frac{M_2}{M}$	$\frac{l_2}{l}$	$\frac{F_1}{F}$	$\frac{F_4}{F}$	$\frac{l_1}{l}$	мате- риал	d , мм	P , кН	схе- ма
0	1,0	0	1,5	0	3,5	1,0	3,0	1,0	Ст 5	40	?	16.1
1	2,0	1,0	0	-1,5	3,2	0	-3,0	1,2	20	45	?	16.2
2	0	1,5	1,0	0	3,0	1,5	2,5	1,5	35	50	?	16.1
3	3,0	0	-1,5	-2,0	2,8	0	-2,5	1,6	45	60	?	16.2
4	-1,5	1,0	0	0	2,6	2,0	2,0	1,8	20ХН	75	?	16.1
5	0	1,0	-1,5	2,5	2,5	0	-2,0	2,0	40Н	?	500	16.2
6	-2,5	0	1,0	0	2,4	-1,5	1,5	2,2	40Х	?	600	16.1
7	-3,0	1,5	0	-3,0	2,2	0	-1,5	2,5	40ХН	?	700	16.2
8	0	1,5	-1,0	0	2,0	-1,0	1,0	2,8	Ст 3	?	800	16.1
9	-2,0	0	1,5	3,5	1,8	0	-1,0	3,0	Ст 4	?	900	16.2

Определить

Величину, указанную в четвертом столбце табл. 2 (размер d поперечного сечения вала или допускаемое значение параметра нагрузки P), из расчета на прочность.

Таблица 3

Механические свойства сталей

Материал	Марка	σ_m , МПа	σ_{ϵ} , МПа	τ_m , МПа	E , ГПа
Сталь углеродистая	Ст. 3	230	380...470	160	200
	Ст. 4	240	430...550	170	
	Ст. 5	280	520...650	190	
	20	220	400...500	160	
	35	270	550	190	
	45	320	600	220	
Сталь легированная	20ХН	600	800	350	210
	40Н	400	700	260	
	40Х	800	1000	440	
	40ХН	750	900	390	