

## ТЕМА 12. КРУЧЕНИЕ

### Алгоритм решения задач

В СМ принято решать задачи расчетов на прочность в параметрах, выражая длины участков вала через параметры длины, размеры поперечного сечения через параметр размера сечения, приложенные внешние нагрузки через параметр нагрузки.

### Алгоритм решения задач

1. **Расчетная схема вала:**
  - изобразить вал в масштабе, указать размеры, выразив их через параметры длины и размера сечения;
  - показать внешние нагрузки, выразив их через параметр нагрузки.
2. **Анализ нагруженности вала:**
  - построить эпюру крутящего момента  $ЭТ$ .
3. **Анализ напряженного состояния:**
  - построить эпюру максимальных касательных напряжений  $Э\tau_{\max}$ ;
  - определить наибольшее действующее напряжение  $\max \tau_{\max}$ .
4. **Расчет на прочность:**
  - записать условие прочность вала;
  - определить допускаемые напряжения.
5. **Определение искомой величины:**
  - выразить из условия прочности и вычислить искомую величину.

### З а м е ч а н и я

1. Решение должно быть выполнено в общем виде. Числовые значения исходных данных необходимо подставлять только в конечную расчетную формулу для вычисления искомой величины. Подстановку выполнять с учетом размерностей всех величин. Ответ приводить с точностью до трех значащих цифр (например, 8,51 кН; 5,67 мм).

2. В проектировочных расчетах размеры сечения вала требуется округлить в **большую** сторону в соответствии с ГОСТом 6636–69 на нормальные линейные размеры, часть которого приведена в табл.1.

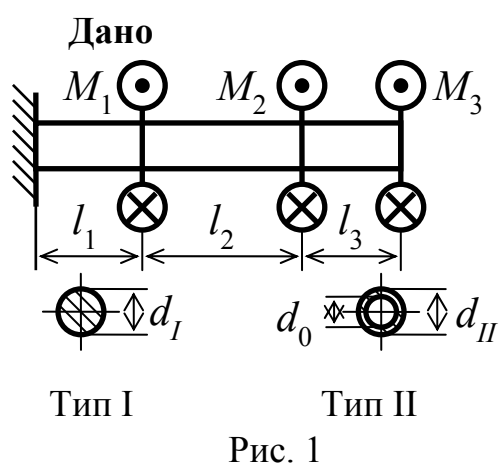
Нормальные линейные размеры. ГОСТ 6636–69. Ряд Ra40.

1.00	1.05	1.10	1.15	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9
2.0	2.1	2.2	2.4	2.5	2.6	2.8				
3.0	3.2	3.4	3.6	3.8						
4.0	4.2	4.5	4.8							
5.0	5.6									
6.0	6.3	6.7								
7.1	7.5									
8.0	8.5									
9.0	9.5									
10										

Числа  $<1$  и  $>10$  получают соответственно делением или умножением приведенных выше величин на 10, 100, 1000 и т. д.

### Примеры решения задач

#### Задача 1



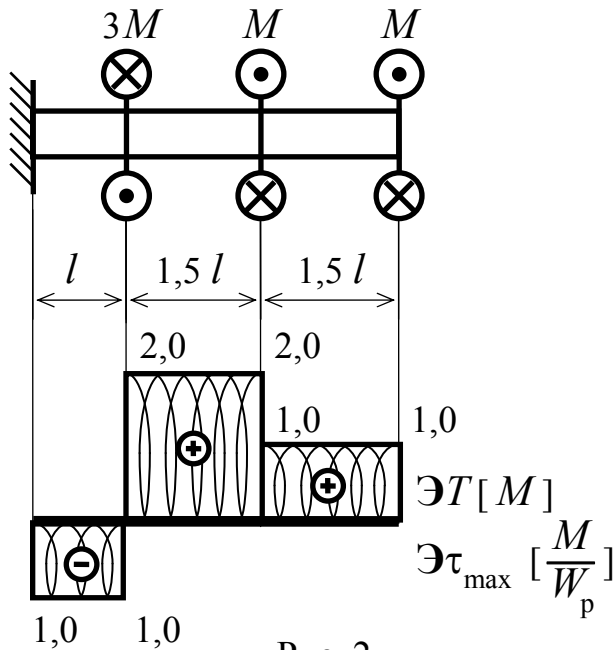
Консольный вал (см. рис. 1) постоянного поперечного сечения нагружен сосредоточенными моментами.

Исходные данные:  $l_1 = l$ ;  $l_2 = 1,5 l$ ;  $l_3 = 1,5 l$ ;  $M_1 = -3 M$ ;  $M_2 = M$ ;  $M_3 = M$ . Параметр длины  $l = 20$  см; параметр нагрузки  $M = 400$  Н·м. Материал стержня — сталь 30 с  $\tau_m = 210$  МПа;  $[n_m] = 1,4$ .

#### Определить

- Из расчета на прочность размеры поперечного сечения вала двух типов: тип I — сплошное круглое; тип II — кольцевое с  $d_0 = 0,85 d_{II}$ .
- Сравнить веса валов I и II типа.

## Решение



**1. Расчетная схема вала.** Изобразим вал в масштабе (см. рис. 2), проставим размеры, выразив их через параметры длины  $l$ . Покажем внешние нагрузки, выразив их через параметр нагрузки  $M$ .

**2. Анализ нагруженности вала.** Построим эпюру крутящего момента  $\mathcal{E}T$  (см. рис. 2).

**3. Анализ напряженного состояния.** Максимальные касательные напряжения в поперечном сечении вала при кручении вычисляются по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

В задаче рассматривается вал постоянного поперечного сечения:  $W_p = \text{const}$ . Следовательно, эпюра максимальных касательных напряжений подобна эпюре крутящего момента  $\mathcal{E}T$ , но имеет размерность  $[\frac{M}{W_p}]$  (см. рис. 2).

Наибольшее действующее касательное напряжение в вале:

$$\max \tau_{\max} = 2,0 \frac{M}{W_p}$$

**4. Расчет на прочность.** Запишем условие прочности балки:

$$\max \tau_{\max} \leq [\tau]$$

Определим допускаемое напряжение:

$$[\tau] = \frac{\tau_m}{[n_m]} = 210 \text{ МПа} / 1,4 = 150 \text{ МПа}$$

Подставим наибольшее действующее напряжение в условие прочности:

$$2,0 \frac{M}{W_p} \leq [\tau],$$

откуда полярный момент сопротивления сечения равен

$$W_p \geq [W] = 2,0 \frac{M}{[\tau]} = 2,0 \cdot 400 \text{ Н·м} / 150 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5,33 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 5,33 \text{ см}^3$$

**5. Подбор сечений.**

**Сечение I типа.** Полярный момент сопротивления сечения I типа:

$$W_p = \frac{\pi d_I^3}{16} = 0,196 d_I^3 \geq [W].$$

Выразим и вычислим диаметр  $d_I$  поперечного сечения I типа:

$$d_I \geq \sqrt[3]{[W] / 0,196} = \sqrt[3]{5,33 \text{ см}^3 / 0,196} = 3,01 \text{ см} = \\ = 30,1 \text{ мм} \approx 32 \text{ мм (ГОСТ 6636–69)}.$$

**Сечение II типа.** Полярный момент сопротивления сечения II типа:

$$W_p = \frac{\pi d_{II}^3}{16} (1 - c^4) = 0,196 d_{II}^3 (1 - 0,85^4) = 0,0937 d_{II}^3 \geq [W],$$

где  $c = \frac{d_0}{d_{II}} = 0,85$ .

Выразим и вычислим внешний диаметр  $d_{II}$  поперечного сечения II типа:

$$d_{II} \geq \sqrt[3]{[W] / 0,0937} = \sqrt[3]{5,33 \text{ см}^3 / 0,0937} = 3,85 \text{ см} = \\ = 38,5 \text{ мм} \approx 40 \text{ мм (ГОСТ 6636–69)}.$$

Внутренний диаметр сечения  $d_0 = 0,85 d_{II} = 0,85 \cdot 38,5 \text{ мм} = 32,7 \text{ мм} \approx 32 \text{ мм}$  (ГОСТ 6636–69).

#### 6. Соотношение весов валов I и II типа.

$$G_I : G_{II} = m_I : m_{II} = V_I : V_{II} = S_I : S_{II}.$$

Площадь сечения I типа:  $S_I = \frac{\pi}{4} d_I^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (32 \text{ мм})^2 = 804 \text{ мм}^2$ .

Площадь сечения II типа:  $S_{II} = S^{\text{внешнего контура}} - S^{\text{отверстия}} = \\ = \frac{\pi}{4} d_{II}^2 - \frac{\pi}{4} d_0^2 = \frac{\pi}{4} \cdot (40 \text{ мм})^2 - \frac{\pi}{4} \cdot (32 \text{ мм})^2 = 452 \text{ мм}^2$ .

$$G_I : G_{II} = S_I : S_{II} = 804 \text{ мм}^2 : 452 \text{ мм}^2 = 1,78 : 1.$$

#### Ответ

1. Диаметр сечения I типа:  $d_I = 32 \text{ мм}$ ;  
размеры сечения II типа:  $d_{II} = 40 \text{ мм}$ ,  $d_0 = 32 \text{ мм}$ .
2. Соотношение весов валов I и II типа:  $G_I : G_{II} = 1,78 : 1$ .

#### Вывод

Более рациональным является сечение II типа, так как вал II типа обладает меньшим весом при той же грузоподъемности.

## Задача 2

Дано

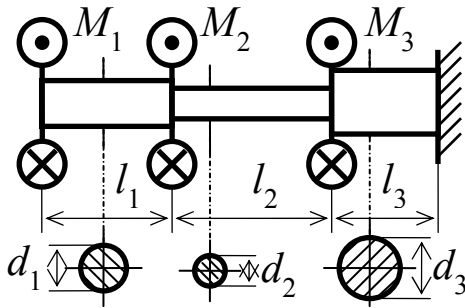


Рис. 3

Консольный вал (см. рис. 3) переменного круглого поперечного сечения нагружен сосредоточенными моментами. Исходные данные:  $l_1 = l$ ;  $l_2 = 2l$ ;  $l_3 = l$ ;  $M_1 = M$ ;  $M_2 = -1,5M$ ;  $M_3 = -M$ . Размеры:  $l = 30$  см;  $d_1 = 24$  мм;  $d_2 = 20$  мм;  $d_3 = 32$  мм.

Материал стержня — сталь 35ХМ с  $\tau_m = 470$  МПа;  $[n_m] = 3,0$ .

Определить

из расчета на прочность допускаемое значение параметра нагрузки.

Решение

**1. Расчетная схема вала.** Изобразим вал в масштабе (см. рис. 4), проставим размеры, выразив их через параметры длины  $l$ . Покажем внешние нагрузки, выразив их через параметр нагрузки  $M$ . Для удобства расчетов введем параметр размера сечения  $d = d_2$ . Тогда  $d_1 = 1,2d$ ;  $d_3 = 1,6d$ .

**2. Анализ нагруженности вала.** Построим эпюру крутящего момента  $\mathcal{E}T$  (см. рис. 4).

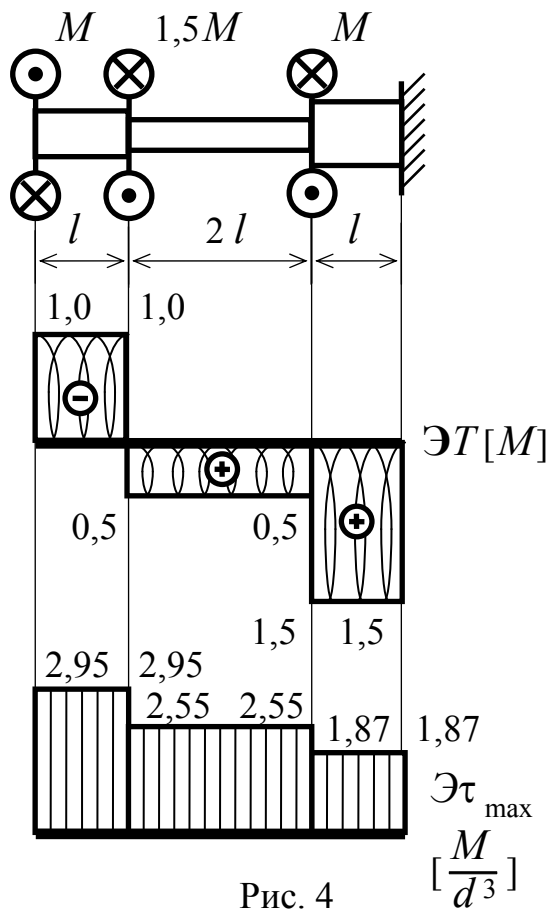


Рис. 4

**3. Анализ напряженного состояния.** Построим эпюру максимальных касательных напряжений  $\mathcal{E}\tau_{\max} : \tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$ .

**Левый участок:**

$$W_1 = \frac{\pi d_1^3}{16} = 0,196 (1,2 d)^3 = 0,339 d^3;$$

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_1} = M / (0,339 d^3) = 2,95 \frac{M}{d^3}.$$

**Средний участок:**  $W_2 = \frac{\pi d_2^3}{16} = 0,196 d^3;$

$$\tau_2 = \frac{T_2}{W_2} = 0,5 M / (0,196 d^3) = 2,55 \frac{M}{d^3}.$$

**Правый участок:**

$$W_3 = \frac{\pi d_3^3}{16} = 0,196 (1,6 d)^3 = 0,803 d^3;$$

$$\tau_3 = \frac{T_3}{W_3} = 1,5 M / (0,803 d^3) = 1,87 \frac{M}{d^3}.$$

Наибольшее действующее касательное напряжение в вале:

$$\max \tau_{\max} = 2,95 \frac{M}{d^3}.$$

**4. Расчет на прочность.** Запишем условие прочности балки:

$$\max \tau_{\max} \leq [\tau] \Rightarrow 2,95 \frac{M}{d^3} \leq [\tau].$$

Определим допускаемое напряжение:

$$[\tau] = \frac{\tau_m}{[n_m]} = 470 \text{ МПа} / 3,0 = 157 \text{ МПа}.$$

Выразим и вычислим допускаемое значение параметра нагрузки:

$$M \leq [M] = 2,95 [\tau] \cdot d^3 = 2,95 \cdot 157 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot (0,02 \text{ м})^3 = 1389 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

**Ответ**

Допускаемое значение параметра нагрузки  $[M] = 1389 \text{ Н}\cdot\text{м}.$

## Практическое задание

### Задача 14

#### Дано

Консольный вал (см. рис. 5.1, 5.2) нагружен сосредоточенными моментами. Параметр длины  $l$ ; параметр нагрузки  $M$ , параметр размера поперечного сечения  $d$ . Принять  $M = 500 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ;  $l = 0,3 \text{ м}$ ;  $[n_m] = 2$ .

Исходные данные приводятся в табл. 2. Механические характеристики материалов взять из табл. 3.

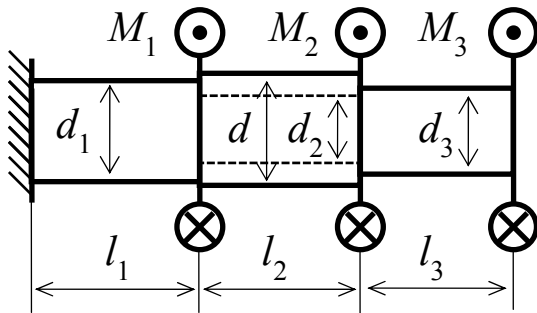


Схема 5.1

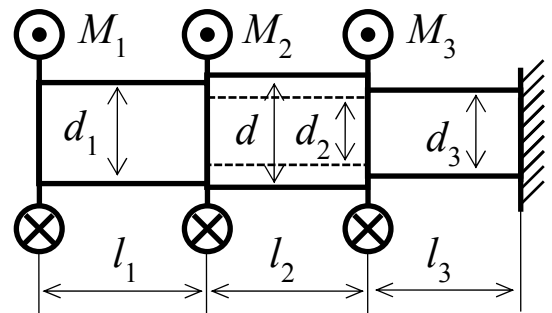


Схема 5.2

Рис. 5

Таблица 2

Цифра вари- анта	Порядковый номер цифры в варианте										
	1			2			3			4	
	$\frac{M_3}{M}$	$\frac{l_1}{l}$	$\frac{d_2}{d}$	$\frac{M_1}{M}$	$\frac{l_2}{l}$	$\frac{d_1}{d}$	$\frac{M_2}{M}$	$\frac{l_3}{l}$	материал	$\frac{d_3}{d}$	схема
0	2,5	1,0	0,95	-1,5	2,9	1,15	1,0	3,5	20	0,62	14.1
1	2,8	1,1	0,92	-1,8	2,8	1,12	-1,0	3,4	35	0,65	14.2
2	3,0	1,2	0,90	-2,0	2,5	1,10	1,5	3,2	45	0,68	14.1
3	3,2	1,3	0,88	-2,2	2,6	1,05	-1,5	3,0	20ХН	0,70	14.2
4	3,4	1,4	0,85	-2,4	2,5	1,00	2,0	2,8	40Н	0,72	14.1
5	-3,5	1,5	0,82	2,5	2,4	0,98	-2,0	2,6	40Х	0,75	14.2
6	-3,8	1,6	0,80	2,8	2,3	0,95	2,5	2,5	40ХН	0,78	14.1
7	-4,0	1,7	0,78	3,0	2,2	0,92	-2,5	2,4	Ст. 3	0,80	14.2
8	-4,2	1,8	0,75	3,2	2,1	0,90	3,0	2,2	Ст. 4	0,82	14.1
9	-4,5	1,9	0,72	3,5	2,0	0,88	-3,0	2,0	Ст. 5	0,85	14.2

#### Определить

размер  $d$  поперечного сечения вала из расчета на прочность.

Таблица 3

## Механические свойства сталей

Материал	Марка	$\sigma_m$ , МПа	$\sigma_{\epsilon}$ , МПа	$\tau_m$ , МПа	$E$ , ГПа
Сталь углеродистая	Ст. 3	230	380...470	160	200
	Ст. 4	240	430...550	170	
	Ст. 5	280	520...650	190	
	20	220	400...500	160	
	35	270	550	190	
	45	320	600	220	
Сталь легированная	20ХН	600	800	350	210
	40Н	400	700	260	
	40Х	800	1000	440	
	40ХН	750	900	390	