

## ТЕМА 13. ИЗГИБ

### Алгоритм решения задач

В СМ принято решать задачи расчетов на прочность в параметрах, выражая длины участков балки через параметры длины, размеры поперечного сечения через параметр размера сечения, приложенные внешние нагрузки через параметр нагрузки.

### Алгоритм решения задач

**1. Расчетная схема балки:**

- изобразить балку в масштабе, указать размеры, выразив их через параметры длины и размера сечения;
- показать внешние нагрузки, выразив их через параметр нагрузки.

**2. Анализ нагруженности балки:**

- построить эпюру изгибающего момента  $\mathcal{M}_x$ .
- определить наибольшее действующее напряжение  $\max M_x$ .

**3. Анализ напряженного состояния:**

- определить геометрическую характеристику прочности — осевой момент сопротивления сечения  $W_x$ ;
- найти наибольшее действующее напряжение  $\max \sigma_{\max}$ .

**4. Расчет на прочность:**

- записать условие прочности балки;
- определить допускаемые напряжения.

**5. Определение искомой величины:**

- выразить из условия прочности и вычислить искомую величину.

### З а м е ч а н и я

1. Решение должно быть выполнено в общем виде. Числовые значения исходных данных необходимо подставлять только в конечную расчетную формулу для вычисления искомой величины. Подстановку выполнять с учетом размерностей всех величин. Ответ приводить с точностью до трех значащих цифр (например, 8,51 кН; 5,67 мм).

2. В проектировочных расчетах размеры сечения балки требуется округлить в **большую** сторону в соответствии с ГОСТом 6636–69 на нормальные линейные размеры, часть которого приведена в табл. 1.

## Нормальные линейные размеры. ГОСТ 6636–69. Ряд Ra40.

1.00	1.05	1.10	1.15	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.8	1.9
2.0	2.1	2.2	2.4	2.5	2.6	2.8				
3.0	3.2	3.4	3.6	3.8						
4.0	4.2	4.5	4.8							
5.0	5.6									
6.0	6.3	6.7								
7.1	7.5									
8.0	8.5									
9.0	9.5									
10										

Числа  $<1$  и  $>10$  получают соответственно делением или умножением приведенных выше величин на 10, 100, 1000 и т. д.

## Примеры решения задач

## Задача 1

Дано

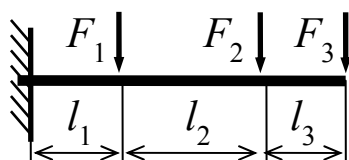
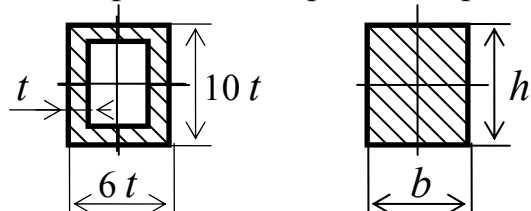


Рис. 1

Консольная балка (см. рис. 1) постоянного поперечного сечения нагружена сосредоточенными силами. Исходные данные:  $l_1 = l$ ;  $l_2 = 1,5 l$ ;  $l_3 = 2 l$ ;  $F_1 = 2,5 P$ ;  $F_2 = -4 P$ ;  $F_3 = P$ . Параметр длины  $l = 40$  см; параметр нагрузки  $P = 10$  кН. Материал стержня — сталь 35 с  $\sigma_m = 270$  МПа;  $[n_m] = 1,8$ .

Определить

1. Из расчета на прочность размеры поперечного сечения балки двух типов:



Тип I

Тип II

Рис. 2

- тип I — прямоугольное тонкостенное сечение, приведенное на рис. 2; тип II — прямоугольное сплошное сечение с соотношением высоты и ширины таким же, как для типа I,  $b = 0,6 h$  (см. рис. 2);

2. Сравнить веса балок I и II типа.

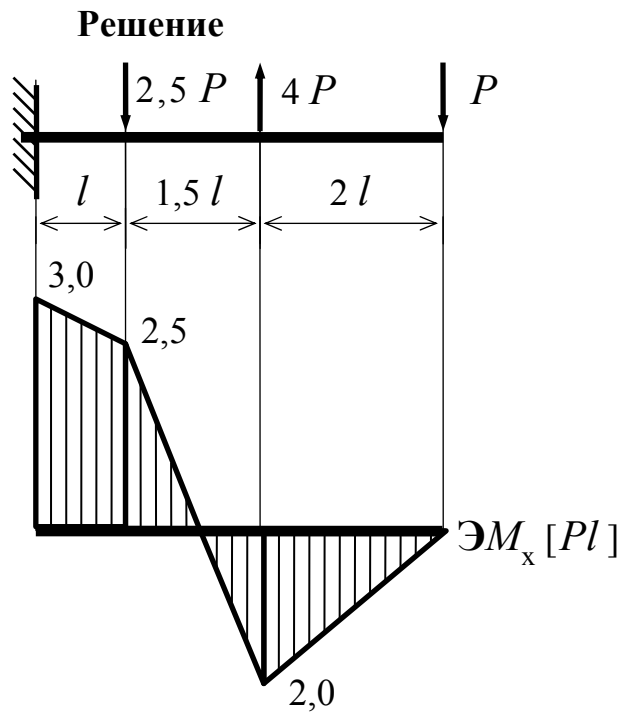


Рис. 3

**1. Расчетная схема балки.** Изобразим балку в масштабе (см. рис. 3), проставим размеры, выразив их через параметры длины  $l$ . Покажем внешние нагрузки, выразив их через параметр нагрузки  $P$ .

**2. Анализ нагруженности балки.** Построим эпюру изгибающего момента  $M_x$  (см. рис. 3).

$$\max M_x = 3,0 Pl.$$

**3. Анализ напряженного состояния.** Наибольшее действующее напряжение в балке

$$\max \sigma_{\max} = \frac{\max M_x}{W_x} = 3,0 \frac{Pl}{W_x}.$$

**4. Расчет на прочность.** Запишем условие прочности балки:

$$\max \sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Определим допускаемое напряжение:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{[n_m]} = 270 \text{ МПа} / 1,8 = 150 \text{ МПа}.$$

Подставим наибольшее действующее напряжение в условие прочности:

$$3,0 \frac{Pl}{W_x} \leq [\sigma],$$

откуда осевой момент сопротивления сечения равен

$$\begin{aligned} W_x \geq [W] &= 3,0 \frac{Pl}{[\sigma]} = 3,0 \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 0,4 \text{ м} / 150 \cdot 10^6 \text{ Па} = \\ &= 80,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 80,0 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

**5. Подбор сечений.**

**Сечение I типа.** Осевой момент инерции сечения относительно горизонтальной оси  $x$ :

$$\begin{aligned} I_x &= I_x^{\text{внешнего контура}} - I_x^{\text{отверстия}} = \\ &= \frac{1}{12} \cdot 6t \cdot (10t)^3 - \frac{1}{12} \cdot 4t \cdot (8t)^3 = 329t^4. \end{aligned}$$

Осевой момент сопротивления сечения I типа:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = 329 t^4 / 5 t = 65,9 t^3 \geq [W].$$

Выразим и вычислим размер  $t$  поперечного сечения I типа:

$$t \geq \sqrt[3]{[W] / 65,9} = \sqrt[3]{80,0 \text{ см}^3 / 65,9} = 1,07 \text{ см} = 10,7 \text{ мм} \approx 11 \text{ мм (ГОСТ 6636-69)}.$$

Высота сечения  $10 t = 110 \text{ мм}$ .

Ширина сечения  $6 t = 66 \text{ мм} \approx 67 \text{ мм (ГОСТ 6636-69)}$ .

**Сечение II типа.** Осевой момент сопротивления сечения II типа:

$$W_x = \frac{bh^3}{6} = \frac{1}{6} \cdot 0,6 h \cdot (h)^2 = 0,10 h^3 \geq [W].$$

Выразим и вычислим размер  $h$  поперечного сечения II типа:

$$h \geq \sqrt[3]{[W] / 0,10} = \sqrt[3]{80,0 \text{ см}^3 / 0,10} = 9,28 \text{ см} = 92,8 \text{ мм} \approx 95 \text{ мм (ГОСТ 6636-69)}.$$

Ширина сечения  $b = 0,6 h = 0,6 \cdot 92,8 \text{ мм} = 55,7 \text{ мм} \approx 56 \text{ мм (ГОСТ 6636-69)}$ .

**6. Соотношение весов балок I и II типа.**

$$G_I : G_{II} = S_I : S_{II}.$$

$$\begin{aligned} \text{Площадь сечения I типа: } S_I &= S^{\text{внешнего контура}} - S^{\text{отверстия}} = \\ &= 67 \text{ мм} \cdot 110 \text{ мм} - 45 \text{ мм} \cdot 88 \text{ мм} = 3410 \text{ мм}^2. \end{aligned}$$

$$\text{Площадь сечения II типа: } S_{II} = b \cdot h = 56 \text{ мм} \cdot 95 \text{ мм} = 5320 \text{ мм}^2.$$

$$G_I : G_{II} = S_I : S_{II} = 3410 \text{ мм}^2 : 5320 \text{ мм}^2 = 1 : 1,56.$$

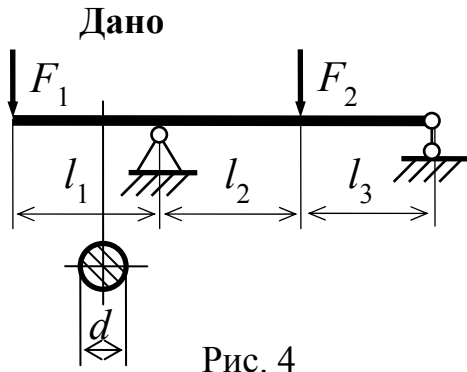
**Ответ**

1. Размеры сечения I типа:  $t = 11 \text{ мм}$ , высота  $110$ , ширина  $67 \text{ мм}$ ; размеры сечения II типа:  $b = 56 \text{ мм}$ ,  $h = 95 \text{ мм}$ .
2. Соотношение весов балок I и II типа:  $G_I : G_{II} = 1 : 1,56$ .

**Вывод**

Более рациональным является сечение I типа, так как балка I типа обладает меньшим весом при той же грузоподъемности.

## Задача 2

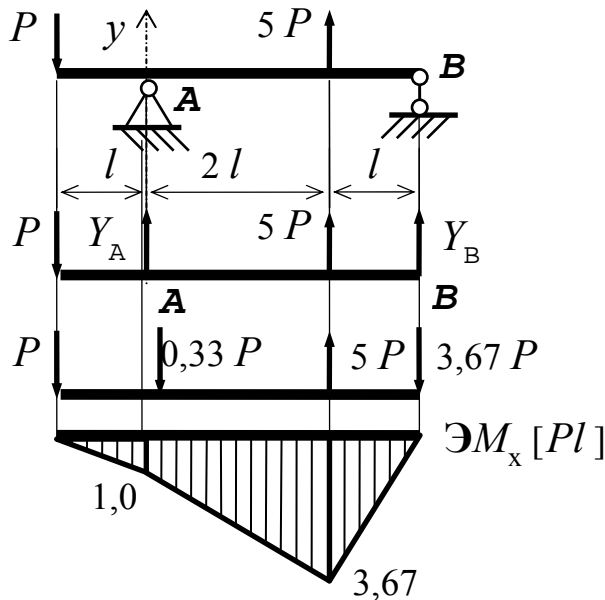


Двухопорная балка (см. рис. 4) постоянного круглого поперечного сечения нагружена сосредоточенными силами. Исходные данные:  $l_1 = l$ ;  $l_2 = 2l$ ;  $l_3 = l$ ;  $F_1 = P$ ;  $F_2 = -5P$ . Параметр длины  $l = 60$  см; диаметр сечения  $d = 100$  мм. Материал стержня — сталь Ст.3 с  $\sigma_m = 230$  МПа;  $[n_m] = 1,4$ .

### Определить

из расчета на прочность допускаемое значение параметра нагрузки.

### Решение



**1. Расчетная схема балки.** Изобразим балку в масштабе (см. рис. 5), представим размеры, выразив их через параметры длины  $l$ . Покажем внешние нагрузки, выразив их через параметр нагрузки  $P$ .

Определим реакции опор из условий равновесия балки:

$$\sum \tilde{M}_A \bar{F}_k = 0 = +P \cdot l + 5P \cdot 2l + Y_B \cdot 3l \Rightarrow Y_B = -3,67P;$$

$$\sum \tilde{M}_B \bar{F}_k = 0 = +P \cdot 4l - 5P \cdot l - Y_A \cdot 3l \Rightarrow Y_A = -0,33P.$$

Проверка:

$$\sum F_{ky} = 0 = -P + 5P + Y_A + Y_B = -P + 5P - 0,33P - 3,67P = 0.$$

**2. Анализ нагруженности балки.** Построим эпюру изгибающего момента  $\mathcal{M}_x$  (см. рис. 5).

$$\max M_x = 3,67 Pl.$$

**3. Анализ напряженного состояния.** Наибольшее действующее напряжение в балке

$$\max \sigma_{\max} = \frac{\max M_x}{W_x} = 3,67 \frac{Pl}{W_x} = 37,4 \frac{Pl}{d^3},$$

где  $W_x = \frac{\pi}{32} \cdot d^3$  — осевой момент сопротивления для круглого сечения.

**4. Расчет на прочность.** Запишем условие прочности балки:

$$\max \sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Определим допускаемое напряжение:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{[n_m]} = 230 \text{ МПа} / 1,4 = 164 \text{ МПа}.$$

Подставим наибольшее действующее напряжение в условие прочности:

$$37,4 \frac{Pl}{d^3} \leq [\sigma],$$

откуда параметра нагрузки равен

$$P \leq [P] = 0,0267 \frac{[\sigma] d^3}{l} = 0,0267 \cdot 164 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot (0,10 \text{ м})^3 / 0,6 \text{ м} = 7318 \text{ Н} = 7,31 \text{ кН}.$$

**Ответ**

Допускаемое значение параметра нагрузки  $[P] = 7,31 \text{ кН}$ .

## Практическое задание

### Задача 15

**Дано**

Консольная балка (см. рис. 6.1, 6.2) нагружена сосредоточенными силами. Параметр длины  $l$ ; параметр нагрузки  $P$ . Принять  $P = 10 \text{ кН}$ ;  $l = 0,4 \text{ м}$ ;  $[n_m] = 2$ . Исходные данные приводятся в табл. 2. Механические характеристики материалов взять из табл. 3.

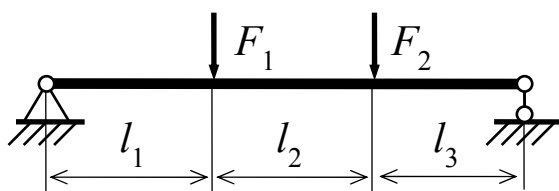


Схема 6.1

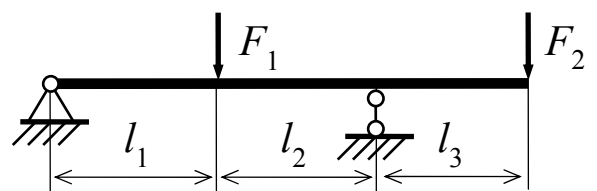


Схема 6.2

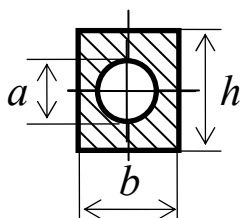


Схема 6.3

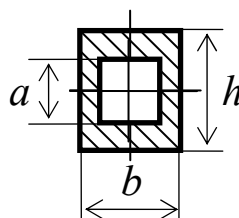


Схема 6.4

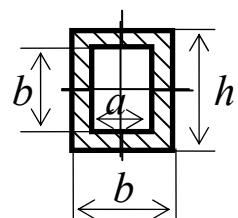


Схема 6.5

Рис. 6

## Определить

1. Из расчета на прочность размеры поперечного сечения балки трех типов:
  - тип I — прямоугольное пустотелое сечение, приведенное на одной из схем 6.3...6.5 (см. рис. 6);
  - тип II — прямоугольное сплошное сечение с соотношением высоты и ширины таким же, как для типа I;
  - тип III — сплошное круглое сечение.
2. Сравнить веса балок I, II и III типа.

Таблица 2

Цифра вари- анта	Порядковый номер цифры в варианте									
	1		2			3			4	
	схема се- чения	$\frac{h}{b}$	$\frac{F_1}{F}$	$\frac{l_2}{l}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{F_2}{F}$	$\frac{l_3}{l}$	материал	$\frac{l_1}{l}$	схема балки
0	15.5	1,50	– 1,5	2,9	0,98	1,0	3,5	20XH	1,0	15.1
1	15.3	1,55	– 1,8	2,8	0,95	– 1,0	3,4	40H	1,1	15.2
2	15.4	1,60	– 2,0	2,5	0,92	1,5	3,2	40X	1,2	15.1
3	15.5	1,65	– 2,2	2,6	0,90	– 1,5	3,0	40XH	1,3	15.2
4	15.3	1,70	– 2,4	2,5	0,88	2,0	2,8	Ст. 3	1,4	15.1
5	15.4	1,75	2,5	2,4	0,85	– 2,0	2,6	Ст. 4	1,5	15.2
6	15.5	1,80	2,8	2,3	0,82	2,5	2,5	Ст. 5	1,6	15.1
7	15.3	1,85	3,0	2,2	0,80	– 2,5	2,4	20	1,7	15.2
8	15.4	1,90	3,2	2,1	0,78	3,0	2,2	35	1,8	15.1
9	15.5	1,95	3,5	2,0	0,75	– 3,0	2,0	45	1,9	15.2

Таблица 3

## Механические свойства сталей

Материал	Марка	$\sigma_m$ , МПа	$\sigma_{\epsilon}$ , МПа	$\tau_m$ , МПа	$E$ , ГПа
Сталь углеродистая	Ст. 3	230	380...470	160	200
	Ст. 4	240	430...550	170	
	Ст. 5	280	520...650	190	
	20	220	400...500	160	
	35	270	550	190	
	45	320	600	220	
Сталь легированная	20ХН	600	800	350	210
	40Н	400	700	260	
	40Х	800	1000	440	
	40ХН	750	900	390	