*Коментарий преподавателя: прорешайте 2-ю и 4-ю задачи, исправив в них ошибки*

**2. Заданы универсальное множество *U* и три его подмножества *A*, *B*, *C*.**

**Проверить (доказать или опровергнуть) справедливость соотношения:.**

# Решение

Доказать или опровергнуть:

$$\overbar{A∩B∩C}=\overbar{A}∩\overbar{B}∩\overbar{C}$$

*Но это совсем другое равенство, ведь симметрическая разность и пересечение далеко не одно и то же!*

Преобразуем правую часть

$$\overbar{A}∩\overbar{B}∩\overbar{C}=\left\{\begin{array}{c}правилоДеМоргана\\\overbar{P∪Q}=\overbar{P}∩\overbar{Q}\end{array}\right\}=\overbar{A}∩\overbar{B∪C}=$$

$$=\overbar{A∪(B∪C)}=\overbar{A∪B∪C}$$

Таким образом исходное утверждение сводится к виду:

$$\overbar{A∩B∩C}=\overbar{A∪B∪C}$$

Можем взять левую и правую части утверждения под знаком отрицания. Тождественности это не нарушит, лишь изменить результат выражения на противоположный.

$$̿=̿$$

Двойное отрицание есть само выражение, т.е. $̿=P$, тогда нам необходимо доказать или опровергнуть соотношение, которое тождественно исходному:

$A∩B∩C=A∪B∪C$ (\*)

Для опровержения данного утверждения достаточно найти один случай, при котором равенство не выполняется. Воспользуемся кругами Эйлера. Если заштрихованные области, соответствующие левой и правой части утверждения, не совпадают, значит утверждение не истинно.

Рассмотрим случай взаимного расположения множеств А, B и С в универсальном множестве U согласно рисунку:

U

A

B

C

Множество, соответствующее левой части утверждения (\*),$A∩B∩C$,будет иметь вид (более яркая желтая область на пересечении 3 кругов):

U

A

C

B

$$A∩B∩C$$

Множество, соответствующее правой части утверждения (\*),$A∪B∪C$,будет иметь вид (вся область зеленого цвета, полученная объединением областей 3 кругов):

U

$$A∪B∪C$$

Как видим, мы нашли по крайней мере один случай, при котором левая и правая часть соотношения (\*) не одинаковы (не тождественны), значит это соотношение не является тождеством. А значит и исходное соотношение также не является тождественно истинным.

**3. Задано бинарное отношение , где . Определить, выполняются ли для данного отношения свойства симметричности и рефлексивности. Ответ обосновать.**

*Не увидела заданного отношения.*

Представим отношение  матрицей, элементы которой равны 1, если элементы множества вступают в отношение R, и 0 если они этим отношением не обладают.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| R | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

В списке перечислим пары, обладающие отношением *R*:

R={ (1,1); (1,3);(1,5);(1,7);(1,9);

(2,2); (2,4);(2,6);(2,8);(2,10);

(3,1); (3,3);(3,5);(3,7);(3,9);

(4,2); (4,4);(4,6);(4,8);(4,10);

(5,1); (5,3);(5,5);(5,7);(5,9);

(6,2); (6,4);(6,6);(6,8);(6,10);

(7,1); (7,3);(7,5);(7,7);(7,9);

(8,2); (8,4);(8,6);(8,8);(8,10);

(9,1); (9,3);(9,5);(9,7);(9,9);

(10,2); (10,4);(10,6);(10,8);(10,10); }

Проверим отношение на рефлексивность и симметричность:

Рефлексивность есть, т.к. для любого элемента *a*пара (*a*, *a*) выполняется отношение *R*. Это видно и из таблицы, и может быть доказано аналитически, поскольку отношение R состоит в том, что сумма элементов x и y четная, то для пары (*a*, *a*) сумма будет *2а*, а это четное число.

Симметричность есть, т.к. для любых элементов *a* и b*,* для пары которых *(a, b)* выполняется отношение *R*, для пары *(b, a)* также выполняется отношение *R*. Это также видно и из таблицы, и понятно интуитивно: если сумма *(a + b)* четна, то и сумма *(b+a)* так четна, поскольку результат суммирования один.

**Ответ**: заданное отношение рефлексивно и симметрично.

4. **Упростив логическую функцию двух переменных , проверить ее самодвойственность, монотонность и линейность. Ответ обосновать**.

## Решение

Преобразуем последовательно функцию:

$$\left(x\~\overbar{(x\rightarrow \overbar{y})}\right)\rightarrow \left(x⊕\left(y\rightarrow x\right)\right)$$

Раскроем импликацию как $a\rightarrow b=\overbar{a}⋁b$

$$\left(x\~\overbar{(\overbar{x}∨\overbar{y})}\right)\rightarrow \left(x⊕\left(\overbar{y}∨x\right)\right)$$

Используем закон де Моргана, и преобразуем «исключающее или» как

$$a⊕b=a∙\overbar{b}∨\overbar{a}∙b$$

$$\left(x\~\left(̿⋅̿\right)\right)\rightarrow \left(x⋅\overbar{\left(\overbar{y}∨x\right)}∨\overbar{x}⋅\left(\overbar{y}⋁x\right)\right)$$

$$\left(x\~\left(x⋅y\right)\right)\rightarrow \left(x⋅̿⋅\overbar{x}∨\overbar{x}⋅\overbar{y}∨\overbar{x}⋅x\right)$$

Учитывая, что $a∙\overbar{a}=0$, получим

$$\left(x\~\left(x⋅y\right)\right)\rightarrow \left(0∨\overbar{x}⋅\overbar{y}∨0\right)$$

$$\left(x\~\left(x⋅y\right)\right)\rightarrow \left(\overbar{x}⋅\overbar{y}\right)$$

Преобразуем эквивалентность как $a\~b=a∙b∨\overbar{a}∙\overbar{b}$, тогда

$$\left(x∙\left(x⋅y\right)∨\overbar{x}∙\overbar{\left(x⋅y\right)}\right)\rightarrow \left(\overbar{x}⋅\overbar{y}\right)$$

$$\left(x∙y∨\overbar{x}∙\left(\overbar{x}∨\overbar{y}\right)\right)\rightarrow \left(\overbar{x}⋅\overbar{y}\right)$$

$$\left(x∙y∨\overbar{x}∙\overbar{x}∨\overbar{x}∙\overbar{y}\right)\rightarrow \left(\overbar{x}⋅\overbar{y}\right)$$

$$\left(x∙y∨\overbar{x}∨\overbar{x}∙\overbar{y}\right)\rightarrow \left(\overbar{x}⋅\overbar{y}\right)$$

$$\left(x∙y∨\overbar{x}⋅1∨\overbar{x}∙\overbar{y}\right)\rightarrow \left(\overbar{x}⋅\overbar{y}\right)$$

$$\left(x∙y∨\overbar{x}⋅(1∨\overbar{y})\right)\rightarrow \left(\overbar{x}⋅\overbar{y}\right)$$

$$\left(x∙y∨\overbar{x}⋅1\right)\rightarrow \left(\overbar{x}⋅\overbar{y}\right)$$

$$\left(x∙y∨\overbar{x}\right)\rightarrow \left(\overbar{x}⋅\overbar{y}\right)$$

Снова преобразуем импликацию, и упростим оставшееся

$$\overbar{\left(x∙y∨\overbar{x}\right)}∨\overbar{\left(\overbar{x}⋅\overbar{y}\right)}$$

$$\left(\overbar{x∙y}⋅̿\right)∨\left(x∨y\right)$$

$$\left(\left(\overbar{x}∨\overbar{y}\right)⋅x\right)∨\left(x∨y\right)$$

$$\left(\overbar{x}⋅x∨\overbar{y}⋅x\right)∨x∨y$$

$$\left(0∨\overbar{y}⋅x\right)∨x∨y$$

$$\overbar{y}⋅x∨x∨y$$

$$\overbar{y}⋅x∨x⋅1∨y$$

$$\left(\overbar{y}∨1\right)⋅x∨y$$

$$\left(1\right)⋅x∨y$$

$$x∨y$$

Таким образом, исходная функция упрощена до вида :
$x∨y$*Полученная функция не совпадает с исходной убедитесь в этом.*

Проверим функцию *f*на самодвойственность (функция двойственна сама себе, т.е.
$$f\left(x,y\right)=\overbar{f}(\overbar{x},\overbar{y})$$

Проверим это с помощью таблицы истинности

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | $$f\left(x,y\right)= x∨y$$ | $$\overbar{x}$$ | $$\overbar{y}$$ | $$f\left(\overbar{x},\overbar{y}\right)= \overbar{x}∨\overbar{y}$$ | $$\overbar{f}(\overbar{x},\overbar{y})$$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Как видим, столбцы значений функций не совпадают, значит искомое равенство не выполняется и функция *f* не самодвойственная.

Согласно той же таблице истинности для функции f она монотонна, так как выполняется условие:

$$a\_{1}a\_{2}\geq b\_{1}b\_{2}\rightarrow f\left(a\_{1}a\_{2}\right)\geq f\left(b\_{1}b\_{2}\right)$$

По таблицам истинности булевой функции находим коэффициенты полинома Жегалкина для этой функции

$$a\_{0}=f\left(0,0\right)=0$$

$$a\_{1}=f\left(0, 0\right)⨁f\left(1,0\right)=1$$

$$a\_{2}=f\left(0, 0\right)⨁f\left(0,1\right)=1$$

Выписываем многочлен $Ф\left(x\_{1},…,x\_{n}\right)=a\_{0}⨁a\_{1}x\_{1}\bigoplus\_{}^{}…⨁a\_{n}x\_{n}$=

$$=0⨁a\_{1}x⨁a\_{2}y=0⨁1x⨁1y=x⨁y$$

Проверяем, задает ли он эту функцию:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| x | y | $$f\left(x,y\right)= x∨y$$ | $$x⨁y$$ |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

Таблицы истинности не совпадают, поэтому функция $f(x\_{1},x\_{2},…,x\_{n})$ нелинейная .

**Ответ**: Исходная функция упрощается до выражениявида
$f\left(x,y\right)= x∨y$, которая в свою очередь не самодвойственная, монотонная и нелинейная, а значит и исходная функция обладает этими же свойствами.