РГЗ № 3: **ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Образец решения и оформления

Задание: $xy' = y - x\,\mathrm{ctg}\,(y/x)$, $y(1) = \pi/3$, $\Delta x = 0.04$.

---

1. *Приближенное решение методом Эйлера.*

1.1. С помощью теоремы Коши найдем область существования и единственности решения заданного ДУ на плоскости Oxy.

$$xy' = y - x\,\mathrm{ctg}\left(\frac{y}{x}\right) \;\Rightarrow\; y' = \frac{y}{x} - \mathrm{ctg}\left(\frac{y}{x}\right) \;\Rightarrow\; \varphi(x, y) = \frac{y}{x} - \mathrm{ctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Найдем частную производную $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, считая, что $x = \mathrm{const}$: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{y}{x}\right)} \cdot \dfrac{1}{x}$.

Очевидно, что функции $\varphi(x, y)$ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ определены и непрерывны при

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \sin\left(\dfrac{y}{x}\right) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{y}{x} \neq \pi k,\ k \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq \pi k x,\ k \in Z \end{cases}$$

Таким образом, точка $M_0(1, \pi/3)$ удовлетворяет условиям теоремы Коши и, следовательно, через эту точку проходит единственное решение заданного ДУ.

1.2. Найдем значения контрольных точек:

$$A = x_0 + 10\,\Delta x = 1 + 10 \cdot 0.04 = 1.4,$$
$$B = x_0 + 20\,\Delta x = 1 + 20 \cdot 0.04 = 1.8.$$

1.3. Найдем приближенное решение ДУ с помощью метода Эйлера на отрезке $x \in [1; 1.8]$ с шагом $\Delta x = 0.04$.

Расчеты выполнены в программе Excel и приведены в следующей таблице:

	A	B	C	D
1	x_i	y_i	$\varphi\,(x_i, y_i)$	*Примечания*
2	**1**	**1,0472**	0,4698	0,04
3	1,04	1,0660	0,4176	значение Δx
4	1,08	1,0827	0,3639	
5	1,12	1,0973	0,3085	
6	1,16	1,1096	0,2513	
7	1,2	1,1196	0,1920	
8	1,24	1,1273	0,1304	
9	1,28	1,1325	0,0662	
10	1,32	1,1352	-0,0009	
11	1,36	1,1351	-0,0713	
12	**1,4**	**1,1323**	-0,1455	Контрольная точка A
13	1,44	1,1265	-0,2240	
14	1,48	1,1175	-0,3075	
15	1,52	1,1052	-0,3968	
16	1,56	1,0893	-0,4931	
17	1,6	1,0696	-0,5976	
18	1,64	1,0457	-0,7121	
19	1,68	1,0172	-0,8391	
20	1,72	0,9837	-0,9817	
21	1,76	0,9444	-1,1446	
22	**1,8**	**0,8986**	-1,3346	Контрольная точка B

Небольшие пояснения по поводу заполнения таблицы в Excel.

- В столбце **A** вычисляются значения x_i по следующим формулам:
  для **A2** заданы начальные условия, т.е. = 1
  для **A3–A22** вычисляем значение x_i по формуле $x_{i+1} = x_i + \Delta x$. Величина Δx задана в ячейке **D2**. В Excel'е при копировании формулы "вниз" все номера ячеек автоматически увеличиваются на 1. Чтобы номер не изменялся, перед ним надо поставить знак $. То же самое происходит с буквенными названиями столбцов при копировании вправо.
  Таким образом, в ячейке **A3** задаем формулу: = **A2**+$**D**$**2** и копируем ее вниз до строки № 22 включительно. В ячейке **A4** будет формула: = **A3**+$**D**$**2** и т.д.

- В столбце **B** вычисляются значения y_i по следующим формулам:
  для **B2** заданы начальные условия, т.е. = ПИ()/3.
  для **B3–B22** вычисляем значение y_i по формуле $y_i = y_{i-1} + \varphi(x_{i-1}. y_{i-1})\cdot\Delta x$. Обратите внимание, что для вычисления y в текущей строке все необходимые величины берутся из предыдущей строки.
  Таким образом, в ячейке **B3** задаем формулу: = **B2**+**C2***$**D**$**2** и копируем ее вниз до строки № 22 включительно. В ячейке **B4** будет формула: = **B3**+**C3***$**D**$**2** и т.д.

- В столбце **C** вычисляются значения производной в точке (x_i, y_i). Т.к. в данном примере $y' = \frac{y}{x} - \mathrm{ctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\Rightarrow$ для ячейки **C2** задаем формулу
  = **B2**/**A2**-1/TAN(**B2**/**A2**) и копируем ее в ячейки **C3–C22**.

<u>Замечание.</u> В таблице обязательно должна быть шапка с пояснением, что в каком столбце вычисляется, а также буквенно-цифровая нумерация строк и столбцов. Кроме того, необходимо отдельно (можно от руки) выписать формулы, по которым вычисляются элементы ячеек строки № 3.

1.4. Контрольные значения приближенного решения:
$\bar{y}_1 = 1{,}1323$ при $x = 1{,}4$; $\bar{y}_2 = 0{,}8986$ при $x = 1{,}8$.

2. *Аналитическое решение.* [Пункты 2.1–2.3 можно оформлять от руки]

2.1. Найдем общее решение заданного ДУ.

$y' = \frac{y}{x} - \mathrm{ctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ — однородное ДУ 1-го порядка, т.к. имеет вид $F\left(y', \frac{y}{x}\right) = 0$.

Сделаем замену $t = \frac{y}{x}$, $y = xt$, $y' = t + xt'$, где $t' = \frac{dt}{dx}$ $\Rightarrow$

$$t + xt' = t - \mathrm{ctg}(t) \;\Rightarrow\; x\frac{dt}{dx} = -\mathrm{ctg}\,t \;\Big|\cdot \frac{dx}{x\,\mathrm{ctg}\,t} \;\Rightarrow$$

$$\int \frac{dt}{\mathrm{ctg}\,t} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \text{т.к.} \quad \frac{dt}{\mathrm{ctg}\,t} = \frac{\sin t\,dt}{\cos t} = \frac{-d(\cos t)}{\cos t}, \quad \text{то}$$

$$-\ln|\cos t| = -\ln|x| - \ln C \quad \text{или} \quad \cos t = C\,x, \quad \text{откуда} \quad t = \arccos(Cx).$$

Окончательно получаем: $\boxed{y = x\arccos(Cx)}$ — общее решение заданного ДУ.

2.2. Проверка общего решения.

Найдем $y' = \arccos(Cx) - x\cdot\frac{C}{\sqrt{1 - C^2x^2}}$ и подставим y и y' в ДУ:

$$\arccos(Cx) - x\cdot\frac{C}{\sqrt{1 - C^2x^2}} = \frac{x\arccos(Cx)}{x} - \mathrm{ctg}\left(\frac{x\arccos(Cx)}{x}\right).$$

Учтем, что $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$. Если $\alpha = \arccos\beta$, то $\operatorname{ctg}(\arccos\beta) = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$,

$$\Rightarrow \quad \arccos(Cx) - \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}} = \arccos(Cx) - \frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}$$

$\Rightarrow$ получили равенство, верное при $\forall x$ и $\forall C$ ($\in$ОДЗ).

2.3. Частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = \pi/3$.

Т.к. $y = x\arccos(Cx) \;\Rightarrow\; \dfrac{\pi}{3} = 1\cdot\arccos(1\cdot C) \;\Rightarrow\; \arccos C = \dfrac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; C = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

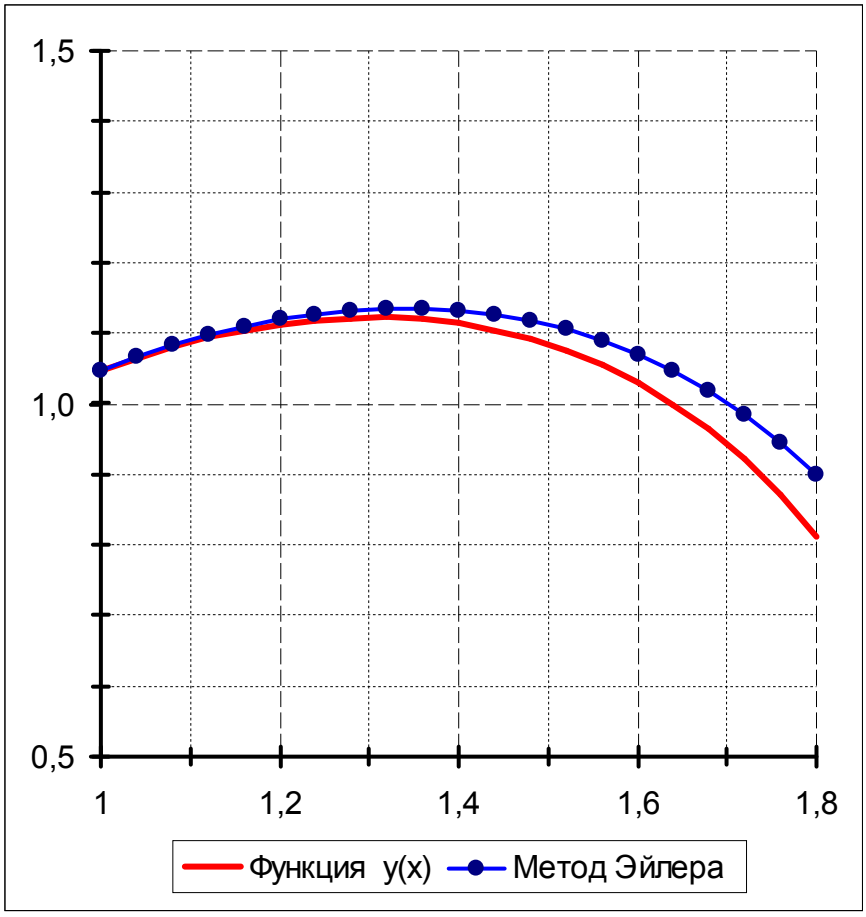
Таким образом, частное решение имеет вид: $\boxed{y = x\arccos\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.

2.4. Контрольные значения точного решения:

$Y_1 = 1{,}1136$ при $x = 1{,}4$; $Y_2 = 0{,}8118$ при $x = 1{,}8$.

3. *Графическое отображение результатов и контроль правильности решения.*

3.1. Графики точного и приближенного решений на интервале $x \in [1;\ 1.8]$.



3.2. Погрешности вычислений в точках A и B:

- В точке A: $\Delta_1 = |\,\bar{y}_1 - Y_1\,| = |\,1{,}1136 - 1{,}1323\,| = 0{,}0187$;

$$\delta_1 = \left|\frac{\Delta_1}{Y_1}\right|\cdot 100\% = \frac{0{,}0187}{1{,}1136}\cdot 100\% = 1{,}68\%$$

- В точке B: $\Delta_2 = |\,\bar{y}_2 - Y_2\,| = |\,0{,}8118 - 0{,}8986\,| = 0{,}0868$;

$$\delta_2 = \left|\frac{\Delta_2}{Y_2}\right|\cdot 100\% = \frac{0{,}0868}{0{,}8118}\cdot 100\% = 10{,}69\%$$

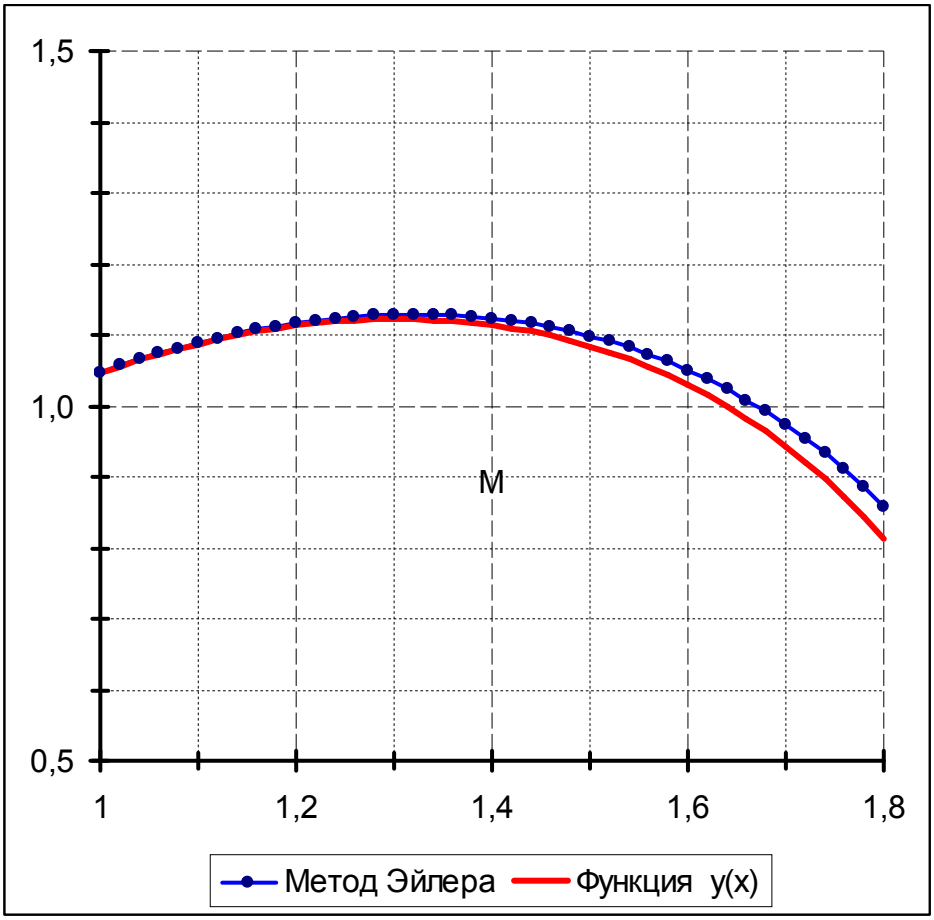
3.3. Таблица контрольных результатов:

Ключевые точки	Точное значение функции	Приближенное значение функции	Погрешность	
			Δ_i	δ_i
$A = 1{,}4$	1,1136	1,1323	0,0187	1,68%
$B = 1{,}8$	0,8118	0,8986	0,0868	10,69%

3.4. **Вывод**: так как погрешность вычислений в точке B превышает 10%, необходимо уменьшить шаг в 2 раза. Возьмем шаг $\Delta x = 0.02$ и повторим пункт 1.3.

	A	B	C	D
1	x_i	y_i	$\varphi(x_i, y_i)$	*Примечания*
2	1	1,0472	0,4698	0,02
3	1,02	1,0566	0,4433	значение Δx
4	1,04	1,0655	0,4164	
5	1,06	1,0738	0,3891	
6	1,08	1,0816	0,3614	
7	1,1	1,0888	0,3333	
8	1,12	1,0955	0,3046	
9	1,14	1,1016	0,2755	
10	1,16	1,1071	0,2458	
11	1,18	1,1120	0,2156	
12	1,2	1,1163	0,1849	
13	1,22	1,1200	0,1534	
14	1,24	1,1231	0,1214	
15	1,26	1,1255	0,0886	
16	1,28	1,1273	0,0551	
17	1,3	1,1284	0,0209	
18	1,32	1,1288	-0,0143	
19	1,34	1,1285	-0,0503	
20	1,36	1,1275	-0,0873	
21	1,38	1,1257	-0,1253	
22	**1,4**	**1,1232**	-0,1644	Контрольная точка A
23	1,42	1,1200	-0,2047	
24	1,44	1,1159	-0,2463	
25	1,46	1,1109	-0,2893	
26	1,48	1,1051	-0,3338	
27	1,5	1,0985	-0,3799	
28	1,52	1,0909	-0,4278	
29	1,54	1,0823	-0,4777	
30	1,56	1,0728	-0,5297	
31	1,58	1,0622	-0,5841	
32	1,6	1,0505	-0,6411	
33	1,62	1,0377	-0,7011	
34	1,64	1,0236	-0,7643	
35	1,66	1,0084	-0,8312	
36	1,68	0,9917	-0,9022	
37	1,7	0,9737	-0,9780	
38	1,72	0,9541	-1,0592	
39	1,74	0,9329	-1,1466	
40	1,76	0,9100	-1,2415	
41	1,78	0,8852	-1,3450	
42	**1,8**	**0,8583**	-1,4590	Контрольная точка B

3.1. Графики точного и приближенного решений на интервале $x \in [1; 1.8]$.



3.3. Таблица контрольных результатов:

Ключевые точки	Точное значение функции	Приближенное значение функции	Погрешность	
			Δ_i	δ_i
$A = 1{,}4$	1,1136	1,1232	0,0097	0,87%
$B = 1{,}8$	0,8118	0,8583	0,0464	4,17%

3.4. **<u>Вывод</u>**: так как погрешность вычислений в контрольных точках не превышает 10%, достигнута достаточная точность вычислений и найденное приближенное решение можно считать решением поставленной задачи.