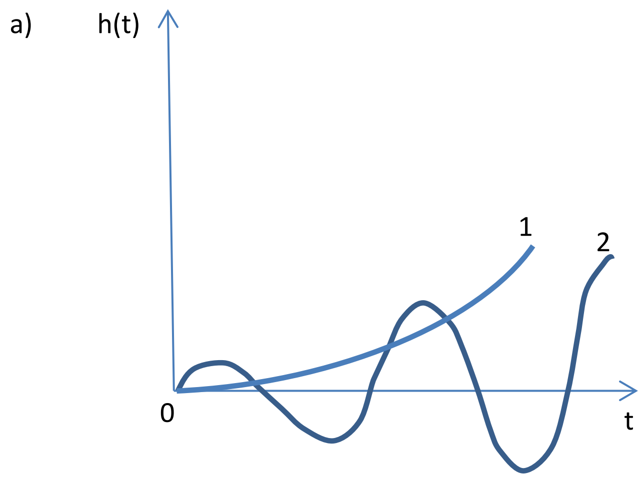
Практическое занятие №1

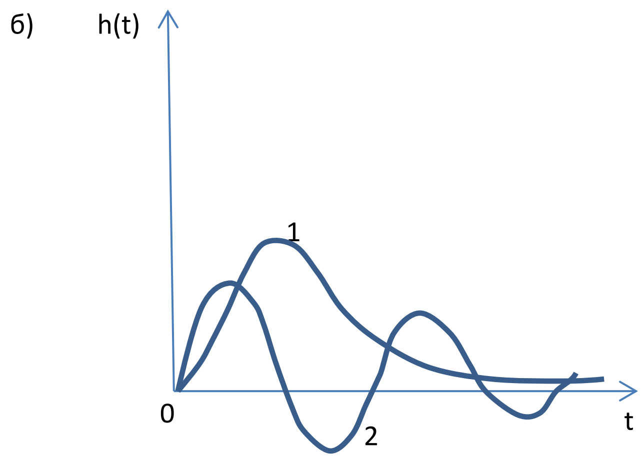
Устойчивость систем автоматического управления

1. Понятие об устойчивости систем управления

Устойчивость – это свойство системы возвращаться в исходный или близкий к нему установившийся режим после каждого выхода из него в результате какого-либо воздействия.

На рисунке 1 показаны типичные кривые переходных процессов в неустойчивой (рис.1, а) и устойчивой (рис.1, б) системах.





Если система неустойчива, то достаточно любого толчка, чтобы в ней начался расходящийся процесс ухода из исходного установившегося состояния. Этот процесс может быть апериодическим (кривая 1) или колебательным (кривая 2).

В случае устойчивой системы (рис. 1,б) переходный процесс, вызванный каким-либо воздействием, со временем затухает апериодически (кривая 1) или колебательно (кривая 2) и система возвращается в установившееся состояние.

Т. о., устойчивую систему можно определить также как систему, переходные процессы в которой являются затухающими.

Приведенное понятие устойчивости определяет устойчивость установившегося режима системы. Однако система может работать в условиях непрерывно изменяющихся воздействий, когда установившийся режим вообще отсутствует. С учетом таких условий работы можно дать следующее, более общее определение устойчивости: система устойчива, если ее выходная величина остается ограниченной в условиях действия на систему ограниченных по величине возмущений.

Устойчивость линейной системы определяется ее характеристиками и не зависит от действующих возмущений. Процессы в системах автоматического описываются дифференциальными уравнениями вида:

$$\left(1 + W_p(p)\right) y(t) = W_p(p) x(t) \tag{1}$$

где $p = {}^{d}/_{dt}$- символ дифференцирования, $x(t)$ и $y(t)$ - выходные сигналы системы.

Решение уравнения (1) состоит из двух составляющих:

$$y(t) = y_H(t) + y_n(t),$$

где $y_H(t)$ - решение неоднородного уравнения;

$y_n(t)$ - переходная составляющая решения.

Система устойчива, если переходная составляющая решения стремится к нулю.

Переходная составляющая решения уравнения (1) зависит от корней характеристического уравнения, которое получают из выражения (1) приравнивая левую часть к нулю

$$1 + W_p(p) = 0$$

В большинстве случаев корни характеристического уравнения системы вычислить невозможно, поэтому были разработаны правила (критерии), позволяющие судить о расположении корней на плоскости комплексного переменного без их расчета.

2. Критерий устойчивости Гурвица

Для оценки устойчивости по критерию Гурвица необходимо из коэффициентов характеристического уравнения (1) составить матрицу Гурвица. С этой целью перепишем уравнение (1) в виде:

$$a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_0 = 0 \qquad (2)$$

Матрица Гурвица имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & \dots & 0 \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

Порядок составления матрицы Гурвица следующий. В левом верхнем углу запишем коэффициент a_{m-1}, по главной диагонали располагаем коэффициенты с убыванием индекса до нуля. Над элементами главной диагонали записываем коэффициенты с убыванием индексов, а под ними - коэффициенты с возрастанием индексов).

Для оценки устойчивости системы надо вычислить определители Гурвица, которые получаются из матрицы Гурвица отчеркиванием равного числа строк и столбцов от верхнего угла матрицы. Например

$$\Delta_1 = |a_{m-1}|,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} \\ a_m & a_{m-2} \end{vmatrix},$$

и т.д. до Δ_m.

Критерий Гурвица гласит: если при $a_0 > 0$ все определители $\Delta_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, то система устойчива. Т.к. , то при $a_0 > 0$ достаточно проверить только знаки определителей Δ_i, при $i = \overline{1,m-1}$.

Если определитель $\Delta m = 0$, то система находится на границе устойчивости.

Возможны два случая:

1. *Свободный член характеристического уравнения равен нулю, что соответствует нейтрально устойчивой системе;*
2. *Определитель* $\Delta_{m-1} = 0$*, что соответствует колебательной границе устойчивости.*

Из условия $\Delta_{m-1} = 0$ можно определить параметры, при которых система находится на границе устойчивости, вычислить критический коэффициент усиления $К_{кр}$, соответствующий границе устойчивости.

Отношение $\alpha = {}^{К_{кр}}/_{К}$ называют запасом устойчивости по усилению.

Пример 1.

По критерию Гурвица оценить устойчивость системы, передаточная функция которой в замкнутом состоянии имеет вид:

$$W_з(p) = \frac{2 \cdot 10^4}{p^3 + 130p^2 + 3{,}2 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^4}.$$

Запишем коэффициенты характеристического уравнения (коэффициенты, стоящие перед p в знаменателе).

$a_3 = 1, a_2 = 130, a_1 = 3{,}2 \cdot 10^3,\ a_0 = 2 \cdot 10^4.$

Построим матрицу Гурвица:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определители Гурвица:

$$\Delta_1 = a_{m-1} = a_2 = 130 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 3200 \cdot 130 - 1 \cdot 20000 = 396000 > 0$$

$$\Delta_3 = a_0 \cdot \Delta_2 > 0.$$

Система устойчива, т.к. все определители больше нуля.

Пример 2.

Для системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_p(p) = \frac{10}{p(1 + 0{,}1p)(1 + 0{,}01p)}$$

определить запас устойчивости по усилению.

Запас устойчивости по усилению определяется по формуле:

$$\alpha = {}^{К_{кр}}/_{К}.$$

Коэффициент усиления системы К определяется коэффициентом, стоящим в числителе передаточной функции разомкнутой системы. Также коэффициент усиления равен коэффициенту a_0 , определяемому из характеристического уравнения системы. Для нахождения $К_{кр}$ применим критерий устойчивости Гурвица.

Критерий устойчивости Гурвица применим для замкнутых систем. Чтобы воспользоваться данным критерием нужно из разомкнутой системы сделать замкнутую. Для этого запишем выражение, связывающее разомкнутую и замкнутую системы:

$$W_з = \frac{W_р}{1 + W_р}$$

Представим характеристическое уравнение в виде (2). Для этого знаменатель приравняем к нулю.

$$1 + W_p(p) = 0.$$

Получим

$$0{,}001p^3 + 0.11p^2 + p + 10 = 0.$$

$$а_3 = 0.001, а_2 = 0.11, а_1 = 1,\ а_0 = 10 = K.$$

Как было сказано ранее, критический коэффициент усиления находится из условия $\Delta_{m-1}= 0$.

Найдем $К_{кр}$ при $\Delta_2= 0$.

$$\Delta_2= \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}.$$

При приравнивании Δ_2 к нулю, коэффициент $a_0 = K$ превращается в критический коэффициент усиления $К_{кр}$:

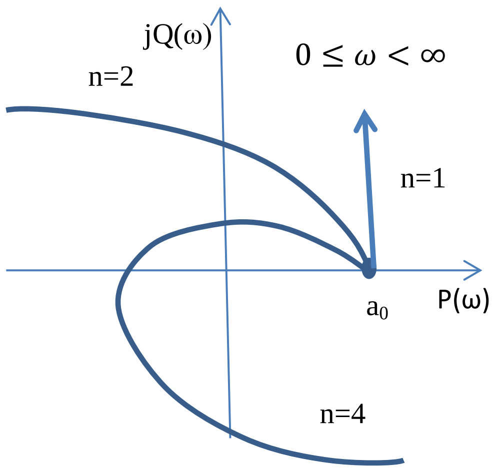
$$а_1а_2 - а_3К_{кр} = 0$$

$$К_{кр} = \frac{а_1а_2}{а_3} = \frac{1 \cdot 0{,}11}{0{,}001} = 110$$

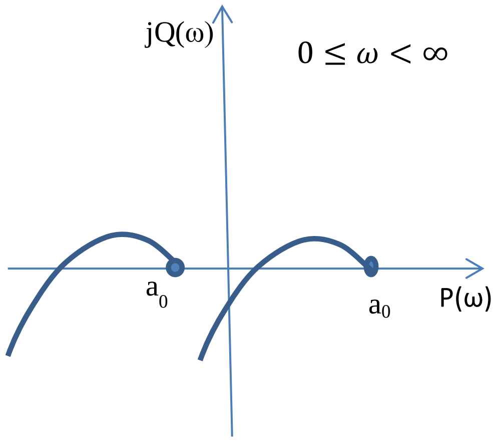
$$\alpha = {}^{К_{кр}}\!/_{К} = {}^{110}\!/_{10} = 11.$$

3. Графо-аналитический критерий (критерий Михайлова).

Для устойчивости системы управления необходимо и достаточно, чтобы кривая (годограф) Михайлова, начинаясь при $\omega = 0$ на вещественной положительной полуоси, с ростом частоты ω от 0 до ∞ обходила последовательно в положительном направлении (против часовой стрелки) n квадрантов комплексной плоскости, где n – степень характеристического уравнения (рисунок 2).



а) годографы Михайлова для устойчивых систем



б) годографы Михайлова для неустойчивых систем

Рисунок 2 – Вид годографов Михайлова для различных систем

Пример 3.

Оценить устойчивость автоматической системы по критерию Михайлова, если известен характеристический полином замкнутой системы

$$D(p) = p^3 + 0.5p^2 + 12p + 5.$$

Найдем функцию $D(j\omega)$. Для этого сделаем подстановку $p \to j\omega$.

$D(j\omega) = (j\omega)^3 + 0.5(j\omega)^2 + 12j\omega + 5 = (5 - 0.5\omega^2) + (j\omega)^3 + 12j\omega.$

Здесь использовано свойство комплексного числа $(j)^2 = -1$.

Для построения кривой Михайлова определим вещественную и мнимую части функции $D(j\omega)$:

$$P(\omega) = Re\big(D(j\omega)\big) = 5 - 0.5\omega^2$$

$$Q(\omega) = Im\big(D(j\omega)\big) = \omega(12 - \omega^2).$$

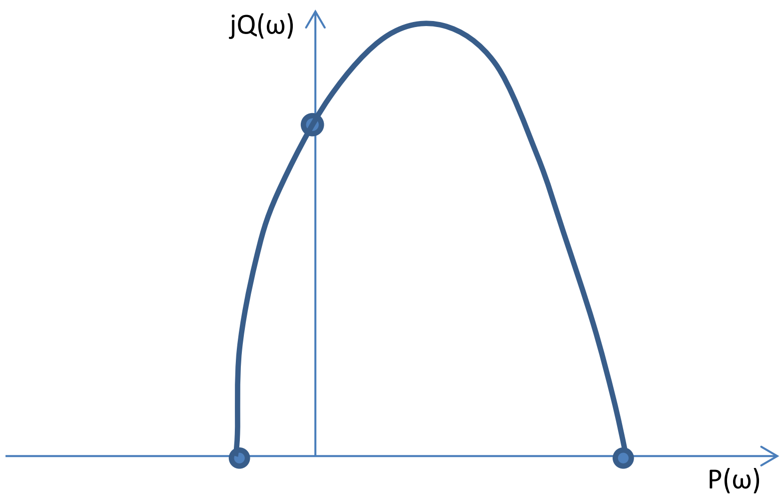
Примерный вид кривой определяется по характерным точкам.

При $\omega = 0$ $P(0) = 5,\ Q(0) = 0$.

Из условия $P(\omega_1) = 0$ находится $\omega_1 = \sqrt{10}$, $Q(\omega_1) = 6.4$.

Из условия $Q(\omega_2) = 0$ находится $\omega_2 = \sqrt{12}$, $P(\omega_2) = -1$.

Построим годограф данной системы:



Кривая Михайлова последовательно проходит через три квадранта. Следовательно, систем устойчива.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить устойчивость замкнутой системы по известной передаточной функции разомкнутой системы

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{5}{p^3 + 2p^2 + 4p - 2}$$

2. Определить устойчивость замкнутой системы по известной передаточной функции разомкнутой системы

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{10}{p^3 + 2p^2 + 10p + 15}$$

3. Для системы с передаточной функцией в разомкнутом состоянии

$$W_{p}(p) = \frac{20(1+pT)}{p^2(1+0{,}1p)}$$

найти постоянную времени T, при которой запас устойчивости по усилению равен двум.

4. Оценить устойчивость автоматической системы по критерию Михайлова, если известен характеристический полином замкнутой системы

$$D(p) = p^3 + 2p^2 + 4p + 10.$$

5. Оценить устойчивость системы по известной кривой Михайлова и степени n характеристического уравнения.