Практическая работа №1 по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика»

выполняется с использованием текстового редактора WORD

оформление титульного листа

- наименование учебной дисциплины - “Теория вероятностей и математическая статистика”;

- специальность, курс и номер учебной группы;

- фамилию, имя, отчество и номер зачетной книжки студента;

Вариант выбирается по последней цифре зачетной книжки студента!!!

В начале каждого задания следует привести полную формулировку соответствующего задания. В конце работы ставится дата и подпись студента.

Излагать материал работы следует с исчерпывающей полнотой в соответствии с полученными вариантами заданий. При этом необходимо соблюдать требования всех действующих стандартов по оформлению текстовых документов, рисунков, таблиц.

Приветствуется досрочная реализация практического задания.

Работа, выполненная неаккуратно, неправильно оформленная или выполненная не для своих вариантов заданий, к рецензии не принимается.

В противном случае делается пометка "Исправить", и работа возвращается студенту для внесения в нее исправлений в разделе "Работа над ошибками", который следует разместить вслед за последней рецензией преподавателя. Данный раздел также должен завершаться датой и подписью студента. Исправления в уже проверенном материале работы недопустимы.

Во время ответов на поставленные вопросы с рецензентом студент должен продемонстрировать полное владение материалом Урока, дать исчерпывающие и точные ответы на все вопросы, касающиеся работы.

Тема 1 Непосредственный подсчет вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Если результаты эксперимента можно представить в виде полной группы исходов, которые попарно несовместны и равновозможны, то вероятность события А равна отношению числа m благоприятствующих этому событию исходов эксперимента к общему числу n всех возможных исходов, т.е.

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

При решении задач иногда удобно найти вероятность противоположного события $\overline{A}$*, а затем найти вероятность события А по формуле* $P(A)=1-P(\overline{A})$*. Вероятность совместного наступления двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило:*

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$$

События А и В называются независимыми, если $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$*. Для независимых событий появление одного не меняет вероятности появления другого:* $P(A/B)=P(A)$ *и* $P(B/A)=P(B)$

Тема 1 Непосредственный подсчет вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Задача 1. В ящике в случайном порядке разложено двадцать деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. *Найти* вероятность того, что, по крайней мере, одна из этих деталей окажется стандартной.

Задача 2. Станция метрополитена оборудована тремя независимо работающими эскалаторами. Вероятность безотказной работы в течение дня для первого эскалатора равна 0,9, для второго – 0,95, для третьего – 0,85. *Найти* вероятность того, что в течение дня произойдет поломка не более одного эскалатора.

Задача 3. На складе имеются 8 изделий, 3 из них изготовлены заводом *N*. *Найти* вероятность того, что среди 4 наудачу взятых изделий окажется не более половины, изготовленных заводом *N*.

Задача 4. У распространителя имеется 20 билетов книжной лотереи, среди которых 7 выигрышных. Куплено 3 билета. *Найти* вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выигрышный.

Задача 5. Устройство секретного замка включает в себя 4 ячейки. В первой ячейке осуществляется набор одной из четырех букв ***A, B, C, D,*** в трех остальных – одной из десяти цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (цифры могут повторяться). *Чему* равна вероятность того, что замок будет открыт с первой попытки?

Задача 6. Имеются две урны. В первой находятся: один белый шар, 3 черных и 4 красных; во второй – 3 белых, 2 черных и 3 красных. Из каждой урны наугад извлекают по одному шару, после чего сравнивают их цвета. *Найти* вероятность того, что цвета извлеченных шаров совпадают.

Задача 7. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. *Найти* вероятность того, что два наудачу выбранных билета окажутся выигрышными.

Задача 8. Два охотника по одному разу стреляют в волка. Для первого охотника вероятность попадания в волка 0,7, для второго – 0,8. *Определить* вероятность того, что в волка попадет хотя бы один охотник.

Задача 9. Ведется стрельба по самолету, уязвимым агрегатами которого являются два двигателя и кабина пилота. Для того чтобы вывести из строя самолет, достаточно поразить оба двигателя вместе или кабину пилота. При данных условиях стрельбы вероятность поражения первого двигателя равна $\boldsymbol{P_1}$, второго двигателя - P_2, кабины пилота - P_3. Агрегаты самолета поражаются независимо друг от друга. *Найти* вероятность того, что самолет будет поражен.

Задача 10. По мишени производятся три выстрела. Вероятности попадания при первом, втором и третьем выстрелах равны соответственно P_1 = 0,4; P_2 = 0,5; P_3 = 0,7. *Какова* вероятность того, что в результате этих трех выстрелов в мишени окажется точно одна пробоина.

Тема 2. Формула полной вероятности и формула Байеса

Будем говорить, что события H_1, H_2, ... H_n образуют <u>*полную группу*</u>*, если в результате эксперимента:*

-происходит одно из событий H_i, i=1,..., n.

-события H_1, H_2, ..., H_n попарно несовместны.

В этом случае имеем:

$P(H_1 + H_2 + ... + H_n) = P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1$,

и <u>*вероятность произвольного события А*</u>*, произошедшего в условиях данного эксперимента может быть вычислена по формуле полной вероятности:*

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

События H_1,...,H_n часто называют <u>*гипотезами*</u>).

Пусть H_1, H_2, ... H_n - полная группа событий и известно, что в результате эксперимента произошло событие А, тогда условная вероятность того, что произошло событие H_i - одно из событий полной группы, вычисляется по формуле Байеса<u>:</u>

$$P(H_i / A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+...+P(H_n)\cdot P(A/H_n)}, \quad i=1,...,n.$$

Тема 2. Формула полной вероятности и формула Байеса

Задача 1. Два стрелка Иванов и Петров, имеющие по два заряда, поочерёдно стреляют в мишень. Вероятность попадания при одном выстреле равна 2/3 для Иванова и 5/6 для Петрова. Первый стрелок определяется по жребию. Для этого кидается монета и, если выпадает герб, то начинает Иванов, а, если цифра, то первым стреляет Петров. Выигрывает стрелок, попавший первым. *Какова* вероятность выигрыша для Петрова?

Задача 2. Два стрелка ***A*** и ***B*** поочерёдно стреляют в мишень до первого попадания, но не более двух раз каждый. Вероятность попадания при одном выстреле для ***A*** равна 0,8, для ***B*** – 0,6. Первый стрелок определяется жребием: кидается монета и, если выпадает герб, то первым стреляет ***A***, если цифра, то ***B***. В результате стрельбы выиграл стрелок ***B***.*Какова* вероятность, что он стрелял первым?

Задача 3. Два стрелка стреляют по одному разу, независимо друг от друга, выбирая одну из двух мишеней. Вероятность выбора 1-ой мишени для них 0,5 и 2/3 соответственно, а вероятность попадания в выбранную мишень 0,8 и 0,9. *Какова* вероятность ровно одного попадания во вторую мишень?

Задача 4. Два игрока ***A*** и ***B*** один раз бросают кость и затем два раза монету. Если на кости выпадает 1 или 2, то выигрывает игрок ***A***, если при подбрасываниях монеты появится хотя бы один герб, и игрок ***B***, если гербов не появится. Если же на кости выпадает число, большее двух, то игрок ***A*** выигрывает, если появятся два герба, и игрок ***B*** в остальных случаях. *Справедлива* ли игра*?*

Задача 5. В двух пакетах находятся конфеты. В первом пакете 16 штук сорта «Белочка» и 8 штук сорта «Жар-птица», во втором 15 сорта «Белочка» и 5 сорта «Жар-птица». Из первого пакета во второй переложили две конфеты, взятые случайным образом, содержимое второго пакета перемешали и вытащили оттуда одну конфету, которая оказалась «Жар-птицей». *Какова* вероятность, что из первого пакета во второй переложили одну «Белочку» и одну «Жар-птицу»?

Задача 6. Берут две колоды карт по 52 карты и из первой во вторую перекладывают случайным образом 2 карты. Затем из второй колоды берётся одна карта. *Какова* вероятность, что она окажется дамой?

Задача 7. Среди трёх игральных костей одна фальшивая. На фальшивой кости шестёрка появляется с вероятностью 1/3. Бросили две кости и выпали две шестерки. *Какова* вероятность, что среди брошенных костей была фальшивая?

Задача 8. Ракета накрывает цель с вероятностью 2/3. По цели выпущено две ракеты. Известно, что при одном попадании цель поражается с вероятностью 1/2, а при двух с вероятностью $5/6$. Цель поражена. *Какова* вероятность, что в неё попала ровно одна ракета?

Задача 9. Кость ***А*** имеет две белые и четыре красные грани, кость ***В*** две красные и четыре белые. Сначала бросается монета. Если выпадает герб, то бросают кость ***А***, если цифра, то кость ***В***. *Какова* вероятность того, что выпадет красная грань?

Задача 10. 30% телевизоров поступает в магазин с первой фабрики, 20% со второй и остальные с третьей. Брак на этих фабриках составляет 5%, 3% и 4% соответственно. Купленный телевизор оказался бракованным. *Какова* вероятность того, что он поступил с третьей фабрики?

Тема 3. Повторение опытов (схема Бернулли)

Пусть проводятся n независимых опытов (экспериментов), в каждом из которых событие **А** *может наступить с вероятностью p. Обычно появление* ***А*** *называют успехом.*

Обозначим через $q = 1 - p$ – вероятность того, что событие **А** *не наступает (неудача), и через $B_n(m)$ – событие, заключающееся в том, что в серии из n опытов ровно m опытов закончатся успешно (ровно m раз произойдет событие* **А***).*

Тогда для любого $m = 0, 1, \ldots, n$ справедлива формула Бернулли .

$$P(B_n(m)) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad где \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Тема 3. Повторение опытов (схема Бернулли)

Задача 1. Производиться испытание пяти приборов, каждый из которых выходит из строя с вероятностью 0,1. *Найти* вероятность того, что хотя бы два прибора выйдут из строя при испытании.

Задача 2. Производиться 4 выстрела по мишени, вероятность попадания при каждом выстреле 2/3. *Найти* вероятность того, что в мишень попадут не менее 2 раз.

Задача 3. Прибор содержит шесть однотипных микросхем, вероятность выхода из строя каждой в течение одного месяца 0,2. *Найти в*ероятность того, что в течение этого срока из строя выйдет не более половины микросхем.

Задача 4. Накопитель снабжает деталями 8 станков с ЧПУ. В течение 20 минут от каждого станка может поступить заявка на деталь с вероятностью 1/5. *Найти* вероятность того, что за 20 минут на накопитель поступит не более трех заявок.

Задача 5. В ралли участвует 10 однотипных машин. Вероятность выхода из строя за период соревнований каждой из них 1/20. *Найти* вероятность того, что к финишу придут не менее 8 машин.

Задача 6. Имеется 7 партий деталей, каждая из которых содержит 10% бракованных. Из каждой партии извлекают по 1 детали. *Найти* вероятность того, что среди извлеченных деталей не менее двух бракованных.

Задача *7*. Радиолокационная станция ведет наблюдение за шестью объектами в течение некоторого времени. Контакт с каждым из них может быть потерян с вероятностью 0,2. *Найти* вероятность того, что хотя бы с тремя объектами контакт будет поддерживаться в течение всего времени.

Задача 8. Прибор состоит из шести однотипных блоков, но может работать при наличии в исправном состоянии не менее трех из них. За год работы каждый из блоков выходит из строя с вероятностью 0,3. *Найти* вероятность того, что за год работы прибор не выйдет из строя.

Задача 9. В семье пять детей. Пусть вероятности появления на свет девочки и мальчика полагаются равными. *Найти* вероятность того, что в семье не более двух девочек.

Задача 10. Обрабатывающий центр снабжается заготовками от 10 однотипных накопителей, выдающих при поступлении запроса по одной детали. Вероятность того, что на момент запроса в накопителе имеется заготовка, равна 0,9. Экономически достаточная загрузка центра обеспечивается одновременным поступлением по запросам не менее трех деталей. *Найти* вероятность того, что при очередном запросе будет обеспечена достаточная загрузка.

Тема 4. Дискретные случайные величины

Дискретной называют случайную величину X, принимающую конечное или счетное (можно перенумеровать) число значений: $x_1, x_2, \ldots$ *Значение* x_k *принимается с некоторой вероятностью* $p_k = P(X = x_k) > 0$. *При этом*

$$\sum_k p_k = 1.$$

Соответствие, которое каждому значению x_k *дискретной случайной величины X сопоставляет его вероятность* p_k, *называется законом распределения случайной величины X.*

Закон распределения обычно задается в виде таблицы, которая называется рядом распределения:

X	x_1	x_2	…
P	p_1	p_2	…

Функция распределения случайной величины $F(x) = P(X < x)$ *в дискретном случае является кусочно-постоянной и может быть найдена по формуле*

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k = \sum_{x_k < x} P(X = x_k).$$

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называется число: $E(X) = \sum_k x_k p_k$.

Если случайная величина принимает счетное число значений, то говорят что математическое ожидание существует, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$ *сходится, при расходимости ряда говорят, что математического ожидания не существует.*

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Средним квадратичным отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Среднее квадратичное отклонение является одной из характеристик рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания (*см. с.* 27-30, 32-36 *учебного пособия*).

В задачах часто используется биномиальное распределение, то есть распределение случайной величины X – числа наступления события A в n независимых опытах, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вертятностью p. Случайная величина X принимает целочисленные значения $m = 0, 1, \ldots, n$ *с вероятностями* $P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, находятся по формулам $E(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$, *где* $q = 1 - p$.

Для всех вариантов расшифровка задания: " Построить ... отклонение... " читается так: " Построить ряд распределения, найти функцию* *распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение…”.*

Тема 4. Дискретные случайные величины

Задача 1. Спортсмен должен последовательно преодолеть 4 препятствия, каждое из которых преодолевается им с вероятностью p = 0,9. Если спортсмен не преодолевает какое-либо препятствие, он выбывает из соревнований.

Найти вероятность того, что спортсмен преодолеет:

а) не более двух препятствий;

б) более трёх препятствий.

Задача 2. Из коробки, в которой находятся 2 зелёных, 2 чёрных и 6 красных стержней для шариковой руки, случайным образом извлекаются 4 стержня.

Найти вероятность того, что при этом красных стержней будет:

а) не менее трёх;

б) хотя бы один.

Задача 3. База снабжает 6 магазинов. В течение дня от каждого из них с вероятностью 1/3 может поступить заявка.

Найти вероятность того, что их будет более пяти.

Задача 4. Наблюдение за районом осуществляется тремя радиолокационными станциями (РЛС). В район наблюдений попал объект, который обнаруживается любой радиолокационной станцией с вероятностью 0,2.

Найти вероятность того, что их будет не менее двух.

Задача 5. Опыт состоит из четырёх независимых подбрасываний двух правильных монет, т.е. выпадение герба и цифры равновозможные события.

Найти вероятность того, что это событие произойдёт не менее трёх раз.

Задача 6. Автоматизированную линию обслуживают 5 манипуляторов. При плановом осмотре их поочередно проверяют. Если характеристики проверяемого манипулятора не удовлетворяют техническим условиям, вся линия останавливается для переналадки. Вероятность того, что при проверке характеристики манипулятора окажутся неудовлетворительными, равна 0,3.

Найти вероятность того, что до остановки линии будет проверено:

а) не более двух манипуляторов;

б) более трёх манипуляторов.

Задача *7*. На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Две из карточек вынимаются наугад одновременно.

Найти вероятность того, что эта сумма будет:

а) менее шести;

б) не менее пяти.

Задача 8. Производятся 4 независимых опыта, в каждом из которых с вероятностью 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 соответственно может появиться случайное событие A.

Найти вероятность того, что A произойдёт не менее чем в половине опытов.

Задача 9. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 5 красных. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша.

Найти вероятность того, что в выборке будет:

а) хотя бы один красный карандаш;

б) менее двух красных карандашей.

Задача 10. Стрелок, имеющий 4 патрона, стреляет последовательно по двум мишеням, до поражения обеих мишеней или пока не израсходует все 4 патрона. При попадании в первую мишень стрельба по ней прекращается, и стрелок начинает стрелять по второй мишени. Вероятность попадания при любом выстреле 0,8.

Найти вероятность того, что будет поражена хотя бы одна мишень.

Тема 5. Непрерывные случайные величины

Случайная величина X называется непрерывной случайной величиной, если существует неотрицательная функция f (x) такая, что при любом x выполнено соотношение

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,, \qquad (1)$$

где, как и раньше, F(x) = P (X < x) – функция распределения случайной величины X. Функция f (x) называется плотностью распределения (или плотностью распределения вероятностей) случайной величины X (*см. с. 31-32, 34-41 учебного пособия*).

Из (1) *следует, что* $F(x)$ *является непрерывной функцией. Напомним, что, кроме того, функция распределения является неубывающей функцией и*

$0 \le F(x) \le 1$; $\quad F(-\infty) = 0$; $\quad F(+\infty) = 1$; $\quad P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Плотность распределения обладает следующими свойствами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \qquad f(x) = F'(x)$$ *, если производная* $F'(x)$ *существует.*

Вероятность попасть на промежуток можно найти, интегрируя плотность распределения (*это свойство и свойство* (1) *эквивалентны*)

$$P(a \le X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Математическое ожидание (среднее) непрерывной случайной величины X определяется равенством $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$. *Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется равенством*

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)dx \quad \text{или}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2,$$

среднее квадратичное отклонение X равенством $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Тема 5. Непрерывные случайные величины

Задача 1. Плотность распределения случайной величины X имеет вид $f(x) = a\,x^2 e^{-kx}$, где $k > 0$, $0 \le x < \infty$.

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения случайной величины X;

в) вычислить вероятность попадания случайной величины X на интервал $(0;\ 1/k)$.

Задача 2. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ \dfrac{x^2}{16}, & \text{при } 0 \le x < 2; \\ x - 7/4, & \text{при } 2 \le x < 11/4; \\ 1, & \text{при } x \ge 11/4. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

б) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

в) вероятность попадания случайной величины X на отрезок [1;1.5].

Задача 3. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$F(x) = A + B \operatorname{arctg} x$, $(-\infty < x < +\infty)$.

Найти: а) постоянные A, B;

б) плотность распределения $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

в) выяснить существует ли $E(X)$.

Задача 4. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 1; \\ \dfrac{A}{x^2}, & \text{при } x \ge 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A;

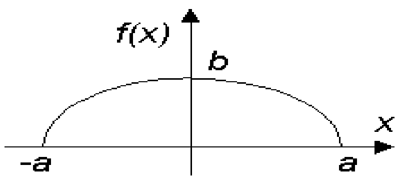
б) функцию распределения $F(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность попадания случайной величины X в интервал (2 ; 3);

д) вероятность того, что при 4 независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадает на отрезок [2; 3].

Задача 5. График плотности распределения случайной величины X представляет собой полуэллипс с большей полуосью “a” (a - известно).



Найти:

а) полуось b;

б) аналитическое задание $f(x)$;

в) моменты $E(X)$, $D(X)$;

г) вероятность $P(a/2 < X < 2a)$.

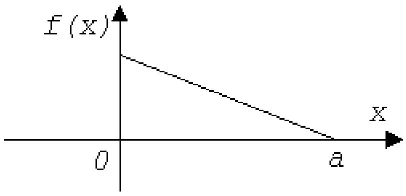
Задача 6. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при} \quad x<-1;\\ a+b\arcsin x, & \text{при} \quad -1\le x<1;\\ 1, & \text{при} \quad x\ge 1.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициенты a и b;

б) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Задача 7. Случайная величина X распределена по закону “прямоугольного треугольника” в интервале (0; a).



Найти:

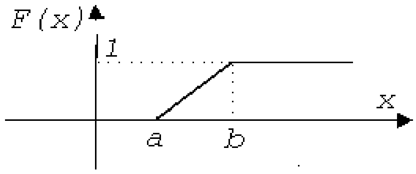
а) аналитическое задание $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность $P(a/2 < X < a)$;

г) моменты $E(X)$, $D(X)$.

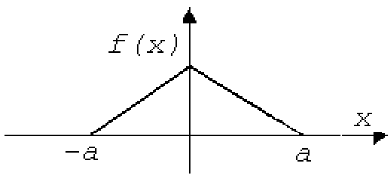
Задача 8. Функция распределения случайной величины X задана



графиком

Найти математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Задача 9. Случайная величина X подчинена "закону равнобедренного треугольника" на участке [- a; a].



Найти: а) аналитическое задание $f(x)$;
б) математическое ожидание $E(X)$, дисперсию $D(X)$.

Задача 10. Случайная величина X распределена по закону Коши

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \qquad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность попадания случайной величины X на отрезок [-1;1].

г) выяснить существует ли $E(X)$?