Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования

Томский государственный
архитектурно-строительный университет

Примеры выполнения расчетно-графических работ по Теоретической механике (кинематика)

Методические указания

Составитель О.Н. Попов

Томск 2015

Примеры выполнения расчетно-графических работ по Теоретической механике (кинематика): методические указания / Сост. О.Н. Попов, Т.А. Трепутнева. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2013. – 28 с.

Рецензент к.ф.-м. н., доцент М.В. Геттингер
Редактор к.ф.-м. н., доцент О.И. Данейко

В методических указаниях «Примеры выполнения расчетно-графических работ по Теоретической механике (кинематика)» по дисциплине С2.Б6.Б.7 «Теоретическая механика» содержится материал для организации самостоятельной работы по разделу: «Кинематика» для студентов, обучающихся по направлению 08.03.01 «Строительство».

Печатаются по решению методического семинара кафедры теоретической механики, протокол № 6 от 19 декабря 2015 г.

Срок действия

с 01.09.2016
по 01.09.2021

Оригинал макет подготовлен авторами

Подписано в печать г.
Формат 60×84. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Уч.-изд. л. 1. Тираж 100 экз. Заказ №

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.

634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.

Без элемента неизвестности
Жизненная игра теряет смысл.

Д. Голсуорси

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены в помощь студентам (специалистам и бакалаврам), обучающимся по направлениям 271101 «Строительство уникальных зданий и сооружений», 190100 «Наземные транспортно-технологические комплексы», 190600 «Эксплуатации транспортно-технологических машин и комплексов» к изучению раздела «Кинематика» по теоретической механике.

В данных методических указаниях излагается необходимая теория, и приводятся примеры решения задач, а также предлагаются варианты для выполнения расчетно-графических работ. В результате изучения данной темы формируются следующие общекультурные и профессиональные компетенции, предусмотренные Федеральным государственным общеобразовательным стандартом (ФГОС-3):

ОК-1 − владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;

ОК-8 − осознание социальной значимости своей будущей профессии, овладение высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности;

ПК-1 − способность использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении профессиональных задач.

Работа над решением задач по данной теме способствует приобретению студентом:

− знаний расчетных схем наземных многопролетных балок, трубопроводов, перекрытий и пролетов зданий и переходов при статическом приложении нагрузки;

− умений пользоваться полученными теоретическими знаниями и осуществлять сборно-разборные операции при расчете элементов конструкций; пользоваться литературой по направлению своей профессии;

− навыков публичной речи, аргументации, ведения дискуссии и полемики, практического анализа различного рода рассуждений; использовании методов построения математической модели типовых профессиональных задач и содержательной интерпретации полученных результатов; владения ос-

новными методами исследования элементов конструкций при воздействии поперечной нагрузки; использования инженерной терминологии в области технологии строительного производства и проведения расчетно-графических работ; владении методами определения основных эксплуатационных свойств и характеристик уникальных зданий и сооружений, наземных транспортно-технологических комплексов элементов конструкций при сложных расчетных схемах.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Теоретическая механика»

Расчетно-графическая работа К-1

Кинематика точки и простейшие движения твердого тела

Вариант 31

Выполнил студент
Гр 10400 Гусева Т.А.

Принял преподаватель
Попов О.Н.

ТОМСК − 2015

Задача 1.
Кинематика точки

Уравнения движение точки по плоскости Oxy

$$x = t; \;\; y = \sin t^2,$$

где x, y – в см, t – в секундах.

По заданным уравнениям движения точки М требуется:

1. установить вид её траектории и для начального момента времени $(t_0 = 0)$ найти положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории;

2. получить закон движения точки по траектории интегрированием выражения $s = \int V(t)dt$ и найти время t_1, за которое точка пройдет путь $\sigma = 50$ см, в тех случаях, когда интегрирование не удается в элементарных функциях, применить один из численных методов;

3. Составить программу вычисления и печати пройденного пути $\sigma(t)$, скорости $V(t)$ и касательного ускорения $a_\tau(t)$ при t, изменяющемся от 0 до t_1, и построить соответствующие графики функций.

Решение

1. *Устанавливаем вид траектории и для начального момента времени* $(t_0 = 0)$ *находим положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории.*

Исключая параметр времени – t из уравнений движения, получим следующее уравнение траектории точки:

$$y = \sin x^2,$$

т.е. траекторией точки является синусоида (рис. 1).

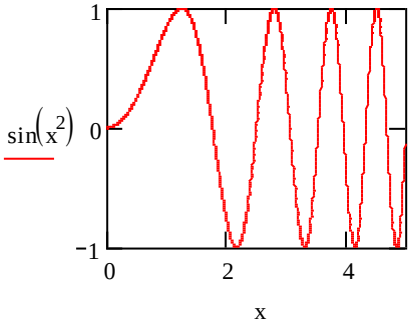


Рис. 1

Согласно уравнений движения точки при $t = 0$ точка занимает положение, M_0 и имеет координаты:

$$x_0 = 0,\ y_0 = 0 \text{ см.}$$

Скорость точки найдем по её проекциям на координатные оси:

$$Vx(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad Vx(t) \rightarrow 1;$$

$$Vy(t) := \frac{d}{dt}y(t) \qquad Vy(t) \rightarrow 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t);$$

$$V(t) := \sqrt{(Vx(t))^2 + (Vy(t))^2};$$

$$V(t) \rightarrow \left(1 + 4 \cdot \sin(t)^2 \cdot \cos(t)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Согласно полученной формуле получим график изменения скорости в зависимости от времени (рис. 2).

Ускорение точки найдем по её проекциям на координатные оси:

$$ax(t) := \frac{d}{dt}Vx(t) \qquad ax(t) \rightarrow 0;$$

$$ay(t) := \frac{d}{dt}Vy(t) \qquad ay(t) \rightarrow 2\cdot\cos(t)^2 - 2\cdot\sin(t)^2;$$

$$a(t) := \sqrt{(ax(t))^2 + (ay(t))^2};$$

$$a(t) \rightarrow 2\cdot\cos(t)^2 - 2\sin(t)^2.$$

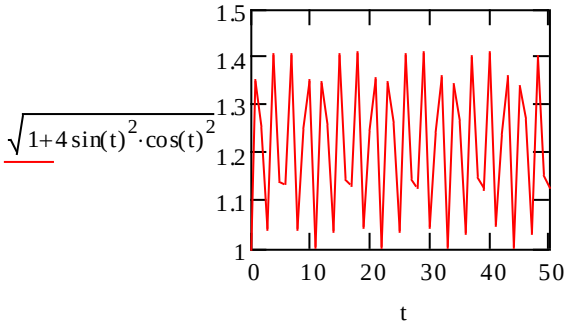


Рис. 2

Определяем касательную составляющую ускорения

$$a\tau(t) := \frac{Vx\cdot ax + Vy\cdot ay}{V} \qquad a\tau(t) \rightarrow \frac{4\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)\cdot\left(\cos(t)^2 - \sin(t)^2\right)}{\sqrt{1+4\cdot\sin(t)^2\cdot\cos(t)^2}} 0$$

Согласно полученной формуле получим график изменения касательного ускорения в зависимости от времени (рис. 3).

Модуль нормального ускорения:

$$an(t) := \sqrt{(a(t))^2 - (a\tau(t))^2}\ ;$$

$$an(t) \rightarrow \left[\left(2\cdot\cos(t)^2 - 2\cdot\sin(t)^2\right) + \frac{4\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)\cdot\left(\cos(t)^2 - \sin(t)^2\right)}{\sqrt{1+4\cdot\sin(t)^2\cdot\cos(t)^2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

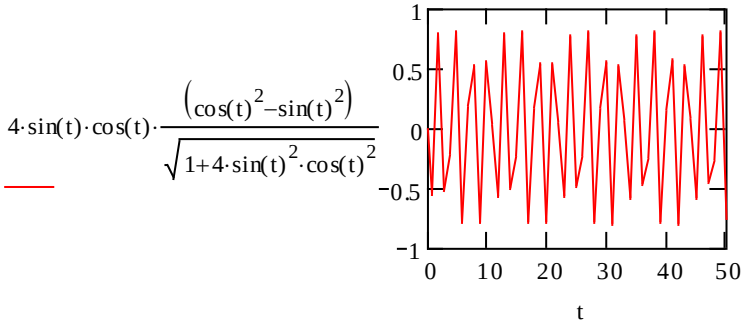


Рис. 3

Радиус кривизны траектории:

$$\rho(t) := \frac{(V(t))^2}{an(t)}\ ;$$

$$\rho(t) \rightarrow \frac{1+4\cdot\sin(t)^2\cdot\cos(t)^2}{\left[\left(2\cdot\cos(t)^2 - 2\cdot\sin(t)^2\right) - \frac{4\cdot\sin(t)\cdot\cos(t)\cdot\left(\cos(t)^2 - \sin(t)^2\right)}{\sqrt{1+4\cdot\sin(t)^2\cdot\cos(t)^2}}\right]^{\frac{1}{2}}}\ .$$

2. Получаем закон движения точки по траектории интегрированием выражения $s = \int V(t)dt$ *и находим время* t_1*, за которое точка пройдет путь* $\sigma = 50$ *см, если интегрирование не*

удается в элементарных функциях, применим один из численных методов.;

$$\sigma(t) := \int \sqrt{1+4\cdot\sin(t)^2\cdot\cos(t)^2}\,dt\,;$$

$$\sigma(t) \rightarrow indef_\mathrm{int}\left[\left(1+4\cdot\sin(t)^2\cdot\cos(t)^2\right)^{\frac{1}{2}}, t\right].$$

Переходим к численному расчету

$$t:=0,5..50 \qquad \sigma(t) := \int_0^t \sqrt{1+4\cdot\sin(t)^2\cdot\cos(t)^2}\,dt\,.$$

По результатам счета строим график пути (рис. 1) и определяем по нему время $t_k = 41$сек при $\sigma = 50$ *см.*

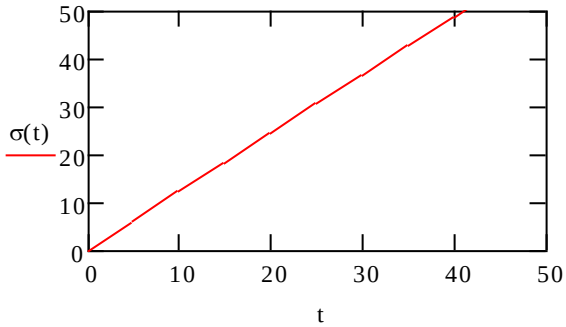


Рис. 4

Составляем программу вычисления и печати пройденного пути $\sigma(t)$, скорости $V(t)$ и касательного ускорения $a_\tau(t)$ при t, изменяющемся от 0 до t_1, и построить соответствующие графики функций.

При $t = 0$

$\sigma = 0$; $V = 1 см/с$; $an = 2 см/с^2$; $a\tau = 0 см/с^2$;

$a = 2 см/с^2$; $\rho = 0{,}5 см$.

По ходу решение представлялось формулами из среды MathCad в соответствующей последовательности программы. Печать графиков в среде MathCad выполнялась по ходу расчета.

На рис. 1 − траектория движения;

на рис. 2 − скорость от времени;

на рис. 3 касательное ускорение от времени;

на рис. 4 путь в зависимости от времени.

Выдача численных значений в среде MathCad

t =	σ(t) =	V(t) =	a(τ) =	ρ(t) =
0	0	1	2	0.5
1	1.254	1.352	-0.832	2.967
2	2.381	1.254	-1.307	1.509
3	3.677	1.038	1.92	0.583
4	4.878	1.407	-0.291	9.566
5	6.032	1.138	-1.678	0.879
6	7.344	1.135	1.688	0.866
7	8.499	1.408	0.273	10.198
8	9.699	1.041	-1.915	0.588
9	10.995	1.251	1.321	1.481
10	12.123	1.354	0.816	3.042
11	13.375	1	-2	0.5
12	14.631	1.349	0.848	2.894
13	15.758	1.258	1.294	1.537
14	17.052	1.036	-1.925	0.578
15	18.255	1.406	0.309	9.005

Задача 2.
Простейшие движения твердого тела

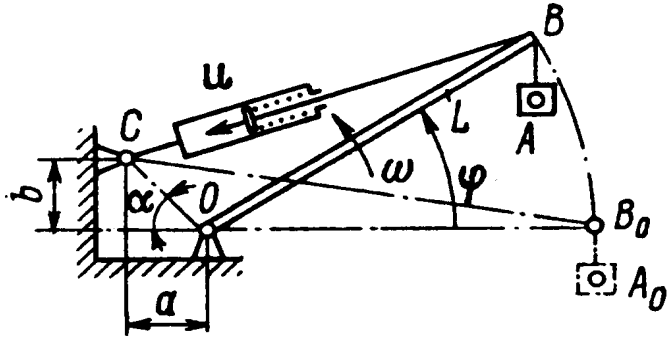


Рис. 1

Для механической системы изображенной на рис. 1 ($a = b = 0{,}5$ *м*, $L = 4$ *м*, $u = 2$ *м/с*),, требуется:

1. найти скорость и ускорение точки *A*;
2. составить программу вычисления и печати значений функций скорость и ускорение точки *A* при перемещении звеньев механической системы в заданных пределах ($\varphi = 0^0..30^0$); построить графики указанных функций.

Решение

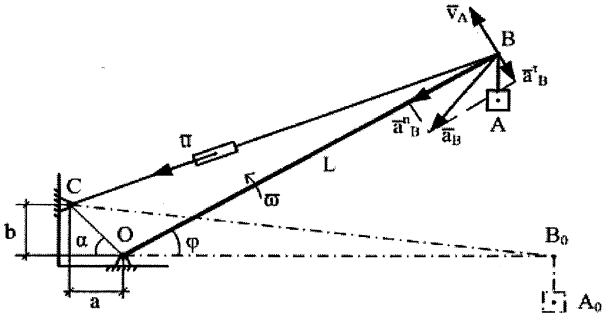


Рис.2

Находим скорость и ускорение точки А; параллельно составляем программу вычисления и печати значений функций скорости и ускорения точки А при перемещении звеньев механической системы в заданных пределах ($\varphi = 0^0..30^0$); строим графики указанных функций в среде MathCad .

Расчетная схема механизма изображена на рис. 2.

Груз *А* поднимается с помощью стрелы *ОВ* и троса *ВС*, который укорачивается с постоянной скорость $u = 2\ м/с$.

Движение точек *А* и *В* происходит одинаково (*АВ* − *const*), поэтому в дальнейшем изучаем движение точки *В*.

Определяем величину укорочения троса $\Delta CB(\varphi)$ и ее производную по углу − $\Delta'(\varphi)$и по времени − $\Delta' t$.

$$CB_0 := \sqrt{b^2 + (a+L)^2} \qquad CB_0 = 4.528 \text{ см};$$

$$OC := \sqrt{b^2 + a^2} \qquad OC = 0.707 \text{ см};$$

$$CB(\varphi) = \sqrt{(OC)^2 + L^2 - 2\cdot(OC)\cdot L\cdot\cos(\alpha+\varphi)};$$

$$\Delta CB(\varphi) = CB_0 - CB(\varphi);$$

$$\Delta(\varphi) \to 4.5277 - \left(16.5 - 5.65685\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\Delta'(\varphi) := \frac{d}{d\varphi}(\Delta(\varphi));$$

$$\Delta'(\varphi) \to (-2.828)\cdot\frac{\sin\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)}{\left(16.5 - 5.659\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}}};$$

$$\Delta' t = (-2.828)\cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)}{\left(16.5-5.659\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{d(\varphi)}{dt}.$$

Учитывая, что $\omega(\varphi)=\frac{d\varphi}{dt}$ есть угловая скорость и $\Delta' t = u$, т.к. обе величины выражают скорость изменения длины *CB* запишем

$$u = (-2.828)\cdot \frac{\sin\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)}{\left(16.5-5.659\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\omega(\varphi).$$

Отсюда определяем выражение угловой скорости в зависимости от угла $\omega(\varphi)$

$$\omega(\varphi)=\frac{u}{\Delta'\varphi};$$

$$\omega(\varphi)\to\frac{-0.7071}{\sin\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)}\cdot\left(16.5-5.6569\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Берем производную по времени по времени от угловой скорости, которая в данном случае равна производной по углу φ и определяем угловое ускорение

$$\varepsilon(\varphi):=\frac{d}{d\varphi}\omega(\varphi)$$

$$\varepsilon(\varphi) \rightarrow \frac{0.7071}{\sin\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)^2}\cdot\left(16.5-5.657\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)-\frac{2}{\left(16.5-5.657\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Так как элемент *OB* (рис. 2) совершает вращательное движение то скорости точек *A* и *B* определяем по формуле Эйлера

$$Vb(\varphi) := \omega(\varphi)\cdot L$$

$$Vb(\varphi) \rightarrow \frac{-2.8284}{\sin\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)}\cdot\left(16.5-5.6569\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Определяем нормальную составляющую ускорения

$$an(\varphi) := Vb(\varphi)\cdot\omega(\varphi);$$

$$an(\varphi) \rightarrow 4\left(\frac{-0.7071}{\sin\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)}\right)^2\cdot\left(16.5-5.6569\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)\right).$$

Определяем касательную составляющую ускорения

$$a\tau(\varphi) := L\cdot\varepsilon(\varphi);$$

$$a\tau(\varphi) \to \frac{2.8284}{\sin\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)^2}\cdot\left(16.5-5.657\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)-\frac{2}{\left(16.5-5.657\cdot\cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi+\varphi\right)\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Определяем ускорения точек *A* и *B* ($aa(\varphi)=ab(\varphi)$):

$$aA(\varphi):=\sqrt{(an(\varphi))^2+(a\tau(\varphi))^2}\ .$$

Выражение получается громоздким, поэтому не приводится в полном виде.

Далее проводим численный расчет в заданном диапазоне изменения угла ($\varphi=0^0..30^0$) и строим графики скорости (рис. 3) и ускорения точки *A* (рис.4).

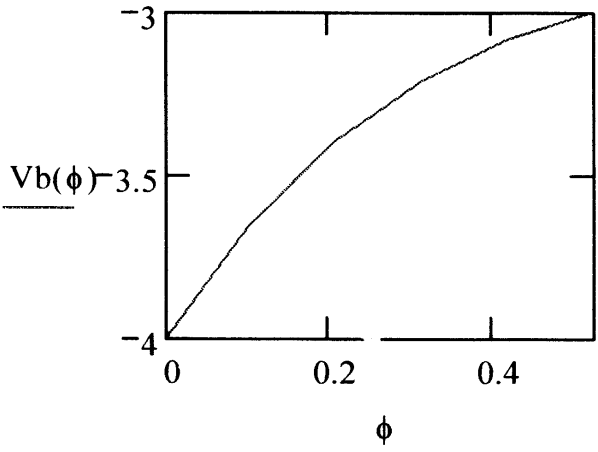


Рис. 3

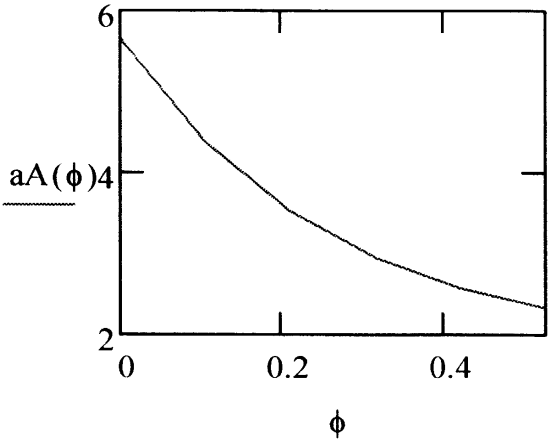


Рис. 4

$$\phi := 0, \frac{\pi}{30} .. \frac{\pi}{6} \qquad L := 4$$

$$\omega(\phi) := -\frac{0.7071\sqrt{1 + 0.25\sin(\phi)^2\cos(\phi)^2}}{\sin(0.25\pi + \phi)}$$

$$\varepsilon(\phi) := \frac{d}{d\phi}\omega(\phi)$$

$$Vb(\phi) := -\frac{2.8284\sqrt{1 + 0.25\sin(\phi)^2\cos(\phi)^2}}{\sin(0.25\pi + \phi)}$$

$$a\tau(\phi) := L\cdot\varepsilon(\phi)$$

$$an(\phi) := L\,\omega(\phi)^2$$

$$aA(\phi) := \sqrt{(a\tau(\phi))^2 + an(\phi)^2}$$

$\phi =$	$\omega(\phi) =$	$\varepsilon(\phi) =$	$Vb(\phi) =$
0	-1	1	-4
0.105	-0.911	0.715	-3.644
0.209	-0.847	0.511	-3.39
0.314	-0.802	0.362	-3.208
0.419	-0.77	0.249	-3.081
0.524	-0.749	0.162	-2.996

$\phi =$	$a\tau(\phi) =$	$an(\phi) =$	$aA(\phi) =$
0	4	4	5.657
0.105	2.859	3.32	4.381
0.209	2.046	2.873	3.527
0.314	1.448	2.574	2.953
0.419	0.998	2.374	2.575
0.524	0.648	2.244	2.336

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Теоретическая механика»

Расчетно-графическая работа К-2

Кинематический анализ многозвенного механизма

Вариант 31

Выполнил студент
Гр 10400 Гусева Т.А.

Принял преподаватель
Попов О.Н.

ТОМСК − 2015

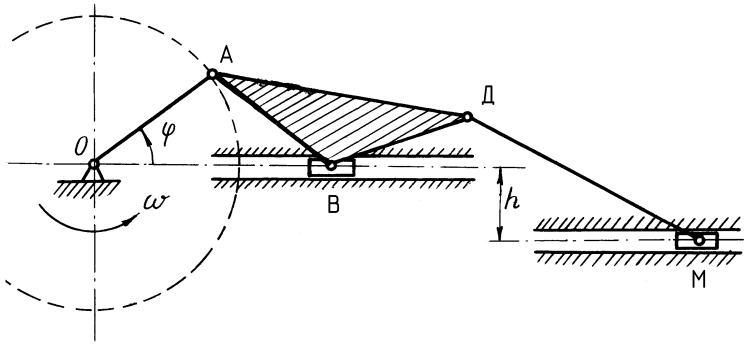


Рис. 1. Схема механизма

Дано: Схема механизма приведена на рис. 1. *OA*=*AB*=*BD*=200мм, *DM*=350мм, *n*=60об/мин, $\varphi = \omega t$, $h = 100$мм, $\angle ABD = 120°$, $\varphi = 30°, 60°, 90°$.

<u>Требуется:</u>

1. Изобразить механизм в трех положениях (при $\varphi = 30°, 60°, 90°$);

2. Построить план скоростей для трех положений механизма;

3. Определить положения мгновенного центра скоростей отдельных звеньев механизма и их угловые скорости (при $\varphi = 30°, 60°, 90°$);

4. Определить ускорение точки В механизма в заданном положении (при $\varphi = 30°$) графоаналитическим методом;

5. Построить план ускорений механизма при заданном положении ($\varphi = 30°$).

***<u>Примечание</u>*:** при определении угловых скоростей отдельных звеньев механизма, недостающие размеры разрешается брать с чертежа.

Решение

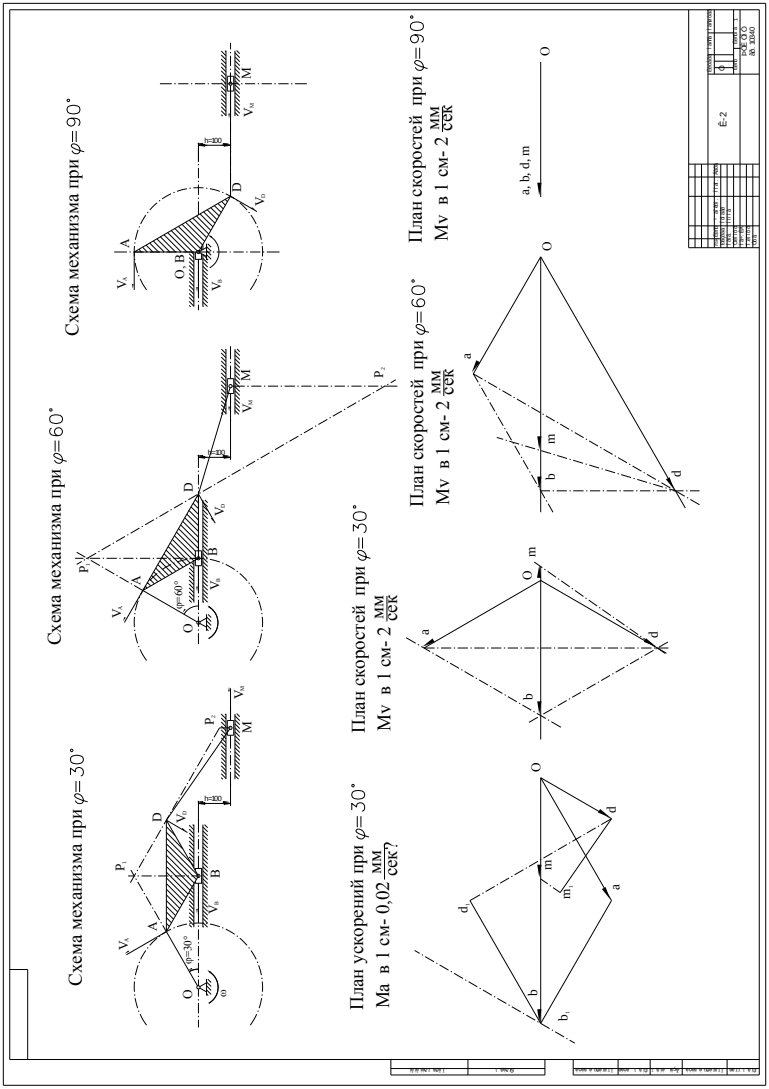


Рис. 2. Схемы механизма, планы скоростей и ускорений

1. Определяем скоростные параметры необходимые для построения плана скоростей.

Определяем скорость точки A − $\overline{V}_A$,по формуле Эйлера: $V_A = \omega_{OA} r_{OA}$,

где ω_{OA} - угловая скорость элемента OA, вычисляется по формуле: $\omega_{OA} = \dfrac{\pi n}{30}$;

$$\omega_{OA} = \frac{3{,}14 \cdot 1}{30} = 0{,}105 c^{-1}.$$

r_{OA} – расстояние от центра O до точки A, *мм*, r=OA=200 *мм*.

$$V_A = 200 мм \cdot 0{,}105 c^{-1} = 21 \frac{мм}{c}.$$

2. Строим план скоростей

Масштаб плана скоростей: Mv: 1см ÷ 2 мм/сек;

план скоростей при $\varphi = 30°, 60^\circ, 90^\circ$ (рис. 1).

а) $oa = V_A / M_V$. $\overline{oa} \perp \overline{OA}$

($oa = 105 мм$ в масштабе Mv).

б) $ob = V_B / M_V$. $\overline{ab} \perp \overline{AB}$, $\overline{ob}$ −горизонтальная прямая. Точка «b» на плане скоростей – точка пересечения лучей $\overline{ob}$ и $\overline{ab}$.

в) $od = V_D / M_V$. Проводим $\overline{ad} \perp \overline{AD}$, $\overline{bd} \perp \overline{BD}$. Точка «$d$» на плане скоростей – точка пересечения лучей $\overline{ad}$ и $\overline{bd}$.

г) $\overline{om} = V_M$. Проводим $\overline{dm} \perp \overline{DM}$,

$\overline{om}$ -горизонтальная прямая.

Точка «*м*» на плане скоростей – точка пересечения лучей $\overline{om}$ и $\overline{dm}$.

3. Определяем положения мгновенного центра скоростей (P_1, P_2) отдельных звеньев механизма и их угловые скорости (при $\varphi = 30°, 60°, 90°$).

3.1. а) Определяем положение мгновенного центра скоростей P_1.

$P_1A \perp \overline{V_a}, \overline{V_a} \perp OA$ следовательно $P_1A \| OA$;

$P_1B \perp \overline{V_B} \Rightarrow P_1B$ - вертикальная прямая;

При $\varphi = 30^\circ, 60^\circ$: точка P_1 - лежит на пересечении прямых P_1A и P_1B.

При $\varphi = 90^\circ$: точка P_1 - лежит в бесконечности т. к. $V_a // V_b$.

б) Определяем ω_{P1}, по формуле Эйлера, $\omega_{P1} = \dfrac{V_B}{r}$,

Где V_B - скорость точки В, определяемая из плана скоростей с учетом масштабного коэффициента Mv:

При $\varphi = 30^\circ$, $V_B = 10{,}5 \cdot 2 = 21 \dfrac{мм}{с}$.

При $\varphi = 60^\circ$, $V_B = 18{,}19 \cdot 2 = 36{,}37 \dfrac{мм}{с}$.

r – расстояние от P_1 до *B*, мм,

При $\varphi = 30^\circ$, r=200мм (согласно чертежу),

При $\varphi = 60^\circ$, r=346,41мм (согласно чертежу),

При $\varphi = 30^\circ$ $\quad \omega_{P1} = \dfrac{21}{200} = 0{,}105 c^{-1}$.

При $\varphi = 60^\circ$ $\omega_{P1} = \dfrac{36,37}{346,41} = 0,105c^{-1}$.

3.2. а) Определяем положение мгновенного центра скоростей P_2.

$P_2D \perp \overline{V_D}, P_2M \perp \overline{V_M}$, прямая $P_2D \bigcap P_1$.

Точка P_2 лежит на пересечении прямых P_2D и P_2M.

б) Определяем ω_{P2}, по формуле Эйлера, $\omega_{P2} = \dfrac{V_M}{r}$

Где V_M - скорость точки М, определяемая из плана скоростей с учетом масштабного коэффициента Mv:

при $\varphi = 30^\circ$, $V_M = 1,08 \cdot 2 = 2,16 \dfrac{мм}{c}$,

при $\varphi = 60^\circ$, $V_M = 15,06 \cdot 2 = 30,12 \dfrac{мм}{c}$,

при $\varphi = 90^\circ$, $V_M = 10,5 \cdot 2 = 21 \dfrac{мм}{c}$;

r – расстояние от P_2 до *M*, мм;

при $\varphi = 30^\circ$, r=34,17мм (согласно чертежу),

при $\varphi = 60^\circ$, r=480,95мм (согласно чертежу),

при $\varphi = 90^\circ$, r=0мм (согласно чертежу),

при $\varphi = 30^\circ$ $\omega_{P2} = \dfrac{2,16}{34,17} = 0,0632c^{-1}$.

при $\varphi = 60^\circ$ $\omega_{P2} = \dfrac{30,12}{480,95} = 0,0626c^{-1}$.

При $\varphi = 90^\circ$ мгновенного центра скоростей нет.

4. Определяем ускорение точки В механизма в заданном положении (при $\varphi = 30°$) графоаналитическим методом:

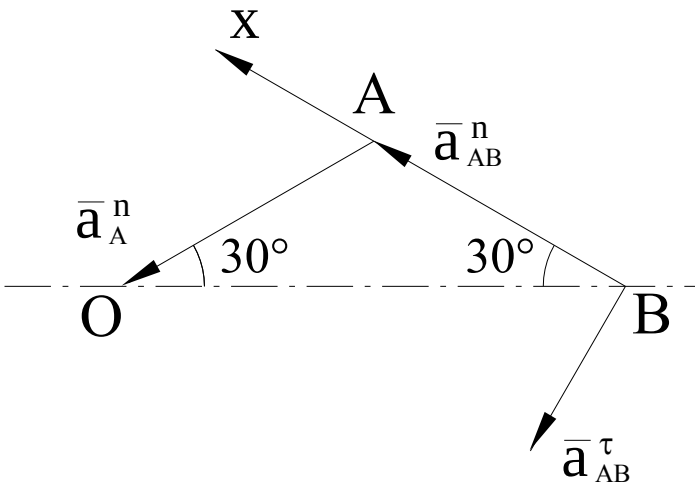


Рис 3. Схема ускорений на отрезке *AB*

а) $\overline{a_B}$ − горизонтальный вектор;

б) рассматриваем звено *AB*, принимаем точку А за полюс, тогда

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{AB}} = \overline{a_A^n} + \overline{a_{AB}^n} + \overline{a_{AB}^\tau},$$

где $\overline{a_A^n}$ - ускорение точки А, вычисляется по формуле

$$\overline{a_A^n} = \omega^2 \cdot r_{OA} = 0{,}105^2 \cdot 200 = 2{,}205 \frac{мм}{c^2},$$

$\overline{a_{AB}^n}$ - нормальное ускорение точки В, вычисляется по формуле

$$\overline{a^n_{AB}} = \omega_{P1}{}^2 \cdot r = 0{,}105^2 \cdot 200 = 2{,}205 \frac{мм}{c^2},$$

$\overline{a^\tau_{AB}}$ - тангенциальное ускорение точки В.

Т. к. $\overline{a^\tau_{AB}}$ величина неизвестная, $\overline{a_B}$ вычисляется следующим образом

Проецируем векторное равенство

$$\overline{a_B} = \overline{a^n_A} + \overline{a^n_{AB}} + \overline{a^\tau_{AB}}$$

на ось x (отрезок AB)

$$\overline{a_{Bx}} : \overline{a^n_{AB}} + \overline{a^n_A} \cdot \cos\angle OAX = a_B \cdot \cos\angle OBA,$$

т. к. $OA=OB$, то $\angle AOB = \angle OBA = 30° \Rightarrow \angle OAX = 60°$.

$$a_B = \frac{a^n_{AB} + a^n_A \cdot \cos\angle OAX}{\cos\angle OBA} = \frac{2{,}205 + 2{,}205 \cdot 0{,}5}{0{,}866} = 3{,}82 \frac{мм}{c^2}.$$

5. Строим план ускорений механизма при заданном положении ($\varphi = 30°$);

Масштаб плана ускорений:

Ма: 1см – 0,02 $\frac{м}{c^2}$.

а) $\overline{oa} = \overline{a_a} = \overline{a^n_a}, \overline{oa} // OA$,

($\left|\overline{oa}\right| = 110{,}25 см$ в масштабе плана ускорения);

б) Рассмотрим звено AB,

$$\overline{ob} = \overline{a_B} = \overline{a_a} + \overline{a_{ba}} = \overline{a^n_a} + \overline{a^n_{ba}} + \overline{a^\tau_{ba}} = \overline{oa} + \overline{ab_1} + \overline{b_1 b},$$

$$\overline{ab_1} = \overline{a^n_{ab}} = \omega_{P1}{}^2 \cdot r = 0{,}105^2 \cdot 200 = 2{,}205 \frac{мм}{c^2},$$

$\left|\overline{a^n_{ab}}\right| = \overline{ab_1} = 110{,}25 см$ в масштабе плана ускорения), $\overline{bb_1} \perp AB$.

Вектор $\overline{ob} \parallel \overline{V_b}$ и направлен в сторону направления скорости этой точки.

Точка «b» на плане ускорений - точка пересечения прямых ob и bb_1.

в) Рассмотрим звено *BD*. Принимаем точку «*B*» за полюс и получаем

$$\overline{a_d} = \overline{od} = \overline{a_b} + \overline{a_{db}^n} + \overline{a_{db}^\tau} = \overline{ob} + \overline{bd_1} + \overline{d_1 d}$$

$$\overline{bd_1} = \omega_{P1}^2 \cdot r = 0{,}105^2 \cdot 200 = 2{,}205 \frac{мм}{c^2},\ \overline{dd_1} \perp \overline{bd_1}$$

Вектор $\overline{od} \parallel \overline{V_d}$ и направлен в сторону направления скорости этой точки. Точка «d» на плане ускорений – точка пересечения od и dd_1;

г) Рассмотрим звено *DM*. Принимаем точку «*D*» за полюс и получаем

$$\overline{a_m} = \overline{om} = \overline{a_m} + \overline{a_{dm}^n} + \overline{a_{dm}^\tau} = \overline{od} + \overline{dm_1} + \overline{m_1 m}$$

$$\overline{dm_1} = \omega_{P2}^2 \cdot r = 0{,}0632^2 \cdot 350 = 1{,}398 \frac{мм}{c^2},\ \overline{mm_1} \perp \overline{dm_1}.$$

Вектор $\overline{om} // \overline{V_m}$ и направлен в сторону направления скорости этой точки. Точка «*m*» на плане ускорений – точка пересечения $\overline{om}$ и $\overline{mm_1}$.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

«ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Теоретическая механика»

Расчетно-графическая работа К-3

Сложное движение точки

Вариант 31

Выполнил студент
Гр 10400 Гусева Т.А.

Принял преподаватель
Попов О.Н.

ТОМСК − 2015

Задача 1.

Груз *1* поднимается с помощью грузоподъемного устройства (рис. 1,а), которое состоит из грузовой стрелы *2*, лебедки 3, подвижного и неподвижного блоков, соединенных с помощью троса. Барабан лебедки вращается по закону $\varphi_б = 2t\ рад$. Известно, что *OA*= *0B* =*L*= 3 м, *r*=0,2 м. Трос считается гибким и нерастяжимым.

Определить абсолютную скорость v_{Aa} и абсолютное ускорение a_{Aa} груза как функции угла поворота стрелы φ и построить графики $v_{Aa} = v_{Aa}(\varphi)$, $a_{Aa} = a_{Aa}(\varphi)$. Угол φ изменяется от 15 до 90°.

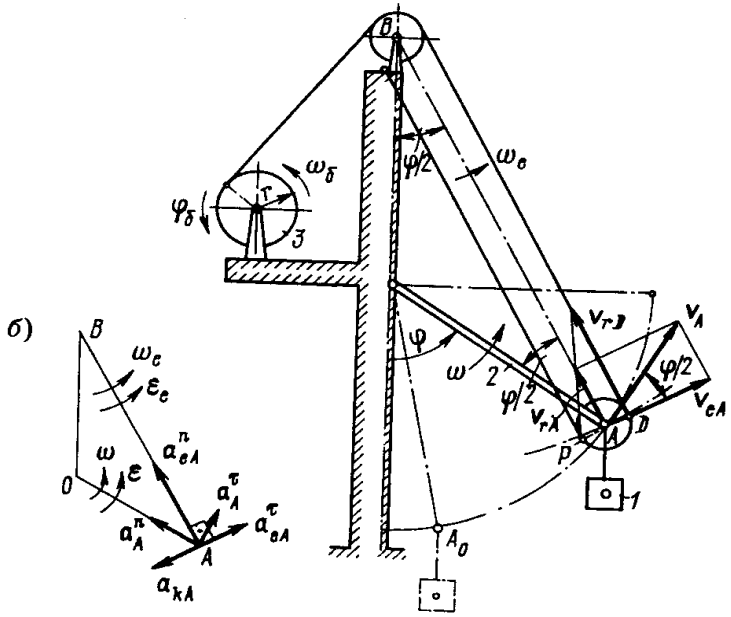


Рис. 1. Расчётная схема грузоподъемного устройства

Решение.

Груз *1* совершает поступательное движение. Скорость и ускорение его центра тяжести равны скорости и ускорению оси подвижного блока *A*. Движение точки *A* рассматриваем как сложное, которое складывается из переносного и относительного движений.

В относительном движении точка А двигается вдоль линии *AB* со скоростью v_{rA}. В переносном движении в данный момент времени траекторией точки А является окружность радиуса АВ и переносная скорость v_{eA} направлена по касательной к этой окружности (рис. 1, а). По теореме о сложении скоростей находим абсолютную скорость точки *A*

$$\bar{v}_A = \bar{v}_{eA} + \bar{v}_{rA}. \qquad (1)$$

Для определения относительной скорости $\bar{v}_{rA}$ учтем, что подвижный блок вращается в данный момент времени вокруг оси, которая проходит через его мгновенный центр скоростей *P*. Тогда

$$v_{rA} = \frac{v_{rD}}{2}, \qquad (2)$$

где

$\bar{v}_{rD}$ – скорость намотки троса на барабан лебедки.

Скорость намотки троса на барабан

$$v_{rD} = \omega \cdot r, \qquad (3)$$

где $\omega_б$ — угловая скорость барабана,

$$\omega_б = \dot{\varphi}_б = 2 \text{ рад/с}.$$

Окончательно находим

$$v_{rA} = \frac{\omega_б r}{2} = 0.2\ м/с. \qquad (4)$$

Из параллелограмма скоростей следует

$$v_A = \frac{v_{rA}}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\omega_б r}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(\varphi)}} = \frac{0.4}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(\varphi)}}. \qquad (5)$$

Угловая скорость грузовой стрелы

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{v_A}{(OA)} = \frac{v_A}{3}. \qquad (6)$$

Абсолютное ускорение точки А определяют по теореме о сложении ускорений

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{eA} + \bar{a}_{rA} + \bar{a}_{cA}, \qquad (7)$$

где $\bar{a}_A$, $\bar{a}_{eA}$, $\bar{a}_{rA}$, $\bar{a}_{cA}$ — абсолютное, переносное, относительное и Кориолисово ускорения точки A.

Поскольку в относительном движении точка A движется вдоль прямой АВ с постоянной скоростью $v_{rA} = 0.2\ м/с$, то ее относительное ускорение

$$a_{rA} = \dot{v}_{rA} = 0\ м/с^2.$$

Траекторией переносного движения точки в данный момент времени является окружность радиусом AB (рис. 2, б). Поэтому переносное ускорение складывается из касательного $\bar{a}_{eA}^{\tau}$ и нормального $\bar{a}_{eA}^{n}$ ускорений:

$$\bar{a}_{eA} = \bar{a}_{eA}^{\tau} + \bar{a}_{eA}^{n}. \qquad (8)$$

Переносное нормальное ускорение определяют из выражения

$$a_{eA}^{n} = \omega_e^2 \cdot (AB), \qquad (9)$$

где $\overline{\omega}_e$ — переносная угловая скорость;

$(AB) = 2L\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = L\sqrt{2}\sqrt{1+\cos(\varphi)}$.

Переносная угловая скорость

$$\omega_e = \frac{v_{tA}}{(AB)} = \frac{v_{rA}ctg\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{2L\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\omega_б r}{4L\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\omega_б r}{2\sqrt{2}L\sqrt{1-\cos(\varphi)}} = \frac{\omega}{2}. \qquad (10)$$

Переносное касательное ускорение определяем из выражения

$$a_{eA}^{\tau} = \varepsilon_e \cdot (AB), \qquad (11)$$

где ε_e — переносное угловое ускорение.

Это угловое ускорение

$$\varepsilon_e = \dot{\omega}_e = \frac{\omega_б r}{2\sqrt{2}L}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\cos(\varphi)}}\right); \ \varepsilon_e = -\frac{\omega_б r}{4\sqrt{2}L}\left(\frac{\dot{\varphi}\cdot\sin(\varphi)}{(\sqrt{1-\cos(\varphi)})^3}\right) =$$

$$\frac{\omega_б^2 r^2}{8L^2}\frac{\sin\varphi}{(1-\cos(\varphi))^2} \qquad \varepsilon_e = \frac{\omega_б^2 r^2}{8L^2}\frac{\sin\varphi}{(1-\cos(\varphi))^2} = -\frac{0.0022\sin(\varphi)}{(1-\cos(\varphi))^2}.$$

(12)

Модуль Кориолисова ускорения определяем по формуле

$$a_{cA} = 2\omega_e V_{rA}\sin(\overline{\omega}_e, \overline{v}_{rA}) = 2\omega_e V_{rA}, \qquad (13)$$

так как угол между векторами $\overline{\omega}_e$ и $\overline{v}_r$ равен 90°.

Направление вектора $\overline{a}_{cA}$ устанавливают по правилу Жуковского: через точку A проводят плоскость, перпендикулярную к вектору $\overline{\omega}_e$; определяют проекцию вектора $\overline{v}_{rA}$ на эту плоскость; проекцию вектора $\overline{v}_{rA}$ поворачивают на угол 90° в сторону вращения. Полученный вектор и дает направление a_{cA}.

Так как составляющие ускорения $\overline{a}_A$ направлены по двум взаимно перпендикулярным прямым, то модуль абсолютного ускорения

$$a_A = \sqrt{\left(a_{eA}^{\tau} - a_{cA}\right)^2 + \left(a_{eA}^{n}\right)^2} \quad . \qquad (14)$$

Можно предложить и другой способ вычисления абсолютного ускорения точки A. Поскольку траекторией точки А в абсолютном движении является окружность радиусом OA, то абсолютное ускорение можно представить в виде векторной суммы

$$\overline{a}_A = \overline{a}_A^{\tau} + \overline{a}_A^{n}, \qquad (15)$$

где $\overline{a}_A^{\tau}$; $\overline{a}_A^{n}$ — касательное и нормальное ускорения точки А.

Касательное ускорение точки А в абсолютном движении

$$a_A^{\tau} = \dot{v}_A = \frac{\omega_б r}{\sqrt{2}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\cos(\varphi)}}\right) = -\frac{\omega_б r}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\dot{\varphi}\cdot\sin(\varphi)}{(\sqrt{1-\cos(\varphi)})^3}\right) =$$

$$= \frac{\omega^2 r^2}{4L}\frac{\sin\varphi}{\left(1-\cos(\varphi)\right)^2} = -\frac{0.0133\sin(\varphi)}{\left(1-\cos(\varphi)\right)^2}. \qquad (16)$$

Нормальное ускорение точки A в абсолютном движении

$$a_A^{n} = \frac{v_A^2}{(OA)} = \frac{v_A^2}{L}. \qquad (17)$$

Модуль абсолютного ускорения

$$a_A = \sqrt{\left(\left(a_A^{\tau}\right)^2 + \left(a_A^{n}\right)^2\right)}. \qquad (18)$$

Программа вычисления и печати значений функций скоростей (линейных и угловых) и функций ускорений (линейных и угловых) в среде MathCAD приведены ниже.

Листинг MathCAD

Счет проводился по готовым формулам с помощью ранжированных переменных

$i := 0..7 \qquad \phi_i := \frac{90}{6}\cdot\frac{3.14}{180}\cdot i + 0.0000 \qquad \phi g_i := \phi_i\cdot\frac{180}{3.14}$

$vAr_i := 0.2 \qquad vA_i := \frac{0.4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos(\phi_i)}}$

$\omega_i := \frac{vA_i}{3} \qquad \omega e_i := \frac{\omega_i}{2} \qquad L := 3$

$aen_i := (\omega e_i)^2\cdot L \qquad \varepsilon e_i := \frac{-0.0022\sin(\phi_i)}{(1-\cos(\phi_i))^2} \qquad ae\tau_i := \varepsilon e_i\cdot L$

$ac_i := 2\cdot\omega e_i\cdot vAr_i \qquad aAn_i := vA_i\cdot\frac{vA_i}{L}$

$aA\tau_i := \frac{(-0.0133\sin(\phi_i))}{(1-\cos(\phi_i))^2} \qquad aA_i := \sqrt{(aAn_i)^2 + (aA\tau_i)^2}$

График зависимостей скорости точки А (м/с) в зависимости от угла (град

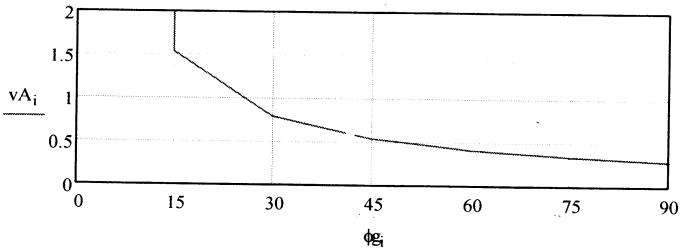
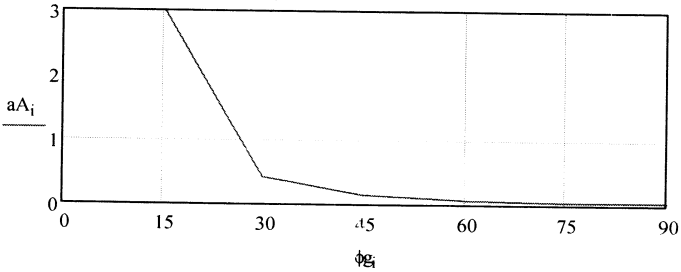


График зависимостей ускорения точки А (м/с^2) в зависимости от угла (град)



Задача 2.

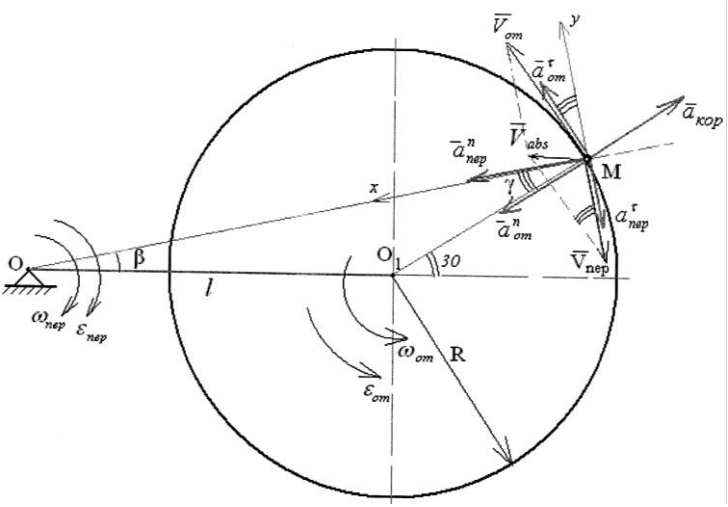


Рис. 1

Схема механизма изображена на рис. 1.

$R = 30\ см$, $l = 50\ см$, $\alpha = 30^0$.

Точка *М* движется относительно тела *Д*. По заданным уравнениям относительного движения точки *М:*
$\varphi = \pi\left(t^2 + 1\right)\ рад$ и движения тела *Д* : $\omega_1 = 4\pi t\ c^{-1}$.

Определить для момента времени $t_1 = 0{,}5\ c$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *М*.

<u>*Решение*</u>

Движение точки *М* сложное: относительное − движение по дуге вокруг оси O_1; переносное − вращение тела вокруг оси O.

Относительное движение.

Относительная угловая скорость:

$\omega_{от} = 4\pi t$; $\omega_{от}(t_1) = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 = 6{,}28\ c^{-1}$.

Относительное угловое ускорение:

$$\varepsilon_{от} = \frac{d\omega_{от}}{dt} = 4\pi = 4 \cdot 3{,}14 = 12{,}56\ c^{-2}.$$

Относительная линейная скорость:

$V_{от} = \omega_{от} R$. $V_{от}(t_1) = 6{,}28 \cdot 30 = 188{,}4\ см/с$,

направлена $\perp O_1M$ с учетом направления $\omega_{от}(t_1)$.

Относительное тангенциальное ускорение:

$a_{от} = \varepsilon_{от} R$. $a_{от}(t_1) = 12{,}56 \cdot 30 = 377\ см/с^2$,

направлено $\perp O_1M$ с учетом направления $\varepsilon_{от}(t_1)$.

Относительное нормальное ускорение:

$a^n_{от} = \omega^2{}_{от} R$. $a^n_{от}(t_1) = 6{,}28^2 \cdot 30 = 1183\ см/с^2$,

направлено от M к центру кривизны – O_1.

Переносное движение.

Переносная угловая скорость:

$$\omega_{пер} = \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi t; \quad \omega_{пер}(t_1) = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 = 3{,}14\ c^{-1}.$$

Переносное угловое ускорение:

$$\varepsilon_{пер} = \frac{d\omega_{пер}}{dt} = 2\pi = 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28\ c^{-2}.$$

Переносная линейная скорость:

$V_{пер} = \omega_{пер} \cdot OM$.

$OM = \sqrt{(l + R\cos\alpha)^2 + (R\sin\alpha)^2}$.

$OM(t_1) = \sqrt{(50 + 30\cos(30^0))^2 + (30\sin(30^0))^2} = 77{,}4$ см.

$V_{пер}(t_1) = 3{,}14 \cdot 77{,}4 = 243\ см/с$,

направлена $\perp OM$ с учетом направления $\omega_{пер}(t_1)$.

Переносное тангенциальное ускорение:

$a_{пер} = \varepsilon_{пер} \cdot OM = 6{,}28 \cdot 77{,}4 = 486\ см/с^2$.

$a_{пер}(t_1) = 486\ см/с^2$,

направлено $\perp O_1M$ с учетом направления $\varepsilon_{от}(t_1)$.

Переносное нормальное ускорение:

$a^n_{пер} = \omega^2{}_{пер} \cdot OM$. $a^n_{пер}(t_1) = 3{,}14^2 \cdot 77{,}4 = 763\ см/с^2$,

направлено от M к центру кривизны $-$ O.

<u>Кориолисово ускорение:</u>

$a_{кор} = 2 \cdot V_{от} \cdot \omega_{пер}$. $a_{кор}(t_1) = 2 \cdot 188{,}4 \cdot 3{,}14 = 1183\ см/с^2$,

направление определяется путем поворота $V_{от}$ на 90^0 по направлению переносного вращения.

<u>Абсолютное движение.</u>

Определяем углы при t_1:

$$\sin\beta = \frac{R\cdot\sin 30^0}{OM} = \frac{30\cdot 0{,}5}{77{,}4} = 0194.$$

$$\beta = \arcsin 0{,}194 \approx 11{,}2^0; \quad \gamma = \alpha - \beta = 30 - 11.2 = 18{,}8^0.$$

Абсолютную скорость в данной задаче определяем по теореме косинусов:

$$V_{абс} = \sqrt{(V_{от})^2 + (V_{пер})^2 - 2\cdot(V_{от})\cdot(V_{пер})\cdot\cos\gamma}.$$

$$V_{абс}(t_1) = \sqrt{(188{,}4)^2 + (243)^2 - 2\cdot(188{,}4)\cdot(243)\cdot\cos 18{,}8^0}.$$

$$V_{абс}(t_1) = 89\ см/с.$$

Абсолютное ускорение в данной задаче определяем по теоремам Кориолиса и Пифагора:

$$\bar{a}_{абс} = \left(\bar{a}^n_{пер} + \bar{a}^\tau_{пер}\right) + \left(\bar{a}^n_{отн} + \bar{a}^\tau_{отн}\right) + \bar{a}_{кор}.$$

$$(a_{абс})_x = \left(a^n_{пер}\right) + \left(a^n_{отн}\cos\gamma + a^\tau_{отн}\sin\gamma\right) - a_{кор}\cos\gamma =$$

$$= 763 + 1183\cdot\cos 18{,}8^0 + 377\cdot\sin 18{,}8^0 - 1183\cos 18{,}8^0.$$

$$(a_{абс})_x = 884\ см/с.$$

$$(a_{абс})_y = -\left(a^\tau_{пер}\right) + \left(-a^n_{отн}\sin\gamma + a^\tau_{отн}\cos\gamma\right) + a_{кор}\sin\gamma = =$$

$$-486 - 1183\cdot\sin 18{,}8^0 + 377\cdot\cos 18{,}8^0 + 1183\sin 18{,}8^0.$$

$$(a_{абс})_y = -129\ см/с.$$

$$a_{абс} = \sqrt{(a_{абс})^2_x + (a_{абс})^2_y} = \sqrt{884^2 + (-129)^2}.$$

$$a_{абс}(t_1) = 893\ см/с^2.$$

Ответ: $V_{абс}(t_1) = 89\ см/с.$

$a_{абс}(t_1) = 893\ см/с^2.$

Примеры выполнения расчетно-графических работ по теоретической механике (кинематика)

Составитель Попов Олег Николаевич

Печатается в редакции составителя