Р. Ш. Абиев

НАДЕЖНОСТЬ МЕХАНИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ И КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

для студентов заочной формы обучения

для студентов вузов, обучающихся по направлениям 270800 «Строительство» и 08.03.01 «Строительство»

Санкт-Петербург
2016

УДК 621.86

ББК 34.41
С 87

Р.Ш. Абиев
Надежность механического оборудования и конструкций: учебник./Р.Ш. Абиев.– СПб: Изд-во СПбГТИ (ТУ), 2016. – 299 с.

В книге приведены основные понятия и термины теории надежности. Рассмотрены математические, инженерные, технологические и управленческие аспекты надежности, расчет показателей надежности машин и надежности систем. При определении надежности механического оборудования в процессе эксплуатации рассматриваются потоки отказов и восстановлений машин. Приведены примеры и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов вузов, обучающихся по направлениям 270800 «Строительство» и 08.03.01 «Строительство», а также для студентов, обучающихся по другим направлениям инженерной подготовки.

Список основных условных обозначений

$D(x)$ – дисперсия величины x;
$f(x)$ – плотностью распределения величины x;
I – интенсивность износа;
$M(x)$ – математическое ожидание величины x;
$P(t)$ – вероятность безотказной работы на промежутке времени t;
$Q(t)$ – вероятность отказа на промежутке времени t;
q – засоренность партии дефектными изделиями;
$S(x)$ – среднее квадратическое отклонение величины x;
u_P – квантиль;
V – коэффициент вариации;
α – риск поставщика, уровень значимости;
β – риск потребителя;
η – коэффициент технического использования;
$\lambda(t)$ – интенсивность отказов, мес$^{-1}$;
$\Lambda(t)$ – параметр потока отказов, мес$^{-1}$;
σ – нормальные напряжения, Па;
τ – касательные напряжения, Па.

Индексы:
в – внезапные отказы;
п – постепенные отказы;
с – система;
ср – средний.

Введение

Цель учебной дисциплины "Надежность механического оборудования и комплексов" заключается не только в обеспечении комплексной подготовки студентов-механиков, но и в формировании у будущих руководителей способности стратегического мышления, видения проблем качества выпускаемой продукции через призму обеспечения надежного функционирования производства и корректной его организации (в смысле стандартов серии ГОСТ Р ИСО 9000–2008).

"Надежность механического оборудования" является дисциплиной, формирующей научные основы создания и эксплуатации механического оборудования предприятий строительных материалов, изделий и конструкций. На базе общих методов теории надежности рассматриваются вопросы обеспечения надежности механического оборудования в процессе его проектирования, производства и эксплуатации, образующих единый процесс.

Данное пособие можно рассматривать как расширенный конспект лекций по одноименной дисциплине, однако круг рассматриваемых в нем вопросов может представлять интерес для инженеров-механиков всех специальностей. В него вошли материалы учебного пособия [42], по которому готовили студентов в БГТУ им. Шухова и учебного пособия [43], использовавшегося в СПбГТИ (ТУ) для обучения студентов по двум специальностям в рамках родственных дисциплин "Качество и надежность технологического оборудования" и "Основы квалиметрии в химической технике и технологии".

Сейчас большое внимание уделяется развитию механического оборудования. На это направлен ряд постановлений правительства о развитии цементной промышленности (переход на сухой способ), производства силикатного и керамического кирпича, гипса и извести, стекла и ситаллов, пластмасс и полимеров. Важнейшим показателем качества является надежность машин, от которой в значительной степени зависит эффективность использования механического оборудования, а в целом – конкурентоспособность предприятия на рынке товаров.

Теория надежности как самостоятельное научное направление сформировалось сравнительно недавно. Первые работы в области надежности деталей машин и элементов металлоконструкций принадлежат советским инженерам и ученым – Н.Ф. Хоциалову (1929 г.), В.Г. Шухову, Н.С. Стрелецкому (1935 г.). Общие вопросы надежности машин и их элементов рассмотрены в работах Д.Н. Решетова [18] и других авторов [12–17, 19-21].

Человек стремится все сделать как можно надежнее в меру своих финансовых, технических и технологических возможностей. Создать совершенно безотказную и предельно долговечную машину невозможно, так как с течением времени на нее воздействуют различные факторы, изменяются свойства деталей и, следовательно, происходит отклонение показателей надежности. Экономически создавать такую машину нецелесообразно, так как со временем изменяются технологии, сами машины устаревают морально и физически, меняются представления об оптимальной форме машин.

Сначала надежность как наука возникла в авиационной и космической технике, позже – в радиотехнике, телемеханике, средствах связи. Она стала «проблемой номер один» и выделилась в самостоятельную дисциплину, главная задача которой дать оценку надежности объекта.

Наука о надежности техники изучает закономерности изменения показателей работоспособности объектов с течением времени, а также физическую природу отказов и на этом основании разрабатывает методы, обеспечивающие с наименьшей затратой времени и средств необходимую долговечность и безотказность работы.

Надежность объекта – один из основных показателей его качества. Проблема надежности техники – комплексная проблема, которую нужно решать на всех этапах жизненного цикла продукции:

1. На этапе проектирования – утверждение идеи, исследование, проектирование и расчет объекта определенной надежности. Надежность на этой стадии зависит от качества проведенных исследований и конструкторских расчетов. Это самый ответственный этап, при котором ошибка при выборе принятого решения влечет за собой лавинообразные убытки на этапе эксплуатации.

2. Производство объекта. Надежность его на этом этапе в первую очередь зависит от качества материала деталей и точности их изготовления, от качества сборки и обкатки, от других составляющих технологического процесса.

Ошибка в осуществлении технологии на этом этапе обернется многократными потерями на этапе эксплуатации. Следует заметить, что на большинстве предприятий не проводятся полная обкатка и испытание объектов продукции. Необходимо повсеместно внедрять ускоренные испытания как новой, так и отремонтированной техники.

3. Эксплуатация объекта. На этом этапе реализуется и поддерживается надежность, заложенная при расчете и обеспеченная при изготовлении. Обычно рассматривают цепочку «человек – машина – среда», которая описывает процессы эксплуатации, обслуживания и ремонта. Необходимо добавить и социальный фактор (условия труда и быта, заработную плату, участие обслуживающего персонала в жизни коллектива и т.д.), который в ряде случаев может быть определяющим.

На любой стадии производства инженеру приходится заниматься контролем качества, по меньшей мере, дважды — при приемке сырья, полуфабрикатов, машин, поступающих на предприятие, а также при выпуске готовой продукции. В действительности контроль качества выполняется нередко также на промежуточных стадиях производства, при остановке оборудования на плановый ремонт и т.п. Очевидно, что и оборудование, как средство производства, и выпускаемые изделия, как продукт производства, должны соответствовать определенным нормам, установленным в соответствующих регламентах или других нормативных актах, иначе они будут обладать низкой потребительской стоимостью и не имеют никаких шансов быть реализованными на товарном рынке, обрекая их производителей на большие потери или даже финансовый крах. В первой главе данного пособия даны основные понятия и концептуальные вопросы качества производимой продукции и предоставляемых услуг, описаны современные отечественные и зарубежные системы управления качеством, а также важнейшие нормативные документы — отраслевые, государственные и международные стандарты, регламентирующие контроль качества.

Так или иначе, контроль качества напрямую влияет на технические показатели производства, а в конечном счете — на его экономическую эффективность. Поэтому изучение основ надежности оборудования наряду с дисциплинами, связанными с расчетом и проектированием, имеет важнейшее значение для современного инженера. Не зря проблемам качества уделяется огромное внимание как в нашей стране [1-3], так и за рубежом [4].

Кроме того, с обеспечением качества неразрывно связано понятие надежности, поскольку стабильные параметры выпускаемой продукции возможны только при использовании надежного оборудования. Можно сказать, что надежность оборудования является технологической основой качества продукции. С другой стороны, надежность продукции также является одним из показателей его качества. Теоретической базой надежности является математический аппарат теории вероятностей и математической статистики. Во второй главе данного учебного пособия рассматриваются математические аспекты надежности.

В свою очередь, надежность оборудования обусловлена качеством выполнения всех этапов "рождения и жизни" оборудования — проектирования, изготовления, монтажа и эксплуатации. Известно, что по мере изнашивания машин их качественные параметры также изменяются. Поэтому инженер должен уметь рассчитывать влияние на надежность оборудования различных видов износа, а также предусматривать способы их снижения. В третьей главе данной книги рассматриваются проблемы трения, смазки и износа, а также их влияния на надежность и качество машин.

Современные машины представляют собой сложные системы, надежность которых зависит от надежности входящих в нее элементов. Визуальное обнаружение отказавшего элемента, ставшего причиной отказа всей машины, зачастую практически невозможно. Выявить цепь событий, повлекших за собой снижение качества выпускаемых машиной изделий или даже ее полной остановки, позволяет техническая диагностика, основы которой описаны в четвертой главе. Анализ надежности машины, проводимый еще на стадии проектирования, позволяет улучшить ее качественные показатели.

Наконец, в пятой главе освещены методы статистического контроля выпускаемой (или принимаемой) продукции, в том числе с использованием выборочных планов контроля, сформулирована проблема компромисса между риском потребителя и риском производителя, даны методы расчета этих величин.

Для углубленного изучения предмета отсылаем читателя к литературе: [2] – по системам качества, [12-14] – по математическим методам в теории надежности, [18-21] – по общим вопросам теории надежности, а также по технической диагностике и износу.

Автор надеется, что использование информации, полученной при изучении данной книги, в том числе при решении задач, предлагаемых в конце каждой главы, позволит будущим инженерам-проектировщикам умело способствовать улучшению надежности машин, а инженерам, занимающимся эксплуатацией оборудования — повышению качества выпускаемых изделий.

1 Основы теории надежности

1.1 Основные понятия и определения теории надежности

Механическое оборудование для производства строительных материалов, как и химическая, нефтехимическая аппаратура, являются разновидностями технологического оборудования, при этом с точки зрения системного анализа на различных ступенях иерархии каждая машина может рассматриваться либо как система, состоящая из элементов, либо - в масштабах цеха - как элемент технологической линии.

ГОСТ 27.002-89 "Надежность в технике. Термины и определения" вводит 21 показатель надежности и 86 терминов, разделенных на следующие группы:

1) общие понятия;
2) виды отказов;
3) показатели надежности;
4) термины, относящиеся к резервированию.

1.1.1 Термины надежности машин

Рассмотрим некоторые термины ГОСТ 27.002–83 и общие понятия, приводимые в специальной литературе по надежности.

Классификация состояний объектов

Технические объекты могут находиться в следующих состояниях:

1) исправном и неисправном;
2) работоспособном и неработоспособном;
3) предельном.

Исправность (исправное состояние) – состояние объекта, при котором он соответствует всем требованиям, установленным нормативно-технической и конструкторской документацией.

Неисправное состояние – состояние объекта не соответствует хотя бы одному из требований нормативно-технической и конструкторской документации, например: снижение производительности, экономичности, потеря точности, вмятины на кожухе, отклонения в толщине слоя окраски и т.д. Неисправности – это нефункциональные дефекты.

Работоспособное состояние – это состояние объекта, когда он способен выполнять заданные функции, сохраняя значения заданных параметров в пределах, установленных нормативно-технической и конструкторской документацией.

Понятие "исправность" шире, чем понятие "работоспособность".

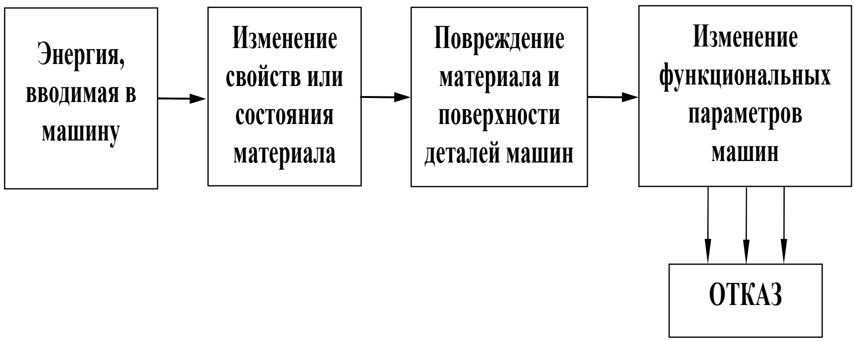


Рисунок 1.1 - Процесс возникновения отказов.

Исправный объект всегда работоспособен. Работоспособный объект может быть неисправным, но неисправность при этом не влияет на функционирование объекта (например, шестерни изношены, но эксплуатационные показатели не вышли за пределы технических требований; у теплообменника может быть повреждена небольшая часть теплоизоляции, а все остальные функции сохранены, в этом случае он неисправен, но работоспособен).

Неработоспособность – состояние объекта, когда значение хотя бы одного заданного параметра, характеризующего способность выполнять заданные функции, не соответствует требованиям, установленным нормативно-технической или конструкторской документацией. К неработоспособности относятся функциональные дефекты.

Предельное состояние – состояние объекта, когда его дальнейшая эксплуатация должна быть прекращена из-за неустранимого ухода заданных параметров (температуры, давления, механических напряжений в стенке сосуда, электрического напряжения и т. п.) за установленные пределы, или неустранимого снижения эффективности эксплуатации ниже допустимой, или необходимости проведения капитального ремонта. Критерии предельного состояния устанавливаются нормативно-технической и конструкторской документацией.

Причины прекращения эксплуатации: невозможность обеспечения безопасности или эффективности эксплуатации объекта и минимума необходимого уровня безопасности, а также экономическая нецелесообразность.

1.1.2 Повреждения и отказы. Виды отказов

Событие, заключающееся в нарушении исправного состояния, называется *повреждением*.

Событие, заключающееся в нарушении работоспособности, называется *отказом*. Процесс возникновения отказов показан на рис. 2.1.

С точки зрения надежности именно работоспособное состояние представляет наибольший интерес.

Внезапный отказ характеризуется скачкообразным изменением одного или нескольких параметров объекта. Внезапному отказу не предшествует направленное изменение какого-нибудь из наблюдаемых эксплуатационных параметров.

Постепенный отказ имеет место, когда один или несколько параметров объекта изменяются постепенно.

Независимый отказ не обусловлен отказом другого объекта, *зависимый* – обусловлен отказом другого объекта.

При отказе, в зависимости от ситуации, работоспособность объекта может как восстанавливаться, так и не восстанавливаться. Поэтому при анализе надежности различают восстанавливаемые и невосстанавливаемые объекты.

1.1.3 Показатели надежности машин

Под *надежностью* систем (машин, оборудования, технологических линий) в общем случае понимают свойство системы сохранять во времени в установленных пределах требуемые функции в заданных режимах и условиях функционирования, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортирования [8].

Вопросы надежности обычно рассматриваются в рамках следующих обобщенных объектов:

изделие - единица продукции, выпускаемая данным предприятием (теплообменник, печь, мельница, пресс, автомобиль);

элемент - составная часть изделия, которая может состоять из множества деталей (например, трубный пучок теплообменника, ротор молотковой дробилки);

система - совокупность совместно действующих элементов, предназначенная для выполнения заданных функций.

Понятия *элемента* и *системы* трансформируются в зависимости от поставленной задачи. Машина, например, при установлении ее собственной надежности рассматривается как система, состоящая из отдельных элементов

- механизмов, деталей и т. д., а при изучении надежности технологической установки - как элемент установки.

Изделия делят на *невосстанавливаемые*, которые не могут быть восстановлены потребителем и подлежат замене (например, подшипник качения, шпонка, молоток) и *восстанавливаемые*, которые могут быть восстановлены потребителем (например, сальниковое уплотнение, привод грохота, фланец циклона).

Восстанавливаемый объект – объект, для которого в данной ситуации предусмотрено научно-технической и конструкторской документацией восстановление работоспособного состояния. В противном случае объект называется невосстанавливаемым.

Ремонт – комплекс операций по восстановлению исправности или работоспособности, а также ресурсов объектов и их составных частей.

Ремонтируемые объекты – объекты, для которых проведение ремонтов предусмотрено нормативно-технической и конструкторской документацией, в противном случае – неремонтируемые (например, поршневые кольца, фрикционные накладки тормозов и сцепления, прокладки, уплотнительные кольца, трубы теплообменников, молотки дробилки).

Некоторые изделия, относимые к невосстанавливаемым, могут быть восстановлены на специализированных предприятиях.

1.1.4 Отказы. Критерии и классификация отказов

Понятие отказа является ключевым в теории надежности, поскольку возникновение отказа определяет способность объекта нормально функционировать. Причины отказов технологического оборудования чрезвычайно многообразны и в большинстве случае носят случайный характер. Поэтому в теории надежности отказ рассматривается как случайное событие, к которому применимы математические методы аппарата теории вероятностей и математической статистики. Более того, для решения задач, направленных на снижение вероятности отказа, на основе этих разделов математики были разработаны математические методы теории надежности [6–10].

Под *критерием отказа* понимают признак или совокупность признаков неработоспособного состояния объекта, установленные в нормативной и (или) конструкторской документации [11]. Каждому элементу присуща своя формулировка неработоспособного состояния, определяемая его назначением, которая и служит в качестве критерия отказа.

Принято выделять систематические и случайные *причины отказов*.

Случайные причины - это непредусмотренные перегрузки, дефекты материала, изготовления и сборки, не обнаруженные контролем, ошибки обслуживающего персонала, изменение свойств перерабатываемого сырья. В качестве примеров можно назвать попадание чрезмерно твердых тел на вальцы, включение шнека после застывания полимерного материала в цилиндре; не закрытый по халатности аппаратчика вентиль или клапан аппарата; закалочные трещины на валу ротора резиносмесителя; изготовление шнека или цилиндра с превышением допусков на форму и размеры, либо из материала, свойства которого не соответствуют выданному на него сертификату.

Систематические причины - это закономерные явления, вызывающие постепенное накопление повреждений: коррозионное воздействие среды, механический износ, засорение, изменение параметров смазки в результате ее перегрева.

Рассмотрим классификацию отказов по различным признакам.

I. По видам критериев отказы делят на *отказы функционирования*, при которых выполнение своих функций рассматриваемым элементом или объектом прекращается (например, поломка шнека питателя), и *отказы параметрические*, при которых некоторые параметры объекта изменяются в недопустимых пределах (например, снижение производительности питателя за счет увеличения зазора между шнеком и цилиндром вследствие их износа).

II. По характеру развития и проявления отказы подразделяют на *внезапные* (поломка шнека при застывании бетонного раствора в цилиндре питателя), *постепенные по развитию и внезапные по проявлению* (поломка шнека от усталостных напряжений) и *постепенные* (механический износ, старение, коррозия). Внезапные отказы вследствие своей неожиданности более опасны, чем постепенные. Постепенные отказы представляют собой выход параметров за границы допуска в процессе эксплуатации или хранения. Так, в результате износа шнека и цилиндра снижается расход питателя.

III. По причинам возникновения отказы можно также разделить на *конструкционные,* вызванные недостатком конструкции, *технологические (производственные),* обусловленные несовершенством или нарушением технологии, и *эксплуатационные,* являющиеся результатом неправильной эксплуатации.

IV. По времени возникновения различают: *приработочные* отказы, возникающие в первый период эксплуатации и связанные с отсутствием приработки, неправильным подключением, попаданием бракованных элементов; отказы *при нормальной эксплуатации*; *износовые* отказы, возникающие в период катастрофического износа оборудования (см. кривую
.

V. По физической природе отказы могут быть *связаны с разрушением* деталей или их поверхностей (поломки, выкрашивание поверхности футеровки, износ, коррозия, старение) или *не связаны с разрушением* (засорение каналов подачи смазки, зарастание загрязнениями теплообменной поверхности, ослабление болтовых соединений).

VI. По своим последствиям отказы могут быть *легкими* - т. е. легкоустранимыми, *средними* - не вызывающими разрушений других узлов, и *тяжелыми* - вызывающими тяжелые вторичные разрушения, а иногда и человеческие жертвы.

VII. По возможности использования изделий после отказа различают *полные* отказы, исключающие возможность работы изделия до их устранения, и *частичные*, при которых изделие может использоваться временно при определенных условиях, например, с неполной мощностью или пониженной производительностью.

VIII. По сложности устранения различают отказы: *по месту устранения*, т. е. устранимые в эксплуатационных и стационарных условиях, *устранимые в порядке технического обслуживания*, и *устранимые в порядке среднего или капитального ремонта*.

1.1.5 Понятие надежности

Надежность объектов является комплексным свойством, различными аспектами которого является *безотказность*, *долговечность*, *ремонтопригодность* и *сохраняемость*. Таким образом, надежность характеризуется свойствами, которые проявляются в эксплуатации и позволяют судить о том, насколько объект как потребительский продукт оправдает надежды его изготовителей и потребителей.

Безотказность - свойство объекта *непрерывно* сохранять работоспособность в течение заданного времени его эксплуатации. Это свойство особенно важно для машин, отказ в работе которых сопряжен с опасностью для жизни людей или с перерывом в работе целой технологической линии или даже цеха, с остановкой целого процесса или дорогостоящим браком.

Наиболее высокие показатели безотказности должны достигаться в тех отраслях человеческой деятельности, в которых отказ техники грозит гибелью большого количества людей или экологическими катастрофами: в энергетике (особенно атомной), в химической промышленности, в строительстве, на транспорте.

Например, еще в 1980-е годы авиаконструкторы обеспечили следующие показатели безотказности самолета ИЛ-86:

- вероятность отказа на 1 ч полета, приводящего к опасной ситуации, составляет
10^{-4}, что эквивалентно в среднем налету 10000 ч на одну такую ситуацию;

- наработка на один отказ, приводящий к невыполнению полетного задания, составляет не менее 5000 летных часов.

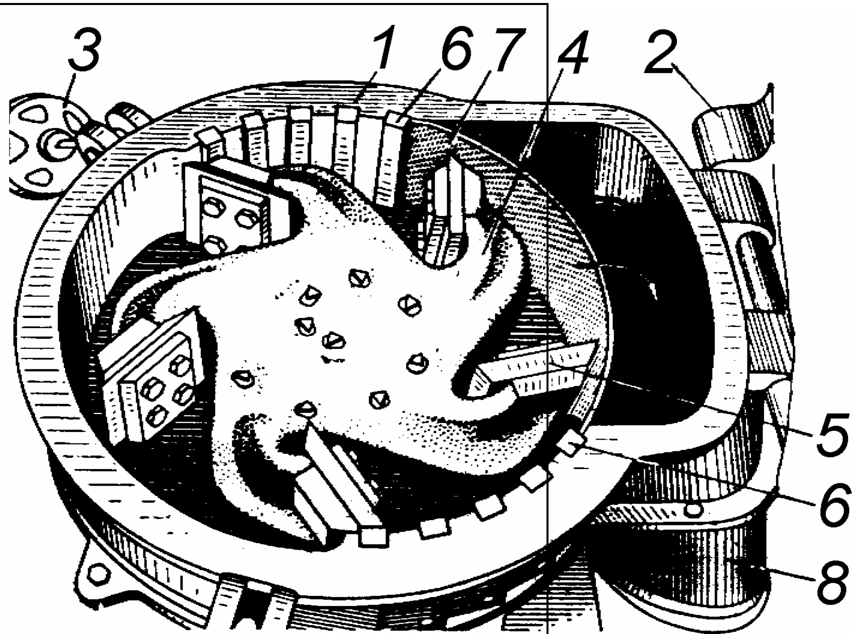
Долговечность - свойство объекта длительно сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонтов. Таким образом, понятие долговечности химического оборудования предполагает многократное возникновение отказов, их устранение (ремонт), плановое техническое обслуживание, замену деталей и узлов, не подлежащих ремонту и т. д. Очевидно, что для невосстанавливаемых изделий понятия долговечности и безотказности совпадают. Для достижения большой долговечности сложного оборудования в его конструкцию должна быть заложена ремонтопригодность.

Ремонтопригодность - приспособленность изделия к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, а также поддержанию и восстановлению работоспособности путем технического обслуживания и ремонтов.

С усложнением систем все труднее становится находить причины отказов и отказавшие элементы. Поэтому облегчение поиска отказавших элементов закладывается в конструкцию новых сложных автоматических систем. Важность ремонтопригодности машин определяется огромными затратами на их ремонт в промышленности. Нужно подчеркнуть, что некоторые элементы оборудования могут не обладать свойством ремонтопригодности (подшипники, уплотнительные прокладки, электрические лампочки, шпонки и т. п.). Ремонтопригодность определяет доступность, контролепригодность, агрегатирование, легкосъемность, взаимозаменяемость, унификацию, количество смазываемых точек и т.д.

Сохраняемость - свойство изделия сохранять безотказность, долговечность и ремонтопригодность в течение и после хранения и (или) транспортирования. Надежность сложного оборудования, в том числе химического, может быть существенно снижена при ненадлежащем хранении либо при нагрузках, не предусмотренных техническими требованиями, возникающих при перевозке изделий от завода-изготовителя на химическое предприятие. По американским данным, во время второй мировой войны около 50 % радиоэлектронного оборудования для военных нужд и запасных частей к нему вышло из строя именно в процессе хранения. Наиболее эффективные методы повышения сохраняемости – консервация, применение специальных защитных покрытий и пропитывающих составов, профилактическое обслуживание хранящихся объектов, повышение транспортабельности объектов, защита полимеров от старения.

По применению изложенной терминологии рассмотрим пример



1 - корпус, 2 - крышка; 3 - откидные болты; 4- ротор; 5- ножи; 6 - контрножи; 7 - сито; 8 - разгрузочный патрубок.

Рисунок 1.2 - Гранулятор с вертикальной осью.

отказа в работе оборудования, попытаемся указать одну из причин отказа, дать характеристику этому отказу и состоянию оборудования.

Пример 2.1. В грануляторе с вертикальной осью для переработки отходов производства термопластов (Рисунок 1.1) недопустимо сократилась производительность по измельченному продукту. Гранулятор пришлось остановить. Анализ показал, что причиной этого события является чрезмерное увеличение зазора между ножами 5 и контрножами 6.

Данный отказ является параметрическим, при котором в результате износа режущих кромок ножей и контрножей недопустимо увеличился размер измельченного материала, так что он перестал проходить через сито 7. Причина отказа носит систематический характер. В результате абразивного износа зазор увеличивался постепенно, поэтому отказ мог быть предсказан и предотвращен. По последствиям отказ является средним, так как требует временной остановки гранулятора для заточки ножей и (или) для уменьшения зазора между ними и контрножами. По причинам возникновения отказ является эксплуатационным, так как обусловлен перегрузкой машины по измельчаемому сырью (частая причина преждевременного износа режущей поверхности ножей - их перегрев). На момент отказа машину следует считать неработоспособной и неисправной.

Возможности восстановления и ремонтопригодности будут определяться степенью износа ножей и контрножей.

Систематизация отказов и их статистическая обработка и анализ позволяют совершенствовать оборудование, предвидеть сроки технического обслуживания и ремонтов, и, тем самым, наиболее эффективно вести производство.

1.1.6 Количественные характеристики надежности

Количественно надежность может характеризоваться большим числом показателей. Так, ГОСТ 27.002-89 "Надежность в технике. Термины и определения" вводит 21 показатель надежности; в литературе предлагается еще несколько десятков таких показателей. Часто эти показатели дублируют друг друга. Кроме того, на практике для оценки надежности системы обычно достаточно использовать показатели, приведенные ниже.

Продолжительность или объем работы называют *наработкой*. Наработка измеряется в единицах времени, массы, длины, площади, в объемах, циклах и т.д., например, для автомобиля – километры пробега, для экскаватора – метры кубические грунта, для реле – циклы включения, телевизор – часы работы.

Наработка может быть суточной, месячной, до первого отказа, между отказами, до предельного состояния и т.д. При различных режимах эксплуатации каждый уровень нагрузки учитывается отдельно.

Наработку не следует путать с календарной продолжительностью эксплуатации. Например, наработка грузоподъемного механизма (лифта) в течение года может составлять 1000 часов, хотя в году 8760 часов.

Для восстанавливаемых объектов, к которым относится большинство технологических систем, говорят о *наработке между отказами*, представляющей собой наработку объекта от окончания восстановления его работоспособности после отказа до возникновения следующего отказа. Для тех элементов технологических систем, восстановление работоспособности которых нецелесообразно или неосуществимо, используют понятие *наработка до отказа*, т. е. наработку объекта от начала его эксплуатации до возникновения отказа.

Итак, отказ - событие случайное, поэтому показателями надежности служат наиболее общие числовые характеристики случайных величин.

Так, <u>к показателям безотказности</u> относятся:

1. *вероятность безотказной работы* - вероятность того, что в пределах заданной наработки отказ не произойдет;
2. *средняя наработка до отказа* - математическое ожидание наработки до отказа;
3. *средняя наработка на отказ* - отношение наработки восстанавливаемого объекта к математическому ожиданию числа его отказов в течение этой наработки.

Главный показатель долговечности – ресурс. *Ресурс* – наработка объекта от начала эксплуатации или ее возобновления после капитального ремонта до наступления предельного состояния. Ресурс является случайной величиной. Различают ресурс средний, медианный, гамма-процентный, до первого капитального ремонта, межремонтный, суммарный, назначенный.

Основными <u>показателями долговечности</u> являются:

1. *средний ресурс* - математическое ожидание наработки объекта от начала его эксплуатации или ее возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние;
2. *гамма-процентный ресурс* - наработка, в течение которой объект не достигнет предельного состояния с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах;
3. *средний срок службы* - математическое ожидание календарной продолжительности периода от начала эксплуатации или ее возобновления после ремонта до перехода в предельное состояние.

К основным <u>показателям ремонтопригодности</u> относят:

1. *вероятность восстановления работоспособного состояния* - вероятность того, что время восстановления работоспособности объекта не превысит заданное;
2. *среднее время восстановления работоспособного состояния* - математическое ожидание времени восстановления работоспособного состояния.

Наконец, количественными <u>показателями сохраняемости</u> служат:

1. *средний срок сохраняемости* - математическое ожидание календарной продолжительности хранения и (или) транспортирования объекта, в течение и после которых сохраняются значения показателей безотказности, долговечности и ремонтопригодности в установленных пределах;
2. *гамма-процентный срок сохраняемости* - срок сохраняемости, который будет достигнут объектом с заданной вероятностью γ, выраженной в процентах.

Все перечисленные характеристики являются единичными показателями надежности, так как дают количественную оценку только одной составляющей надежности объекта. При эксплуатации сложных технологических систем часто нет необходимости иметь детальную информацию об отдельных составляющих надежности; достаточно знать вероятность того, что система находится в работоспособном состоянии. В этих случаях используют комплексные показатели надежности, которые количественно характеризуют два и более свойств, составляющих надежность. К комплексным показателям надежности относятся:

1. *коэффициент готовности* - вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме тех периодов, в которые эксплуатация не предусматривается;
2. *коэффициент технического использования* - отношение математического ожидания времени работоспособного состояния за некоторый период эксплуатации к сумме математических ожиданий времени работоспособного состояния и всех простоев для ремонтов и технического обслуживания.

Как отмечалось в главе 1, уже на стадии разработки ТЗ необходимо заложить фундамент качества разрабатываемых изделий, в том числе показателей надежности. Таким образом, уметь рассчитывать показатели надежности должен и разработчик, и заказчик оборудования, и специалисты, занимающиеся его эксплуатацией. Ниже представлен материал, необходимый для знакомства с основами математического аппарата теории надежности.

1.2 Математические методы теории надежности

Механическое оборудование в результате эксплуатации в различных условиях подвергается не только систематическим, но и случайным воздействиям. Случайными факторами являются свойства сырья, параметры оборудования, приспособлений, инструментов, а также состояние оператора. Поэтому для анализа и контроля надежности оборудования используется теория вероятностей и математическая статистика.

Оценка надежности объектов при помощи математических методов на основе обобщения накопленной статистической информации об их работе в реальных условиях эксплуатации позволяет выявлять вероятностные закономерности и соотношения между случайными факторами. Они в различной мере влияют на работоспособность, безотказность, долговечность объектов.

1.2.1. Основные понятия и определения

В теории вероятностей и математической статистике применяют следующие специфические понятия:

1) испытание (опыт);
2) событие;
3) случайная величина;
4) частота;
5) частость;
6) вероятность.

Испытание (опыт) – это практическое создание определенной совокупности условий, влияющих на некоторое физическое явление. Испытание сопровождается регистрацией результата.

Событие – это явление, происходящее в результате испытания (опыта). Оно является качественным результатом испытания, например результатом испытания механического оборудования в определенных условиях с целью оценки его надежности. Различают следующие события: достоверные, невозможные, случайные, единичные, массовые, несовместные.

Достоверное событие неизбежно произойдет при данных действующих условиях.

Невозможное событие при тех же условиях произойти не может.

Случайное событие при рассматриваемом сочетании условий может произойти, а может и не произойти (например, появление отказов).

События в технике подразделяют также на единичные и массовые. Единичное – событие, которое возникло однократно и при многократном воспроизведении того же испытания (опыта) практически не повторится. Массовые – события, которые повторяются.

Несовместные события – события, происходящие в том случае, если в единичном испытании появление одного из них исключает возможность появления другого (например, отказ и работоспособность).

Случайная величина – это величина, которая может принять какое-либо неизвестное заранее возможное значение, зависящее от случайных факторов (причин), которые не могут быть учтены. Случайные величины могут быть дискретными и непрерывными.

Дискретной (прерывной) случайной величиной называется случайная величина, принимающая отделенные друг от друга возможные значения, которые можно записать в виде последовательности $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$.

Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным и бесконечным.

В теории надежности дискретными случайными величинами являются:

1) количество невосстанавливаемых объектов, отказавших в заданном интервале времени;

2) количество отказов восстанавливаемого объекта в заданном интервале времени;

3) количество объектов, восстановленных в заданном интервале времени.

Непрерывной случайной величиной называется случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый конечный или бесконечный промежуток. Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

В теории надежности непрерывными случайными величинами являются:

1) наработка;

2) ресурс;

3) срок службы;

4) время восстановления;

5) срок сохраняемости.

В теории вероятностей изучаются массовые случайные отказы или величины, имеющие к тому же устойчивую частоту появления.

Частота – число одинаковых или близких (полученных по наблюдениям) появлений событий или абсолютных значений случайных величин, соединенных в одну группу (интервал) или разряд.

Частость (относительная частота) – частота, выраженная в долях единицы или процента от общего числа испытаний или объектов изучаемой совокупности. Например, если проведено N испытаний машин и получена частота (количество) отказов m, то относительная частота (частость) отказов:

$$p = \frac{m}{N}. \tag{1.1}$$

При неограниченном увеличении N статистическое значение Q сходится к некоторому числу P, называемому *вероятностью* данного события (теорема Бернулли):

$$P = \lim_{N \to \infty} p = \lim_{N \to \infty} \frac{m}{N}, \tag{1.2}$$

то есть

$$P(A) \cong \frac{m}{N}, \qquad (1.3)$$

где $P(A)$ – вероятность события A;

m – число случаев, благоприятствующих наступлению события A;

N – число несовместных единственно возможных и равновозможных событий.

При многократной реализации одной и той же совокупности условий обнаруживаются закономерности в наступлении случайных событий. Одна из задач теории вероятностей заключается в определении этих закономерностей.

Изучение закономерностей появления отказов как случайных событий является центральным вопросом всей проблемы надежности.

Для количественной оценки случайного события используют вероятность того, что случайная величина окажется в указанном интервале ее возможных значений. *Вероятность* – объективная математическая оценка возможности реализации случайного события или случайной величины.

1.3 Законы распределения случайной величины

1.3.1 Случайные величины и функции распределения

Основные понятия и определения

Отказы технических объектов считаются случайными событиями, а некоторые параметры процессов – случайными величинами. Случайность связана с тем, что причины события остаются для нас скрытыми ("случайность - непознанная закономерность"). По этой причине характеристики надежности также являются случайными величинами и описываются соответствующими функциями распределения случайных величин.

Для многих видов изделий характеристики надежности, вообще говоря, могут иметь большой разброс (рассеяние). В износе, например, существенное рассеяние имеют действующие нагрузки, прочностные характеристики материалов и деталей, зазоры и натяги (которые при изготовлении и сборке получаются как разности размеров сопрягаемых деталей), и предсказать, когда выйдет из строя какое-либо конкретное изделие, невозможно. Но определить количество изделий, отказавших к определенному моменту времени - вполне реальная задача, позволяющая спрогнозировать сроки проведения и объем затрат: для производителя - на гарантийное содержание, для потребителя - на обслуживание.

Дадим определение непрерывным случайным величинам по известному из теории вероятностей примеру. Пусть стрелок пытается попасть в цель, ограниченную радиусом x. Существует определенная

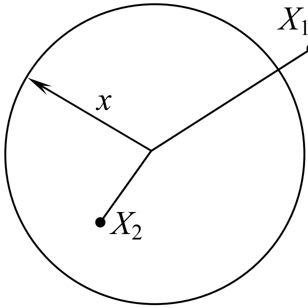


Рисунок 1.3. К определению вероятности

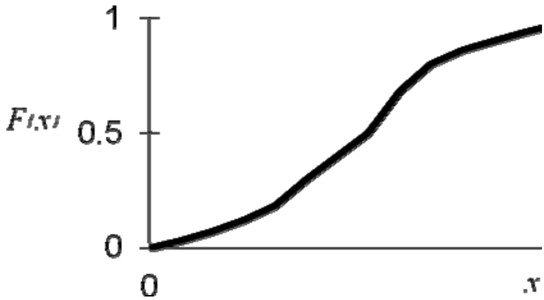


Рисунок 1.4 Функция случайной величины x

вероятность (Рисунок 1.2) $P(X < x)$ того, что величина X не превысит x (т. е. попадание в круглую цель радиусом x)*.

Эта зависимость $F(x) = P(X < x)$ называется *интегральной функцией распределения* или *функцией вероятности случайной величины.* В пределах изменения случайной величины x функция распределения изменяется от 0 до 1 (Рисунок 1.3). Вероятность является априорной характеристикой

* буква "P" — от англ. Probability — вероятность

возможности положительного исхода, апостериорной же характеристикой является *частость* (т. е. отношение числа положительных исходов данного события к общему числу исходов).

Производная функции распределения по текущей переменной

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{1.5}$$

называется *плотностью распределения вероятностей (дифференциальным законом распределения)*. Аналогично можно ввести понятие дискретной случайной величины, если круг на рисунке 1.2 разбить концентрическими окружностями на дискретные кольца, и пронумеровать их.

Дискретные и непрерывные случайные величины описываются целым рядом законов [12 – 17], имеющих весьма разнообразный характер. Однако в качестве компактных и вместе с тем достаточно полных характеристик в большинстве случаев могут выступать математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение и некоторые другие показатели, рассматриваемые ниже.

Характеристики случайных величин

Основными характеристиками случайной величины, позволяющими получить достаточное представление об их распределении (например, при отсутствии точной информации о законе распределения случайной величины), являются математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, мода, медиана, коэффициент вариации.

Математическое ожидание m_x – среднее значение $\overline{x}$ случайной величины.

Для дискретных случайных величин:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \text{ , или } \quad \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{J} x_j \Delta N_j \text{ ,} \tag{1.6}$$

где N - общее число наблюдений;

x_i - наблюдаемые значения случайной величины, $i = 1, \ldots, N$;

ΔN_j - число одинаковых событий, относящихся к категории x_j, $j = 1, \ldots, J$.

Для непрерывных случайных величин

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx ; \quad m_x = \int_{0}^{1} x dF(x). \tag{1.7}$$

Аналогично для дискретных случайных величин можно записать

$$m_x = \sum_{j=1}^{J} x_j \Delta F_j \,, \qquad (1.8)$$

где ΔF_j - *относительная частота* (или частость) одинаковых событий, $\Delta F_j = \Delta N_j / N$.

Математическое ожидание является начальным моментом первого порядка распределения $F(x)$. Начальный момент n-го порядка.

$$M_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx \,. \qquad (1.9)$$

Дисперсия случайной величины - математическое ожидание квадрата отклонения этой величины от ее среднего значения. Для дискретных случайных величин несмещенная оценка дисперсии

$$D_x = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 \,. \qquad (1.10)$$

Для непрерывных функций, как известно, дисперсия равна

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx = \int_{0}^{1} (x - m_x)^2 dF(x) \,, \qquad (1.11)$$

а для дискретных величин

$$D_x = \sum_{j=1}^{J} (x_j - \bar{x})^2 \Delta F_j \,. \qquad (1.12)$$

Дисперсия характеризует разброс случайной величины относительно центра группирования (т.е. математического ожидания) и является центральным моментом второго порядка распределения $F(x)$.

$$D_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^n f(x) dx \,. \qquad (1.13)$$

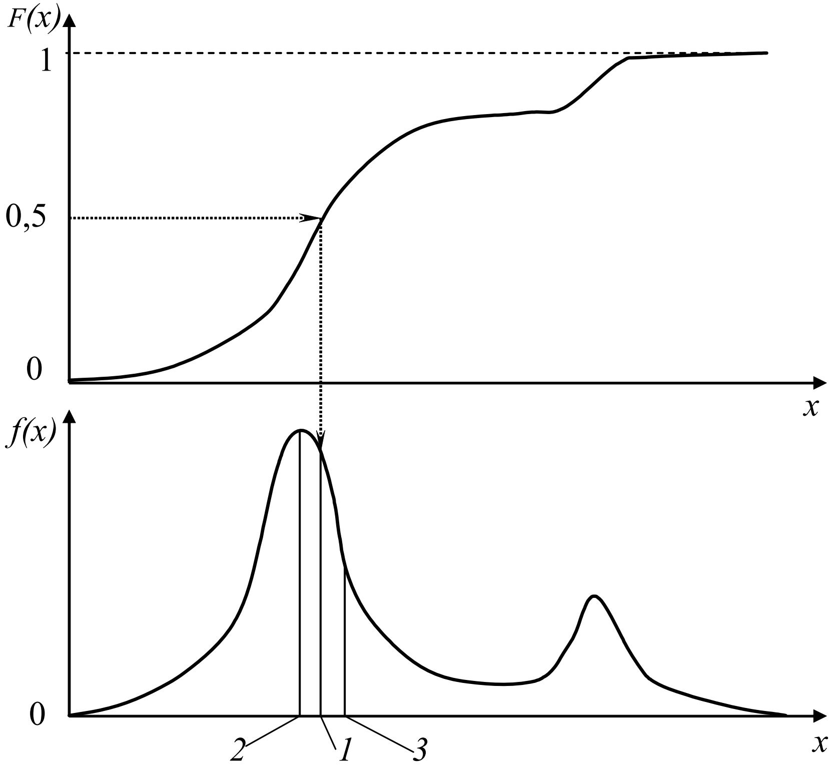
Среднее квадратическое отклонение - характеристика рассеяния случайной величины, связанная с дисперсией соотношением

$$S_x = \left| \sqrt{D_x} \right| \,. \qquad (1.14)$$

Среднее квадратическое отклонение имеет размерность случайной величины, а дисперсия – размерность квадрата этой величины.

Коэффициент вариации - безразмерная (относительная) величина среднего квадратического отклонения

$$V_x = S_x / m_x \ . \qquad (1.15)$$



Некоторые характеристики случайного распределения:

1 - медиана; 2 - мода; 3 - математическое ожидание.

Рисунок 1.5 – Графики функций вероятности *F(x)* и плотности вероятности *f(x)*.

Квантиль - значение случайной величины, соответствующей заданной вероятности.

Квантиль, соответствующая вероятности 0.5 , называется *медианой* (Рисунок 1.5). Медиана характеризует расположение центра группирования случайной величины. Площадь под графиком *f(x)* делится медианой пополам.

Мода - наиболее вероятное значение случайной величины, или то ее значение, при котором плотность вероятности максимальна. Для симметричного унимодального (т. е. имеющего один максимум) распределения математическое ожидание, мода и медиана совпадают (на рисунке 1.5 показано так называемое бимодальное распределение, т. е. распределение с двумя модами).

1.3.2 Экспоненциальное распределение

Экспоненциальное (показательное) распределение определяется одним параметром λ. Эта особенность экспоненциального распределения является его достоинством по сравнению с распределениями, зависящими от большого числа параметров.

Параметр λ – это интенсивность событий (например, отказов объектов, восстановлений работоспособности объектов). Интенсивность событий показывает среднее число событий, появившихся в единицу времени. При постоянной интенсивности событий время их появления имеет экспоненциальное распределение. И наоборот, при экспоненциальном распределении времени появления событий их интенсивность постоянна.

Время появления внезапных отказов имеет экспоненциальное распределение. Постоянная интенсивность внезапных отказов в период нормальной эксплуатации является результатом воздействия многих случайных факторов при неизменных внешних условиях. Явления изнашивания и старения объекта выражены в этом случае настолько слабо, что ими можно пренебречь.

В теории надежности экспоненциальное распределение имеют:

1) интервалы времени между событиями в простейшем потоке;

2) интервалы времени между отказами восстанавливаемых объектов в период нормальной эксплуатации;

3) длительность восстановления работоспособности объектов.

Экспоненциальное распределение является одним из распространенных в теории надежности.

Дополнение интегральной функции экспоненциального распределения вероятностей случайной величины *t* задается уравнением (рис. 2.6)

$$P(t) = \mathbf{exp}(-\lambda t) = \mathbf{exp}(-t / T_{cp}), \qquad (1.16)$$

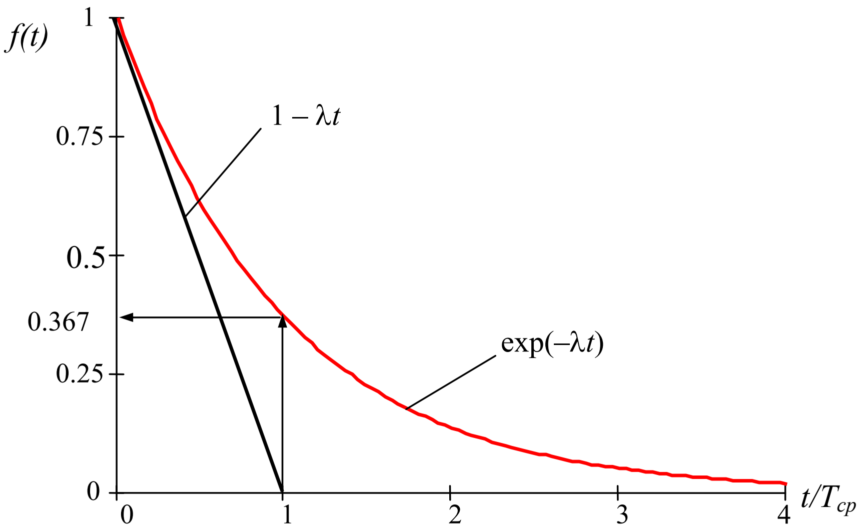


Рисунок 1.6– График дополнения интегральной функции экспоненциального распределения

где t – длительность интервала времени, для которого определяются показатели надежности;

λ – параметр распределения, постоянная положительная величина $\lambda = \dfrac{1}{T_{cp.}}$;

T_{cp} – среднее значение (математическое ожидание) случайной величины t.

Интегральная функция экспоненциального распределения имеет вид

$$F(t) = 1 - \mathbf{exp}(-\lambda t) = 1 - \mathbf{exp}(-t / T_{cp}), \qquad (1.17)$$

а дифференциальная функция экспоненциального распределения

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda\, \mathbf{exp}(-\lambda t) = \frac{1}{T_{cp}} \mathbf{exp}(-t / T_{cp}). \qquad (1.18)$$

1.3.3 Нормальное распределение

Условия возникновения нормального распределения (распределения Гаусса) устанавливаются центральной предельной теоремой теории вероятностей. Так как эти условия на практике часто выполняются, то нормальное распределение является самым распространенным распределением, наиболее часто встречающимся в случайных явлениях природы.

Наличие этих закономерностей связано с массовостью явлений. Свойство устойчивости массовых случайных явлений известно человеку еще с древности. Случайные отклонения от среднего в массе погашаются, нивелируются, т.е. проявляется устойчивость средних.

Одна из предельных теорем теории вероятности (теорема Бернулли) утверждает, что при большом числе опытов частота события приближается (точнее, сходится по вероятности) к вероятности этого события.

Нормальное распределение возникает тогда, когда отклонение случайной величины создают многие примерно равнозначные по воздействию независимые (или слабо зависимые) между собой факторы, каждый из которых оказывает на случайную величину сравнительно малое влияние.

Отклонение X случайной величины можно представить как сумму отклонений $x_1+x_2+...+x_n$, вызванных отдельными факторами, при любом распределении каждого слагаемого.

Распределение случайной величины оказывается близким к нормальному при выполнении перечисленных условий центральной предельной теоремы при любом распределении каждого слагаемого.

Приближение к нормальному распределению оказывается тем точнее, чем больше слагаемых в сумме и чем меньшее влияние на сумму оказывает каждое слагаемое при их примерной равнозначности.

Удовлетворительное приближение к нормальному распределению практически получается при сравнительно небольшом числе слагаемых – примерно 10 и даже меньше. Однако если одно из слагаемых оказывает на сумму значительно большее влияние, чем другие, то это слагаемое определит в общих чертах распределение суммы.

Очевидно, что сумма любого числа нормально распределенных величин всегда имеет нормальное распределение.

Нормальным распределением хорошо описываются нагрузки в машинах, механические характеристики материалов (предел текучести, предел прочности, предел выносливости), несущая способность деталей машин, ресурс и срок службы объектов при изнашивании и т.д.

Дифференциальная функция (плотность вероятности) нормального распределения задается уравнением:

$$f(x) = \frac{1}{S_x \sqrt{2\pi}} \mathbf{exp} \left(-\frac{(x - m_x)^2}{2 S_x^2} \right) \qquad (1.19)$$

где m_x – математическое ожидание (центр рассеивания) случайной величины x;

S_x – среднее квадратическое отклонение случайной величины x.

Интегральная функция нормального распределения определяется интегрированием дифференциальной функции $f(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \frac{1}{S_x\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathbf{exp}\left(-\frac{(x-m_x)^2}{2S_x^2} \right)dx \ . \qquad (1.20)$$

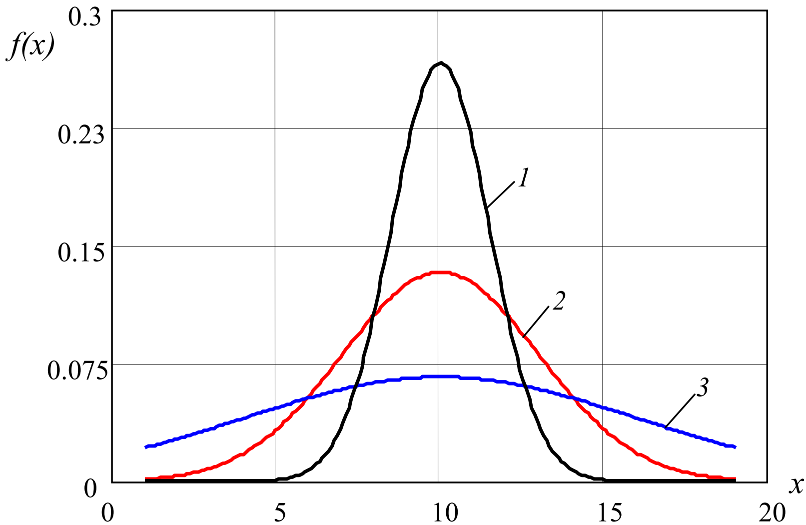


Рисунок 1.7 – Дифференциальная функция нормального распределения. *1* – $m_x = 10$, $S_x = 1.5$, *2* – $m_x = 10$, $S_x = 3$, *3* – $m_x = 10$, $S_x = 6$.

Этот интеграл не выражается через элементарные функции, но его можно вычислить через нормированную функцию, для которой есть таблицы в справочниках по теории вероятностей и по надежности (см. также приложение к данному учебному пособию).

Нормированное нормальное распределение позволяет составить таблицу для определения интегральной функции.

Сделаем в уравнении (1.20) замену переменной,

$$Z = \frac{x - m_x}{S_x} \ . \qquad (1.21)$$

и приведем интеграл к виду

$$F(x) = F_0\left(\frac{x - m_x}{S_x}\right) = F_0(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Z} \mathbf{exp}\left(-\frac{Z^2}{2}\right) dZ \ . \qquad (1.22)$$

(44)

Эта замена равноценна изменению масштаба в S_x раз и смещению функции (44) вдоль оси абсцисс на величину m_x таким образом, что осью симметрии графика дифференциальной функции станет ось ординат.

Функция (1.22) представляет собой интегральную функцию распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины с параметрами $m_x = 0$ и $S_x = 1$. Распределение с такими параметрами называется центрированным и нормированным.

Для нормально распределенной величины вероятность попадания в интервал $[m_x - S_x; m_x + S_x]$ составляет 0.6813, вероятность попадания в интервал $[m_x - 2S_x; m_x + 2S_x]$ равна 0.9544, а вероятность оказаться в интервале $[m_x - 3S_x; m_x + 3S_x]$ равна 0.9973 и есть величина, мало отличающаяся от единицы. Таким образом, с вероятностью 99.73% можно считать, что $m_x - 3S_x \le x \le m_x + 3S_x$.

1.3.4 Логарифмически нормальное распределение

Логарифмически нормальное распределение – это распределение вероятностей неотрицательной случайной величины x, логарифм которой распределен по нормальному закону. Область определения логарифмически нормального распределения – неотрицательные случайные величины, поэтому оно удовлетворяет физическому смыслу неотрицательных величин (например, наработке).

Логарифмически нормальным распределением хорошо описывается ресурс объектов по сопротивлению усталости, т.е. число циклов нагружения до разрушения объекта.

Дифференциальная функция (плотность вероятностей) логарифмически нормального распределения имеет вид (рис. 2.8)

$$f(x) = \frac{1}{xS_x\sqrt{2\pi}}\mathbf{exp}\left(-\frac{(\mathbf{ln}\,x - m_x)^2}{2S_x{}^2}\right), \qquad (1.23)$$

где m_x – математическое ожидание логарифма случайной величины x;

S_x – среднее квадратическое отклонение логарифма случайной величины x.

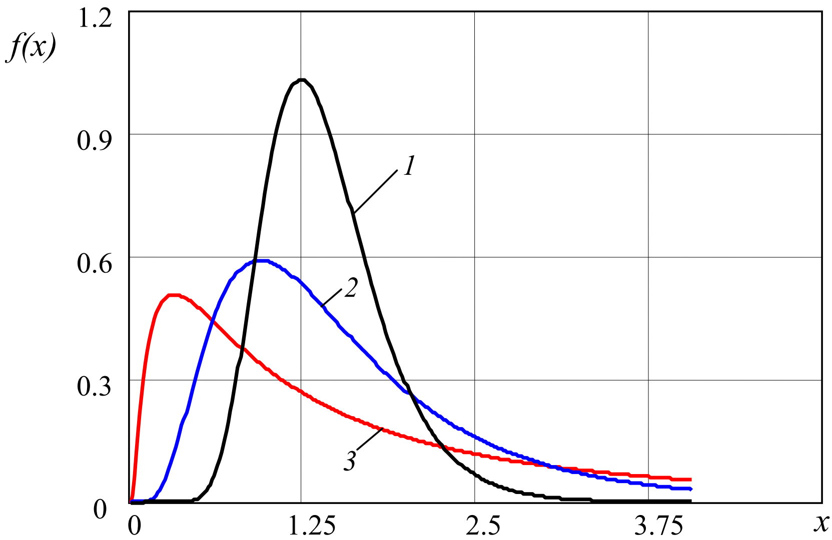


Рисунок 1.8 – Дифференциальная функция логарифмически нормального распределения.

1 – $m_x = 0.3$, $S_x = 0.3$, *2* – $m_x = 0.3$, $S_x = 0.6$, *3* – $m_x = 0.3$, $S_x = 1.2$.

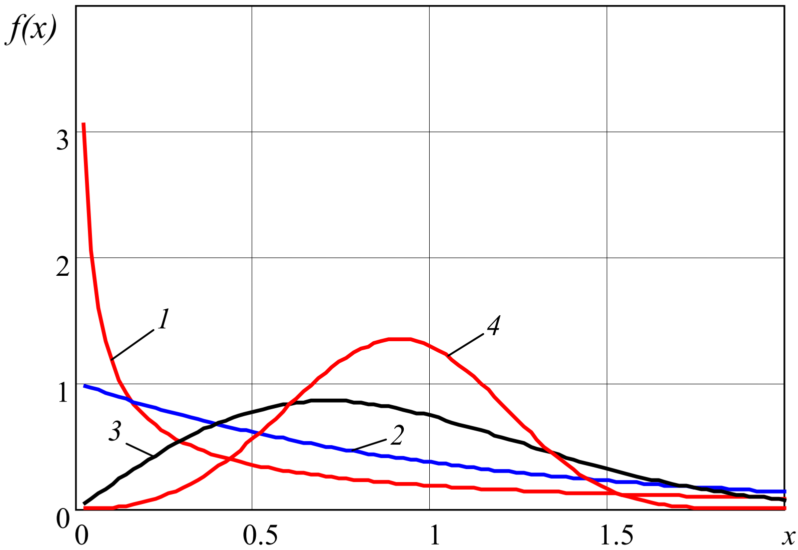


Рисунок 1.9– Дифференциальная функция распределения Вейбулла.
1 – $a = 1$, $b = 0.5$; *2* – $a = 1$, $b = 1$; *3* – $a = 1$, $b = 2$; *4* – $a = 1$, $b = 3.5$.

1.3.5 Распределение Вейбулла

В теории надежности используется для описания отказов объектов с монотонной интенсивностью. Оно может задаваться в двух- и трехпараметрической форме. Одна из двухпараметрических форм имеет вид

$$P(x) = \mathbf{exp}\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\right], \; f(x) = \frac{b}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{b-1} \mathbf{exp}\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^{b}\right], x \ge 0, \quad (1.24)$$

где $a > 0$ и $b > 0$ — параметры распределения (a – параметр масштаба, b – параметр формы).

Распределение Вейбулла обладает высокой гибкостью, заключающейся в радикальном изменении характера зависимости при изменении параметра формы b. Это позволяет адаптировать аналитические распределения к опытным данным. На рис. 2.9 представлены примеры распределения Вейбулла при $a = 1$.

Распределение Вейбулла довольно широко используется. По своим свойствам оно занимает промежуточное положение между нормальным и экспоненциальным распределениями. В частном случае (при $b = 1$) распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное, при этом параметр a будет математическим ожиданием случайной величины x.

Скорость изменения интенсивности определяется значением b. Эта особенность распределения позволяет использовать его для описания безотказности объектов в течение трех периодов их эксплуатации:

- приработки;
- нормальной эксплуатации;
- старения.

Распределение Вейбулла хорошо описывает ресурс и срок службы объектов. Например, распределению Вейбулла подчиняется ресурс:

- подшипника качения (b=1,4...1,5);
- зубчатых колес редукторов (b=1,4...1,8);
- зубчатых муфт (b=1,5);
- тормозных обкладок (b=1,4);
- тормозных шкивов (b=1,5);
- ходовых колес кранов (b=2,0);
- электронных ламп (b=1,4...1,6) и т.д.

1.4 Общие соотношения теории надежности

Как было показано , параметры надежности рассматриваются в статистической трактовке для оценивания состояния оборудования, и в вероятностной трактовке - для прогнозирования его состояния. Первые выражаются дискретными величинами, их в теории надежности, как и в теории вероятностей, называют *оценками.* При достаточно большом количестве испытаний их принимают за истинные характеристики надежности.

Рассмотрим результаты испытаний, проведенных для оценки надежности значительного числа N однотипных элементов (например, насосов, шнеков, матриц, прессов и т. п.). Пусть ко времени t (для каждого элемента, независимо от того, одновременно они эксплуатируются или нет) из N откажут *m элементов* и останется n работоспособных.

Тогда относительное количество отказавших элементов

$$Q(t) = \frac{m}{N}. \tag{1.25}$$

Если испытание проводится как выборочное (N мало), то $Q(t)$ рассматривается как статистическая оценка вероятности отказа; если же N велико - как *вероятность отказа.*

Вероятность безотказной работы (функция надежности) оценивается относительным количеством работоспособных элементов

$$P(t) = \frac{n}{N} = 1 - \frac{m}{N} \ . \qquad (1.26)$$

Из (1.25) и (1.26) следует, что

$$Q(t) + P(t) = 1 \ . \qquad (1.27)$$

Вид функций $Q(t)$ и $P(t)$ приведен на рисунке 1.5.

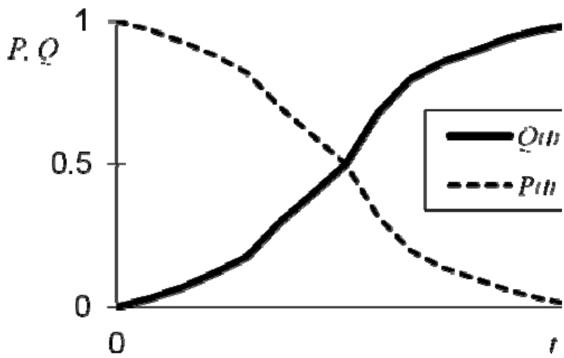
В расчетах предпочтение отдается такой характеристике распределения как *функция плотности распределения f(t) наработки до отказа.* В статистической трактовке

$$f(t) = \frac{\Delta m}{N \Delta t} = \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t} \ , \qquad (1.28)$$

в вероятностной трактовке

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt} \ . \qquad (1.29)$$

Здесь Δm - приращение числа отказавших объектов и $\Delta Q(t)$ - приращение вероятности отказов за время Δt. Графическое представление функций $f(t)$ дано на рисунке 1.11: линия 1 – непрерывная ("теоретическая"), линия 2 – дискретная (гистограмма).



1 - "вероятностная" трактовка;
2 - "статистическая" трактовка.

Рисунок 1.10 – Вероятность отказа $Q(t)$ и вероятность безотказной работы *P(t)*

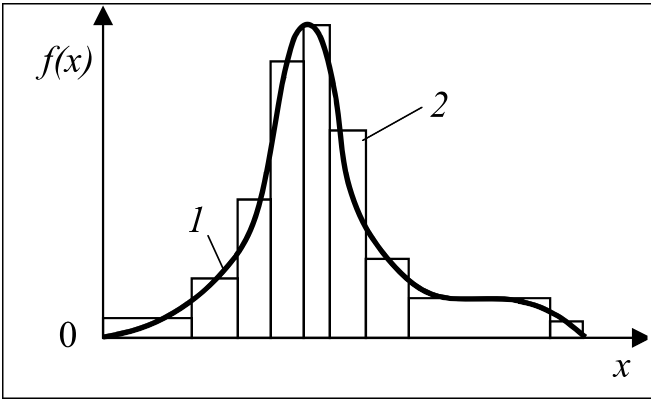


Рисунок 1.11 – Способы представления функции *f(t)*.

Воспользовавшись понятиями математического ожидания или среднего значения случайной величины, можно определить *среднее время наработки до отказа* - в вероятностной трактовке или среднее время безотказной работы - в статистической трактовке:

$$\overline{T} = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^1 tdQ(t) \; ;$$

$$\overline{T} = \sum_{j=1}^{J} t_j f_j(t)\Delta t_j = \sum_{j=1}^{J} t_j \Delta Q_j(t). \qquad (1.30)$$

Для невосстанавливаемых элементов значение m_t совпадает со *средним сроком службы* или долговечности.

Интенсивность отказов $\lambda(t)$, в отличие от плотности распределения, относится к числу элементов n, оставшихся работоспособными, а не к общему числу элементов, т. е. в статистической трактовке

$$\lambda(t) = \frac{\Delta m}{n\Delta t} \; , \qquad (1.31)$$

и в вероятностной

$$\lambda(t) = \frac{dm}{ndt} = \frac{dm}{ndt}\frac{N}{N} = \frac{f(t)}{P(t)}. \qquad (1.32)$$

Смысл понятия интенсивности отказов ясен из формулы (1.32)): произведение $\lambda(t)dt$ представляет собой вероятность отказа на промежутке времени $[t, t + dt]$ (событие В, вероятность которого равна $f(t)dt$) *при условии*, что до момента времени t отказ не произошел (событие А, вероятность

которого равна $P(t)$). Из теории вероятностей известно соотношение для вероятности произведения двух событий:
$P(\mathrm{AB}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B/A})$,
где $P(\mathrm{B/A})$ - вероятность события B, вычисленная в предположении, что имело место событие A (условная вероятность), откуда следует
$P(\mathrm{B/A}) = P(\mathrm{AB})/P(\mathrm{A})$.
Сравним это выражение с уравнением (1.32). Здесь $P(\mathrm{B/A})$ является аналогом вероятности $\lambda(t)dt$, $P(\mathrm{AB})$ - аналогом вероятности $f(t)dt$, $P(\mathrm{A})$ - аналогом $P(t)$.

Поучителен следующий пример. Пусть в 20-ти бросаниях монеты выпала "решка". Требуется вычислить вероятность появления "решки" в 21-м испытании. В данном примере испытания независимы. В случае очень большого числа испытаний частости появления "орла" и "решки" равны примерно 0,5. Несмотря на то, что выпадение "решки" в 20-ти испытаниях подряд является маловероятным событием: $P = 0{,}5^{20} \approx 10^{-6}$, в каждом отдельном (независимом !) испытании, в том числе 21-м, вероятность появления "решки" по-прежнему равна 0,5.

Найдем выражение для вероятности безотказной работы как функции интенсивности отказов. Для этого в уравнение (1.32) подставим соотношение

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d[1 - P(t)]}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt},$$

разделим переменные и произведем интегрирование:

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = -\lambda(t)dt; \quad \mathbf{ln}\, P(t) = -\int_0^t \lambda(t)dt;$$

$$P(t) = \mathbf{exp}\left(-\int_0^t \lambda(t)dt\right). \qquad (1.33)$$

Полученное соотношение играет важную роль в теории надежности. В частности, при $\lambda = \mathrm{const}$

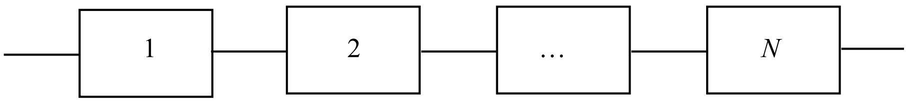
$$P(t) = \mathbf{exp}(-\lambda t). \qquad (1.34)$$

1.5 Надежность простых систем

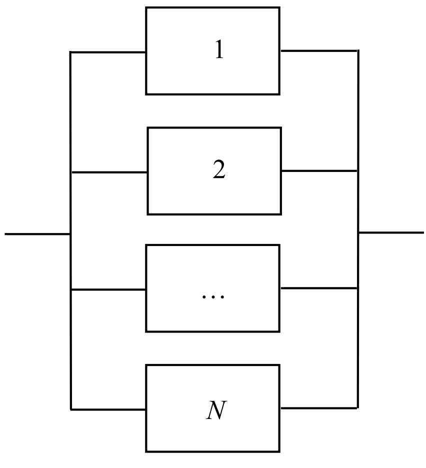
Простыми будем называть системы, которые могут быть представлены в виде совокупности элементов, соединенных параллельно или последовательно, без перекрестных связей.

Зависимость надежности систем от надежности ее элементов рассмотрим на примере простейших расчетных моделей, состоящих из N последовательно или параллельно соединенных элементов (Рисунок 1.12). В первом случае отказ любого элемента влечет за собой отказ всей системы (например, отказ любого из валов или подшипников редуктора приведет к его отказу), во втором - отказ системы происходит при отказе всех элементов. Будем считать при этом отказы элементов независимыми.

а



б



а - с последовательным соединением; *б* - с параллельным соединением.

Рисунок 1.12 - Расчетные модели систем.

Воспользуемся известной теоремой умножения вероятностей, согласно которой вероятность произведения, т. е. совместного проявления независимых событий, равна произведению вероятностей этих событий. Безотказная работа системы последовательно соединенных элементов является событием совместного проявления безотказности работы всех элементов; для системы параллельно соединенных элементов ее отказ является событием совместного проявления отказов всех элементов. Тогда вероятность безотказной работы системы:

- при последовательном соединении (система не откажет, если ***И*** первый ***И*** второй … ***И*** N-й элементы не откажут):

$$P_{посл}(t) = \prod_{i=1}^{N} P_i(t) \ , \qquad (1.35)$$

- при параллельном соединении (система откажет, если ***И*** первый ***И*** второй … ***И*** N-й элементы откажут):

$$Q_{пар}(t) = \prod_{i=1}^{N} Q_i(t) \, ,$$

откуда следует

$$P_{пар}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{N} Q_i(t) \ . \qquad (1.36)$$

Например, если система состоит из 5 элементов с вероятностью безотказной работы каждого 0,9, то в первом случае $P_{посл}(t) = 0{,}9^5 = 0{,}59$, а во втором $P_{пар}(t) = 1 - 0{,}1^5 = 0{,}99999$. Из этого примера нетрудно увидеть, какие преимущества дает параллельное подключение одинаковых элементов, которое называют *резервированием* (например, двойная система смазки компрессора, дублирование приборов). Заметим также, что в системе последовательно соединенных элементов вероятность безотказной ее работы ниже, чем у самого ненадежного элемента. Очевидно также, что для такой системы вероятность безотказной работы падает с увеличением общего их количества, а для системы с параллельным подключением - напротив, увеличивается.

Очевидно, что по уравнениям (1.35) и (1.36) можно рассчитать надежность более сложных систем, которые в результате декомпозиции сводятся к простым системам.

Вероятность безотказной работы иногда приходится определять для произвольного промежутка времени. По теореме умножения вероятностей
$P(T + \Delta t) = P(T) \cdot P(\Delta t/T)$,
тогда

$$P(\Delta t / T) = \frac{P(T + \Delta t)}{P(T)}, \qquad (1.37)$$

где $P(T)$ и $P(T + \Delta t)$ - вероятности безотказной работы за время T и $(T + \Delta t)$ соответственно;

$P(\Delta t/T)$ - условная вероятность безотказной работы за время Δt при условии, что изделия не отказали на интервале времени продолжительностью T.

1.6 Кривая интенсивности отказов. Период нормальной эксплуатации оборудования

На рисунке 1.13 представлена типичная кривая зависимости интенсивности отказов от времени.

В первый период времени (0 - t_1) отказы возникают в результате недоработок при сборке, пуске, как последствия неудовлетворительного хранения, транспортировки, монтажа и т. п., а также вследствие приработки отдельных деталей. Этот период крайне короткий, и, как правило, не учитывается в расчетах. Помимо этого, он может быть исключен при пусковых работах либо при обкатке на предприятии-производителе.

Период (t_1 - t_2) соответствует нормальной работе оборудования. В третьем периоде (t_2 - ∞) увеличение интенсивности отказов происходит за счет износа и усталостного разрушения деталей.

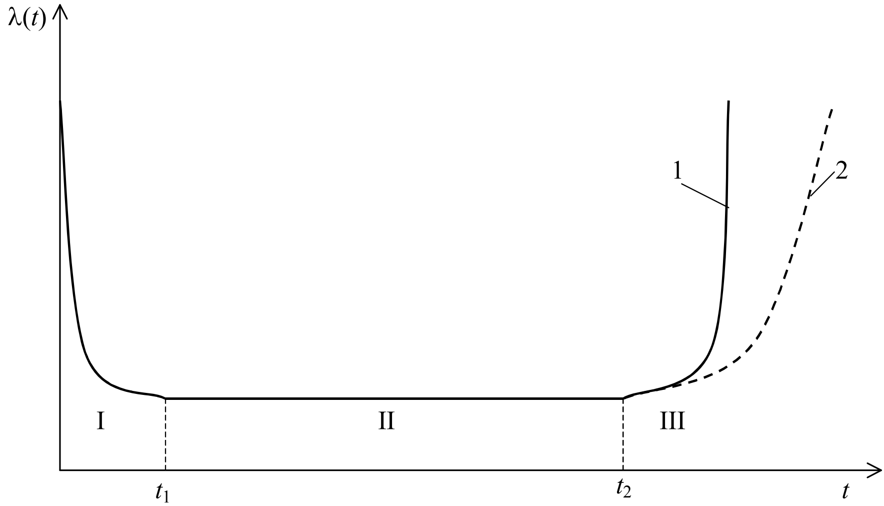
На рисунке 1.13 показаны два варианта зависимости $\lambda(t)$ в износовый период работы оборудования. Кривая 1 характеризует ситуацию, когда элементы оборудования имеют примерно одинаковое время наработки до отказа, что соответствует меньшему разбросу эксплуатационных характеристик оборудования по сравнению со случаем 2.

В период нормальной эксплуатации постепенные отказы, носящие износовый характер, еще не проявляются, и надежность характеризуется внезапными отказами. Эти отказы вызываются стечением многих случайных обстоятельств и поэтому имеют постоянную интенсивность, не зависящую от возраста изделия:

$\lambda(t) = \lambda = \text{const}.$

Если учесть, что $P(t) = \exp(-\lambda t)$, и

$Q(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$; $dQ(t) = -d(\exp(-\lambda t))$,



I - период приработки, II - период нормальной эксплуатации,
III - период катастрофического износа.

Рисунок 1.13 - Характерная U-образная кривая интенсивности отказов.

то интегрированием по частям можно получить среднюю наработку до отказа

$$\overline{T} = \int_0^1 t dQ(t) = -\int_0^\infty t d\left(\mathbf{exp}(-\lambda t)\right) = \frac{1}{\lambda} \ ; \qquad \text{или}$$

$$\lambda = \frac{1}{\overline{\overline{T}}} \ , \qquad (1.38)$$

т. е. λ выражается числом отказов в единицу времени и составляет, как правило, малую дробь.

При выводе выражения (1.38) выполнено интегрирование по частям:

$$u = t\mathbf{;}\ dv = dQ = -d\left(e^{-\lambda t}\right)\mathbf{;}\ v = -e^{-\lambda t}\mathbf{;}\ du = dt\ ,$$

откуда следует

$$\overline{T} = -e^{-\lambda t}t\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}dt = \frac{0}{e^0} - \frac{\infty}{e^{\infty}} - \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\infty} - e^0\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Значения вероятности безотказной работы в зависимости от произведения $t{\cdot}\lambda = t/\overline{T}$ показаны в таблице 2.1. Здесь уместно вспомнить разложение в степенной ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

откуда видно, что при $t{\cdot}\lambda << 1$ справедливо $P(t) \approx 1 - t{\cdot}\lambda$.

Так, при $t{\cdot}\lambda = 1$, $P(t) \approx 0{,}37$, т. е. 63% отказов возникает за время $t < \overline{T}$, и только 37% - позднее. Из приведенных в таблице значений следует, что для обеспечения высокой вероятности безотказной работы (0,9 или 0,99) следует использовать только малую долю среднего срока службы (соответственно 0,1 или 0,01).

Таблица 1.1 – Некоторые значения $P(t)$ для экспоненциального закона (см. формулу (1.34))

$\lambda{\cdot}t$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$P(t)$	0,368	0,9	0,99	0,999	0,9999

Если работа изделия происходит на разных режимах, которым соответствуют и разные интенсивности отказов λ_1 (за время t_1) и λ_2 (за время t_2), то согласно теореме умножения вероятностей вероятность безотказной работы на интервале $[0; t_1 + t_2]$ равна

$$P(t) = \exp\{-(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)\}\ . \qquad (1.39)$$

Вероятность безотказной работы системы последовательно соединенных элементов, надежность которых подчиняется экспоненциальному закону, определяется с учетом (1.35) и

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{N} P_i(t) = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{exp}\left(-\int_0^t \lambda_i(t)dt\right) = \mathbf{exp}\left(-\sum_{i=1}^{N}\int_0^t \lambda_i(t)dt\right),$$

(1.40)

Для равнонадежных элементов вероятности безотказной работы системы при
$P_i\ (t) = P(t)$ и $\lambda_i(t) = \lambda(t)$

$P_c(t)= P^N(t) =$

$$\exp[-N\int_0^t \lambda(t)dt\,].\ P_c(t) = P^N(t) = \mathbf{exp}\left(-N\int_0^t \lambda_i(t)dt\right), \qquad (1.41)$$

Из формул (1.40) – (1.41) следует:

1. Вероятность безотказности системы уменьшается с увеличением числа последовательно соединенных элементов. Следовательно, при разработке объекта необходимо стремиться к возможно меньшему числу последовательно соединенных элементов.
2. Вероятность безотказности работы системы всегда меньше вероятности безотказности работы наименее надежного элемента. Следовательно, при разработке объекта необходимо выявлять наименее надежный элемент и повышать вероятность его безотказной работы.

Из формулы (1.40) следует, что интенсивность отказов системы в момент времени t равна сумме интенсивностей отказов составляющих ее элементов при любых распределениях вероятностей наработки на отказ элементов системы:

$$\lambda_c(t) = \sum_{i=1}^{N}\int_0^t \lambda_i(t)dt\ . \qquad (1.42)$$

Безотказность объектов при последовательном соединении элементов в период нормальной эксплуатации при внезапных отказах, когда явления старения и изнашивания объекта настолько слабо выражены, что ими можно пренебречь, является результатом воздействия многих случайных факторов при неизменных внешних условиях. Поэтому внезапные отказы в период нормальной эксплуатации имеют постоянную интенсивность $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$.

при экспоненциальном распределении

Из формулы (31) следует, что длительность безотказной работы системы из последовательно соединенных элементов с интенсивностью отказов $\lambda_i(t) = \lambda = \text{const}$ также описывается экспоненциальным распределением с интенсивностью отказов λ_c, равной сумме интенсивностей λ_i отказов элементов:

$$\lambda_c = \sum_{i=1}^{N}\lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i + \ldots + \lambda_N. \quad (1.43)$$

В этом случае среднее время безотказной работы системы

$$T_{ср.с}=\int_0^\infty P_c(t)dt=\int_0^\infty \exp(-\lambda_c t)dt=\frac{1}{\lambda_c}=\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\right)^{-1}=\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{T_{ср.i}}\right)^{-1}, \quad (1.44)$$

где $T_{ср.i}$ – среднее время безотказной работы i-го элемента.

Для однотипных элементов при $\lambda=\lambda_i$ и $T_{ср.i}=T_{ср}$ из формул (1.43) и (1.44) следует:

$\lambda_c=N\lambda$, $T_{ср.i}=T_{ср.i}/N$.

Таким образом, интенсивность отказов системы в N раз больше интенсивности отказов одного элемента, а среднее время безотказной работы системы в N раз меньше среднего времени безотказной работы одного элемента.

1.6 Период износовых (постепенных) отказов

В связи с многообразием причин и условий возникновения отказов в этот период для описания надежности применяют различные законы распределения наработки t, которые устанавливают путем аппроксимации результатов испытаний или наблюдений в эксплуатации. Помимо экспоненциального закона чаще всего используют нормальное распределение, логарифмически нормальное распределение и распределение Вейбулла.

Наиболее широко в практических расчетах применяется *нормальное распределение* (другие названия – распределение Гаусса, функция ошибок).

Распределение всегда подчиняется нормальному закону, если на изменение случайной величины оказывает влияние большое число примерно равноценных факторов (центральная предельная теорема, установленная А. М. Ляпуновым).

Плотность нормального распределения описывается соотношением

$$f(t)=\frac{1}{S\sqrt{2\pi}}\mathbf{exp}\left(-\frac{(t-m_t)^2}{2S^2}\right). \quad (1.45)$$

Распределение имеет два независимых параметра — m_t и S, которые оцениваются по результатам испытаний согласно выражениям:

$$m_t\approx\bar{t}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}t_i; \quad (1.46)$$

$$S \approx \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(t_i - \bar{t}\right)^2} \quad . \qquad (1.47)$$

Заметим, что в соотношении (1.47) сумма квадратов отклонений делится не на число испытаний N, а на величину ($N-1$), так как одна из степеней свободы была использована при расчете среднего значения по уравнению (1.46). Уравнение (1.47) дает *несмещенную оценку* среднего квадратического отклонения.

На рисунке 1.14 показаны зависимости $f(t)$ для различных значений S. Несмотря на то, что $f(t)$ начинается от $t = -\infty$ и заканчивается в области $t = +\infty$, это не является существенным недостатком, особенно если $m_t \geq 3S$, поскольку площадь под кривой $f(t)$, отсекаемая вертикальными линиями (см. Рисунок 1.14), проведенными через точки $m_t \pm 3S$, составляет 99,73%, т. е. вероятность попадания за пределы шестисигмового диапазона равна всего 0,27%, и ею во многих случаях можно пренебречь.

В расчетах часто используют *нормированное нормальное распределение*

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathbf{exp}\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad (1.48)$$

в котором только одна переменная x. Величина x является *центрированной*, так как $m_x = 0$ и *нормированной*, поскольку $S_x = 1$. Величину x, связанную с m_t и S соотношением

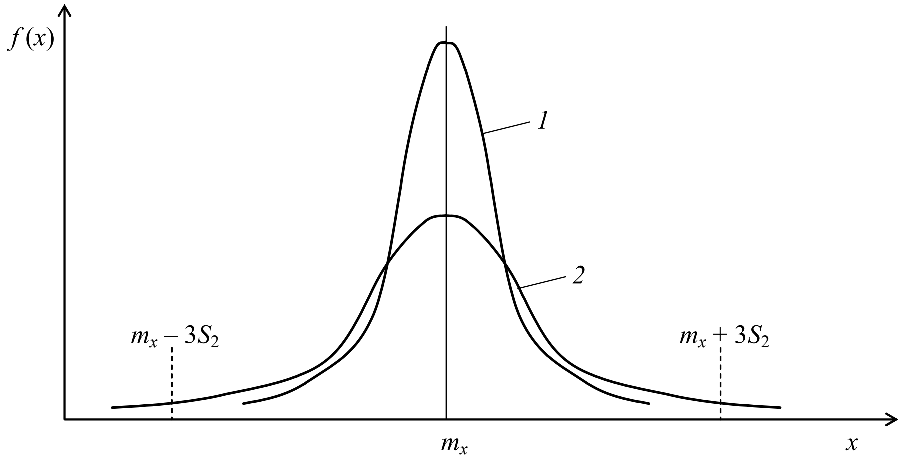
$$x = \frac{t - m_t}{S} \equiv u_p\,, \qquad (1.49)$$

называют *квантилью нормированного нормального распределения*.

В общем случае плотность распределения отказов определяют в виде

$$f(t) = \frac{f_0(t)}{S} = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}}\,\mathbf{exp}\left(-\frac{t^2}{2}\right). \qquad (1.50)$$

Значения вероятности в зависимости от квантили даны в литературе [13,14,16,18] (см. Приложение 1); некоторые характерные значения приведены в таблице 2.2.



Площадь под кривой 2, отсекаемая пунктирными линиями, составляет 99,73%.
Рисунок 1.14 — Вид нормального распределения для различных значений среднего квадратического отклонения. $S_1 < S_2$.

Таблица 1.2 – Зависимость надежности P от квантили u_p для нормального закона распределения.

u_p	0	–1,282	–1,645	–2,326	–3,09	–3,719
$P(t)$	0,5	0,90	0,95	0,99	0,999	0,9999

Пример 2.2. Отказы устройства смыкания формы литьевой машины описываются нормальным законом с параметрами $\overline{T}$ = 7 лет и S = 1 год. В течение какой наработки вероятность отказа составит не более 5%?

Решение. При вероятности отказа 5% вероятность безотказной работы составит 95%. Из таблицы 2.2 находим соответствующую квантиль $u_p = -1{,}645$. По формуле (1.49) находим искомую наработку $t = \overline{T} + u_p S = 7 — 1{,}645 \cdot 1 = 5{,}355$ лет. Сравнительно малое отличие полученной наработки от среднего времени наработки до отказа связано с малым значением коэффициента вариации: $V = S/\overline{T}$ = 1/7 = 0,166.

Для более точных расчетов надежности, в частности, при больших значениях коэффициентов вариации, применяют *усеченное нормальное распределение*, которое получается из нормального при ограничении интервала изменения случайной величины.

Другим распространенным распределением является *логарифмически нормальное распределение.* Оно описывает случайную величину, логарифм которой распределен по нормальному закону:

$$f(t) = \frac{1}{tS\sqrt{2\pi}}\,\mathbf{exp}\left(-\frac{(\mathbf{ln}\,t - a)^2}{2S^2}\right), \qquad (1.51)$$

где a —математическое ожидание логарифма наработки до отказа t;

S — среднее квадратическое отклонение логарифма наработки до отказа t.

В силу свойств логарифма величина t может принимать только положительные значения. Поэтому соотношение (1.50) особенно рекомендуется для описания плотности вероятности отказов при большом коэффициенте вариации.

Определение вероятности отказов, плотность распределения которых подчиняется уравнению (1.50), упрощается путем подстановки

$$u_p = \frac{\mathbf{ln}\,t - a}{S}, \qquad (1.52)$$

приводящей уравнение (1.51) к нормальному закону, и последующего использования таблиц нормального распределения (см. Приложение 1).

Пример 2.3. Ресурс вальцев описывается логарифмически нормальным законом с параметрами: a = 12,7 и S = 2. Найти вероятность отказа вальцев в течение $t = 10^4$ ч работы вальцев.

Решение. При заданных параметрах по формуле (1.52) находим значения квантили, соответствующей наработке 10^4 ч: $u_p = (\mathbf{ln}10^4 - 12{,}7)/2 = -1{,}745$. По таблице Приложения 1 путем линейной интерполяции находим вероятность безотказной работы $P(t = 10^4\text{ ч}) \approx 0{,}9595$, а затем – вероятность отказа $Q = 1 - P \approx 0{,}041$. (При использовании средств Mathcad вероятность отказа можно найти с помощью встроенных функций pnorm для нормального и plnorm – для логарифмического нормального распределения).

Распределение Вейбулла, обладающее большей гибкостью, путем варьирования параметров позволяет аппроксимировать скудные данные анализа надежности объектов химической промышленности. Вероятность безотказной работы, описываемая законом распределения Вейбулла, задается выражением

$$P(t) = \mathbf{exp}\left(-at^{b}\right), \tag{1.53}$$

где a и b — параметры распределения (a — параметр масштаба, b — параметр формы). Универсальность распределения Вейбулла состоит в том, что путем выбора соответствующих параметров a и b можно легко обобщить результаты испытаний по надежности объектов различных типов

1.7 Совместное действие внезапных и постепенных отказов

Рассмотрим совместное действие внезапных и постепенных (износовых) отказов, имеющее место на втором и третьем этапах эксплуатации оборудования. Поскольку эти отказы можно считать независимыми друг от друга, то

$$P(t) = P_{\text{В}}(t) \cdot P_{\text{П}}(t), \tag{1.54}$$

где $P_{\text{В}}(t)$, $P_{\text{П}}(t)$ — вероятность отсутствия соответственно внезапных и постепенных отказов.

Если изделие отработало без отказов время T, и нас интересует вероятность безотказной работы на промежутке времени $\Delta t = [T,\ T + \Delta t]$, то

$P_В(t) = \exp(-\lambda\Delta t)$,

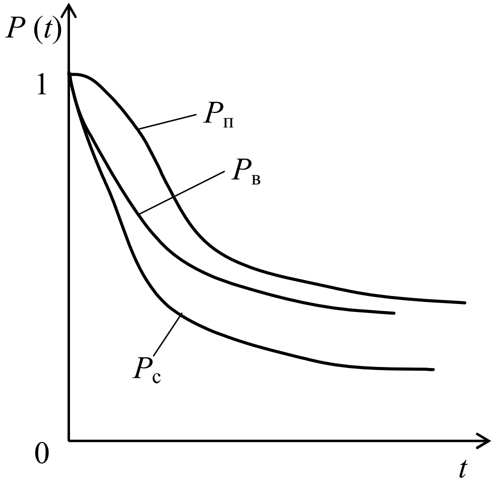


Рисунок 1.15 — Функция надежности $P_с$ при совместном действии внезапных ($P_в$) и постепенных ($P_п$) отказов.

$P_П(\Delta t) = P_П(T + \Delta t)/P_П(T)$

Для новых изделий $T = 0$ и $P_П(T) = 1$.

Для системы последовательно соединенных элементов согласно выражению

$$P_c(t) = \mathbf{exp}\left(-t\sum_i \lambda_i\right)\prod_i P_{\text{П}i}(t)\ , \qquad (1.55)$$

где i — номер элемента.

На рисунке 1.15 показаны кривые надежности внезапных и постепенных отказов, а также кривая вероятности безотказной работы при их совместном действии. Вначале, когда интенсивность постепенных отказов низка, кривая $P(t)$ мало отличается от кривой $P_В(t)$, а потом резко снижается.

В период постепенных (износовых) отказов их интенсивность, как правило, во много раз выше, чем внезапных.

1.8 Надежность восстанавливаемых изделий

До сих пор мы рассматривали ситуации с изделиями невосстанавливаемыми. У восстанавливаемых изделий помимо первичных отказов еще существуют и повторные. Однако все термины и закономерности отказов невосстанавливаемых изделий можно распространить на первичные отказы восстанавливаемых.

1.9.1. Поток событий

В эксплуатации любых объектов наблюдаются следующие периоды:

- работа;
- восстановление работоспособности после отказа;
- техническое обслуживание;
- перерыв в работе или простой по организационным причинам.

Наглядное представление о надежности объекта дает временная диаграмма его эксплуатации (рис. 2.16 *а*).

Длительность интервалов времени каждого периода является случайной величиной. Временная диаграмма, несмотря не простоту, содержит обширную информацию о надежности объекта:

- при коротких интервалах (Р) объект имеет низкую безотказность;
- при длинных интервалах (В) и (ТО) изделие имеет низкую ремонтопригодность и эксплуатационную технологичность;
- большая суммарная протяженность интервалов (Р) свидетельствует о высокой долговечности.

Для оценки безотказности и ремонтопригодности применяют:

1) модель эксплуатации объекта при мгновенном восстановлении работоспособности;
2) модель восстановления работоспособности объекта.

Модель эксплуатации объекта при мгновенном восстановлении работоспособности используется для оценки безотказности и учитывает только интервалы его работы. Временная диаграмма этой модели эксплуатации (рис. 2.16 *б*) содержит только следующие друг за другом интервалы работы и получается из временной диаграммы эксплуатации объекта в общем случае (рис. 2.16 *а*) за исключением периодов (В), (ТО) и (П). Наработка между отказами, являющаяся суммой многих периодов работы, соответствует ресурсу отказавшего элемента и является случайной величиной.

Модель восстановления работоспособности объекта используют для оценки ремонтопригодности и учитывает только интервалы восстановления его работоспособности (В). Временная диаграмма этой модели (рис. 2.16 *г*) содержит только следующие друг за другом интервалы (В) и получается из временной эксплуатации в общем случае за исключением периодов работы (Р), (ТО) и (П). Длительность каждого интервала времени восстановления работоспособности объекта является случайной величиной.

Поток событий – последовательность событий, происходящих одно за другим в некоторые моменты времени. В моделях (1) и (2) потоками событий являются поток отказов объекта и поток восстановлений работоспособности объекта.

Для системы эксплуатации типичным является случайный поток событий, в котором события следуют одно за другим в случайные моменты времени.

События, которые образуют поток, в общем случае могут быть различными (например, отказы и восстановления работоспособности в системе эксплуатации).

Будем рассматривать потоки однородных событий, различающихся лишь моментами появления. Такими потоками в системе эксплуатации являются:

- поток отказов (рис. 2.16 *в*);
- поток восстановления работоспособности (рис. 2.16 *д*).

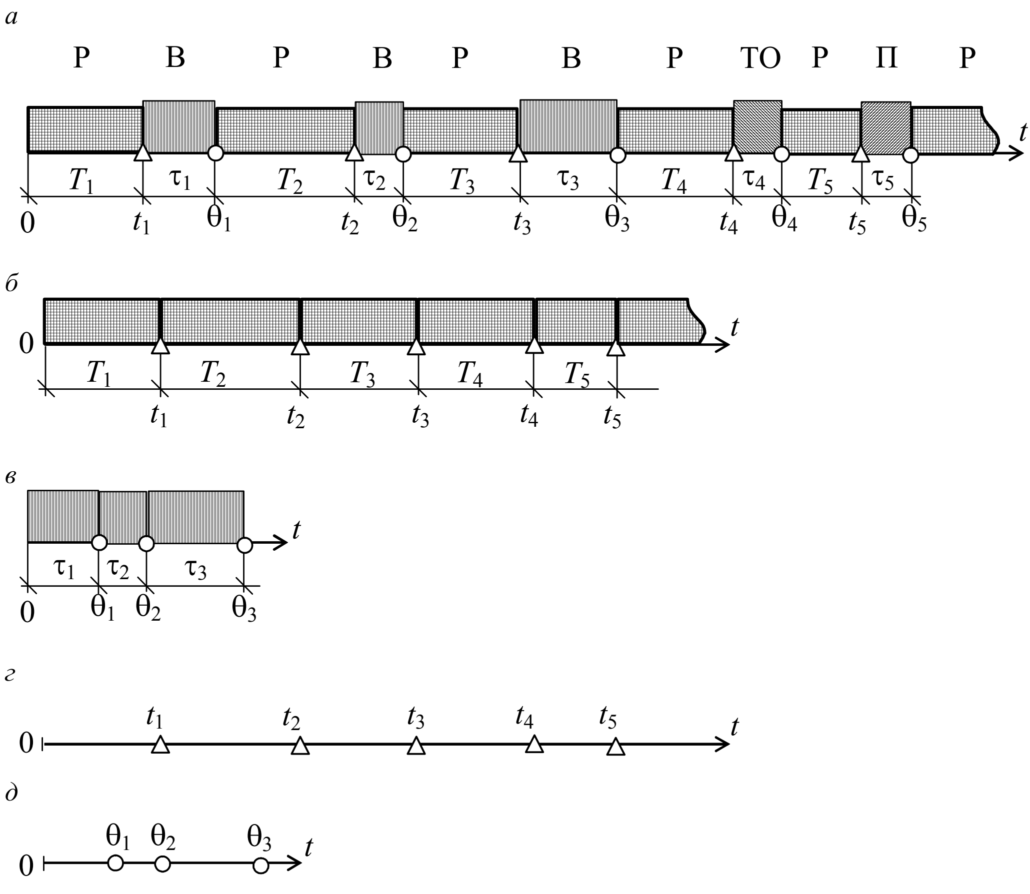
Поток однородных событий наглядно изображается последовательностью точек с абсциссами t_1, t_2, t_i или $\theta_1, \theta_2, \theta_i$ на числовой оси времени, соответствующими моментам появления событий (см. рис. 2.16, *в*, *д*) с интервалами между ними: $T_1 = t_1 - 0$; $T_2 = t_2 - t_1$; $T_i = t_i - t_{i-1}$ (отказы) или $\tau_1 = \theta_1 - 0$; $\tau_2 = \theta_2 - \theta_1$; $\tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}$ (восстановление). Поток событий при вероятностном описании можно представить как последовательность случайных величин: $t_1 = T_1$, $t_2 = T_1 + T_2$, $t_3 = T_1 + T_2 + T_3$ (для отказов) или $\theta_1 = \tau_1$, $\theta_2 = \tau_1 + \tau_2$, $\theta_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ (для восстановлений) На рис. 2.16 изображена одна из конкретных реализаций случайного потока.

Свойства потоков: 1) стационарность, 2) отсутствие последействия и 3) ординарность.

1. Свойство стационарности состоит в том, что вероятность появления *n* событий на любом интервале времени зависит только от числа *n* событий и от длительности *t* интервала времени, но не зависит от начала его отсчета. Стационарный поток имеет постоянную интенсивность $\lambda(t)$.

2. Свойство отсутствия последействия состоит в том, что вероятность появления *n* событий на любом интервале времени не зависит от числа событий на предшествующих интервалах времени, т.е. предыстория потока не влияет на вероятность появления событий в ближайшем будущем. Практически это означает, что события, образующие поток, появляются независимо друг от друга.

3. Свойство ординарности состоит в том, что вероятность появления более



Р – периоды работы; В – восстановление работоспособности (ремонты); ТО – техническое обслуживание; П – перерывы в работе. треугольники – моменты времени отказов, кружочки – моменты времени восстановления работоспособности.

Рисунок 1.16 — Временные диаграммы эксплуатации, работы и восстановления объекта: *а* – диаграмма эксплуатации, *б* – модель эксплуатации при мгновенном восстановлении работоспособности (диаграмма работы); *в* – модель восстановления работоспособности; *г* – поток отказов; *д* – поток восстановления работоспособности.

одного события на элементарном интервале t времени очень мала по сравнению с вероятностью появления только одного события или появление более одного события за малый промежуток времени практически невозможно. Таким образом, свойство ординарности означает, что события в потоке появляются поодиночке, а не группами по два, по три и т.д.

Далее рассмотрим характеристики потока событий.

1.9.2. Наработка на отказ

Итак, пронумерованная последовательность случайных моментов отказов (t_1, t_2, … на рисунке 1.16 *б*) образует так называемый *поток отказов*.

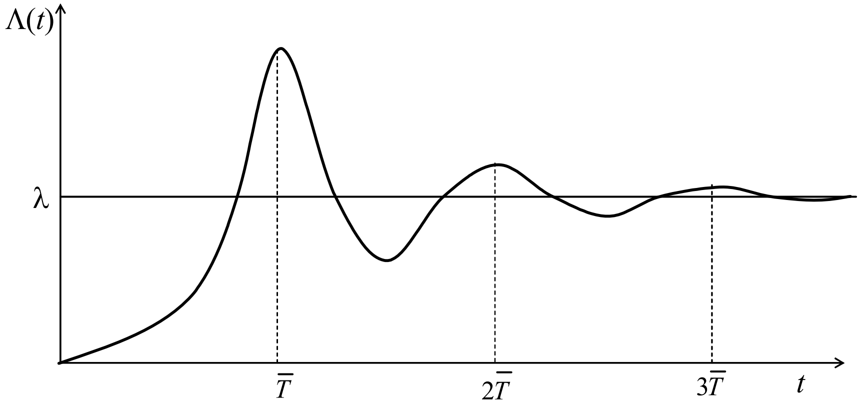


Рисунок 1.17 — График частоты отказа объектов с последовательной заменой после отказа.

Число отказов изделия $m(t)$ за время t от начала эксплуатации представляет собой дискретную случайную величину с возможными значениями 0, 1, 2, … . Закон распределения величины $m(t)$ обычно не определен, и его статистические характеристики заранее не известны.

Рассмотрим величину $\overline{m}(t)$ — *среднее по ансамблю*[*] *число отказов за время работы* t:

---

[*]здесь под ансамблем (точнее, ансамблем Дж. У. Гиббса) будем понимать очень большое количество идентичных объектов,

$$\overline{m}(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i(t) , \qquad (1.56)$$

где N — число испытуемых изделий в ансамбле.

Можно ожидать, что для каждого изделия среднее число отказов совпадает со средним числом отказов по ансамблю, рассчитанному по формуле (1.56). Тогда *средняя наработка на отказ* равна

$$\overline{T} = t/\overline{m}(t) . \qquad (1.57)$$

Величина $\overline{T}$ определяет среднюю продолжительность периодов безотказной работы на графике эксплуатации изделий. Из соотношения (1.57) видно, что она является функцией суммарной наработки. Поэтому всякий раз следует указывать, к какому периоду эксплуатации изделия относится значение $\overline{T}$.

Из выражения (1.57) видно, что длительность периодов безотказной работы будет постоянной, если только $\overline{m}(t)$ пропорционально t. Если же $\overline{m}(t)$ растет быстрее, чем t, то длительность периодов безотказной работы сокращается, и наоборот. Таким образом, степень возрастания функции $\overline{m}(t)$ определяет поведение одной из статистических характеристик потока отказов — $\overline{T}$.

Другой важной характеристикой является *параметр потока отказов*

$$\Lambda(t) = \frac{d\overline{m}(t)}{dt} . \qquad (1.58)$$

Смысл этой статистической характеристики легко увидеть из разностной формулировки

$$\Lambda(t) = \frac{\Delta\overline{m}(t)}{\Delta t} , \qquad (1.59)$$

находящихся в абсолютно одинаковых условиях функционирования [10].

где $\Delta\overline{m}(t)$ — приращение среднего числа отказов на интервале $[t;\ t+\Delta t]$, т. е. $\Lambda(t)$ характеризует среднее число отказов, ожидаемых в малом интервале времени.

Как известно, *при внезапных отказах* изделия закон распределения наработки до отказа экспоненциальный с интенсивностью λ. Для восстанавливаемых изделий (изделие при отказе заменяют новым) через некоторое время от начала эксплуатации (по окончанию периода приработки) образуется поток отказов, параметр которого $\Lambda(t)$ не зависит от t, т. е. $\Lambda(t) = \Lambda = \text{const}$, и равен интенсивности λ.

Действительно, интенсивность отказов в разностной формулировке равна

$$\lambda(t) = \frac{\Delta m}{n\Delta t}\ ,$$

но для восстанавливаемых изделий число работоспособных изделий $n = N = \text{const}$, т. е.

$$\lambda(t) = \frac{\Delta m}{N\Delta t} = \frac{\Delta\overline{m}}{\Delta t} = \Lambda(t).$$

Поток *постепенных (износовых) отказов* становится стационарным при наработке t, значительно превышающей среднее значение $\overline{T}$. Так, при нормальном распределении наработки до отказа интенсивность отказов возрастает монотонно, а параметр потока отказов $\Lambda(\mathrm{t})$ сначала возрастает, потом начинаются колебания, которые затухают на уровне $\lambda = 1/\overline{T}$ (Рисунок 1.17), т. е. стабилизируются. Для стационарного потока отказов $\Lambda = 1/\overline{T}$

Наблюдаемые максимумы $\Lambda(t)$ соответствуют средней наработке на отказ после первой, второй, третьей и т. д. замены отказавших элементов. Первый максимум — самый высокий, так как при малой дисперсии функции распределения отказов первый отказ у всех изделий ансамбля происходит в достаточно узком временном интервале вблизи момента времени $\overline{T}$. Время второго отказа каждого из изделий ансамбля определяется уже дисперсией и первого отказа и второго, и т. д. Поэтому по мере увеличения наработки t происходит постепенное снижение высоты максимумов $\Lambda(t)$.

При совместном действии внезапных и постепенных отказов параметры потоков отказов складываются.

В сложных изделиях (системах) $\Lambda(t)$ рассматривается как сумма параметров потока отказов элементов:

$$\Lambda(t) = \Lambda_1(t) + \Lambda_2(t) + \Lambda_3(t) + \ldots \qquad (1.60)$$

Вероятность безотказной работы от момента T до $(T + t)$ подчиняется экспоненциальному закону:

$$P(t) = \mathbf{exp}\,(-\Lambda t)\,. \qquad (1.61)$$

Для системы, состоящей из последовательно соединенных элементов

$$P_c(t) = \mathbf{exp}\left(-t\sum_i \Lambda_i\right). \qquad (1.62)$$

Важнейшими комплексными показателями надежности восстанавливаемого изделия являются *коэффициент технического использования*

$$\eta = \frac{\overline{T}}{\overline{T} + \overline{T}_{\text{п}} + \overline{T}_{\text{р}}}\,,$$

а также *коэффициент готовности*

$$K_{\Gamma} = \frac{\overline{T}}{\overline{T} + \overline{T}_{\text{р}}}\,,$$

где $\overline{T}$, $\overline{T}_{\text{п}}$, $\overline{T}_{\text{р}}$ — средние значения наработки на отказ, простоя и ремонта.

1.9 Надежность систем с резервированием

Для достижения высокой надежности ХТС конструктивных, технологических и эксплуатационных мероприятий может оказаться недостаточно, и тогда приходится вводить в систему элементы *избыточности*. Под избыточностью понимают дополнительные технические средства и возможности сверх тех, которые необходимы для выполнения объектом заданных функций. Введение избыточности часто называют *резервированием*. Различают пять видов резервирования: информационное, функциональное, нагрузочное, временное и структурное [17, 19].

Информационная избыточность предполагает многократное дублирование сообщений или каналов передачи данных.

Функциональная избыточность заключается в применении оборудования, которое может выполнять более одной функции или одну функцию, но для различных рабочих сред путем несложной настройки. Например, литьевая машина для термопластов может быть легко настроена на различные виды сырья путем изменения температуры, частоты вращения червяков и т. п.

Нагрузочное резервирование предусматривает создание избыточности по критериям работоспособности (прочности, жесткости, устойчивости, герметичности, износостойкости и т. п.) путем выбора завышенных значений коэффициентов запаса.

Временное резервирование предполагает использование в технологической линии промежуточных емкостей (резервуаров и бункеров), предназначенных для накопления продукта между отдельными машинами ХТС. Это позволяет некоторое время продолжать работу системы при отказе части оборудования, расположенной до промежуточной емкости.

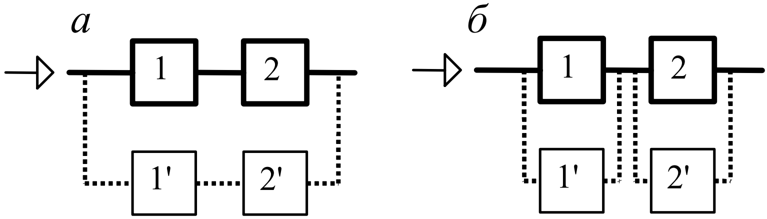
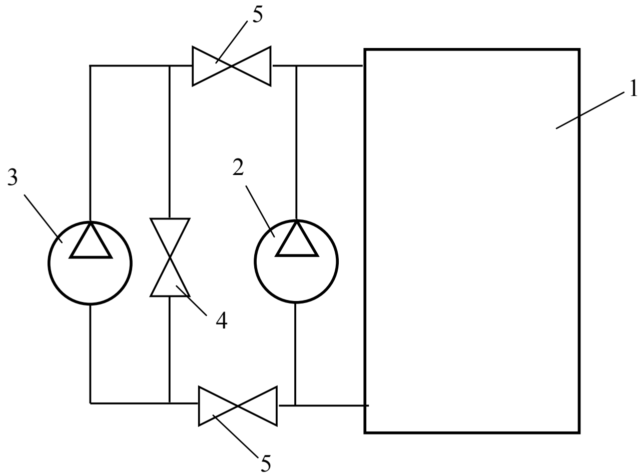


Рисунок 1.18 — Блок-схема общего (а) и раздельного (б) резервирования.



1 — смазываемый агрегат;
2 — основной насос;
2 - Резервный насос; 4 — байпасный вентиль в холостой линии;
5—клапаны включения резервного насоса.

Рисунок 1.19 — Пример постоянного резервирования.

Структурное резервирование состоит во введении в функциональную систему ХТС дополнительных (резервных) машин, выполняющих функции основного оборудования в случае его отказа. Этот вид резервирования позволяет уменьшить вероятность отказов системы на несколько порядков.

Принцип структурного резервирования основан на применении в ХТС параллельно соединенных по свойству надежности элементов. Как было показано вероятность безотказной работы такой системы выше вероятности безотказной работы ее элементов.

Существует несколько способов структурного резервирования, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. При *общем резервировании* резервируется вся ХТС в целом, и при отказе любого из ее элементов включается резервная ХТС (Рисунок 1.18, *а*). При *раздельном резервировании* резервируются отдельные элементы (Рисунок 1.18, *б*). Можно доказать, что раздельное резервирование обеспечивает больший выигрыш в надежности, чем общее (см. ниже).

Постоянным ("горячим") называют такое резервирование, при котором резервные элементы присоединены к основным в течение всего времени работы, т. е. всегда находятся в рабочем состоянии. Пример — резервный масляный насос в системе смазки машины, работающий в холостой циркуляционной линии (Рисунок 1.19); при отказе основного насоса резервный автоматически включается в рабочую линию смазки. "Горячий" резерв используют в тех случаях, когда даже кратковременное прекращение работы оборудования не допустимо. Ресурс резервных аппаратов начинает расходоваться одновременно с ресурсом основных, что является серьезным недостатком постоянного резервирования.

Этого недостатка лишен способ резервирования *замещением*, когда резервный элемент вступает в работу только после отказа основного. При этом различают два вида нагружения резерва. Первый — *облегченный* (*"теплый"*) — характеризуется облегченными условиями работы резервного элемента (например, тот же резервный масляный насос в системе смазки работает, но с пониженной производительностью). Второй вид характеризуется полным отсутствием какого-либо воздействия на резервный элемент, и тогда говорят о *ненагруженном* (*"холодном"*) резерве (в рассматриваемом примере шестерни резервного масляного насоса не вращаются, и он отключен клапанами от линии смазки).

Разновидностью резервирования замещением является так называемый *скользящий резерв*, когда некоторое число резервных элементов может заменять любой основной элемент. Очевидно, такой способ применим, только если ХТС состоит из одинаковых элементов. Например, в ХТС используется 5 одинаковых экструдеров, из которых 2 резервных. При отказе любого из основных экструдеров включается один из резервных, становясь основным. Если и он откажет, включается второй резервный экструдер.

Отношение числа резервных элементов к числу основных называется *кратностью резервирования*. Однократное резервирование называется *дублированием*. Кратность резервирования может быть и дробной. В рассмотренном примере о скользящем резерве она равна 2/3.

Перейдем к расчетным соотношениям для определения надежности резервированных систем.

Расчет надежности резервированных систем

Сравним эффективность общего и раздельного резервирования на примере системы, состоящей из двух основных элементов и двух резервных (Рисунок 1.13). Из формулы (1.11) следует, что для системы двух параллельно соединенных элементов вероятность безотказной работы равна

$$P_{пар}(t) = 1 - Q_1(t)\cdot Q_2(t) = 1 - \left(1 - P_1(t)\right)\left(1 - P_2(t)\right) = P_1(t) + P_2(t) - P_1(t)\cdot P_2(t). \qquad (1.63)$$

Пусть $P_1(t)$, $P_2(t)$ — вероятности безотказной работы соответственно первого и второго элементов. Применяя последовательно формулы для вероятности безотказной работы системы при общем резервировании получим

$$P_o(t) = 2P_1(t)\cdot P_2(t) - P_1^2(t)\cdot P_2^2(t). \qquad (1.64)$$

При раздельном резервировании, найдем

$$P_p(t) = \left(2P_1(t) - P_1^2(t)\right)\left(2P_2(t) - P_2^2(t)\right). \qquad (1.65)$$

Выигрыш в надежности определяется разностью

$$P_p - P_o = 2P_1P_2\left(1 - P_1\right)\left(1 - P_2\right),$$

правая часть которой положительна для любых P, за исключением предельных случаев $P = 0$ и $P = 1$. Таким образом, раздельное резервирование эффективней с точки зрения надежности.

Сравнение нагруженного и ненагруженного резервирования

Теперь проведем сравнение некоторых параметров безотказности для нагруженного и ненагруженного резервирования на примере дублирования. Удобным для сравнения параметром является средняя наработка до отказа. Используя интегрирование по частям, из формулы нетрудно получить

$$\overline{T} = \int_0^\infty f(t)t\,dt = -P(t)t\Big|_0^\infty + \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty P(t)dt\,, \quad (1.66)$$

т. е. средняя наработка до отказа численно равна площади под кривой $P(t)$.

При *нагруженном резерве* дублирующий элемент включен параллельно основному, поэтому вероятность безотказной работы такой системы определяется выражением (1.63). Основной и резервирующий элементы обычно равнонадежны, т. е. $P_1(t) = P_2(t)$. Если наработка до отказа обоих элементов подчиняется экспоненциальному закону распределения (то средняя наработка до отказа дублированной системы равна

$$\overline{T} = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty \left(P_1(t) + P_2(t) - P_1(t)\cdot P_2(t)\right)dt =$$

$$\int_0^\infty \left(2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}\right)dt = \frac{3}{2\lambda}.$$

Таким образом, при "горячем" дублировании средняя наработка до отказа системы увеличивается в полтора раза по сравнению со средней наработкой до отказа отдельного элемента [см. формулу (1.13)] $\overline{T_1} = 1/\lambda$.

В общем случае для системы с $(n-1)$ нагруженными одинаковыми резервными элементами надежность системы равна

$$P_c(t) = 1 - Q^n = 1 - (1-P)^n,$$

или, с учетом разложения бинома

$$(1-P)^n = (-1)^n \cdot (P-1)^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot P^k \cdot (-1)^{n-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot P^k \cdot (-1)^{2n-k},$$

а также равенства единице первого члена суммы для любых целых $n \geq 1$

$$C_n^0 \cdot P^0 \cdot (-1)^{2n} = 1,$$

получим:

$$P_c(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot P^k \cdot (-1)^{2n-k} = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot P^k \cdot (-1)^{2n-k+1}.$$

Тогда из формулы (1.66) следует среднее время наработки до отказа рассматриваемой системы горячего резервирования

$$\overline{T}=\int_0^\infty P_c(t)\,dt=\int_0^\infty \sum_{k=1}^{n} C_n^k\cdot P^k\cdot(-1)^{2n-k+1}\,dt,$$

при экспоненциальном законе распределения отказов примет вид

$$\overline{T}=\int_0^\infty \sum_{k=1}^{n} C_n^k\cdot e^{-k\lambda t}\cdot(-1)^{2n-k+1}\,dt=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n} C_n^k\cdot(-1)^{2n-k+1},$$

Значения суммы в правой части полученного выражения, характеризующие, во сколько раз увеличится среднее время наработки системы горячего резервирования по сравнению с единичным элементом, для $n = 1, \ldots, 10$, представлены в таблице 2.3. Из данных видно, что увеличение числа резервных элементов не приводит к пропорциональному росту среднего времени наработки до отказа системы.

Таблица 1.3 – Коэффициент увеличения среднего времени наработки до отказа системы с глубиной резервирования n по сравнению с отдельным элементом

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{T}/\overline{T}_1$	1	1,5	1,833	2,083	2,283	2,45	2,593	2,718	2,829	2,929

При *резервировании замещением* ("холодный" резерв) резервные элементы включаются только при отказе основных. Будем считать надежность переключателей абсолютной. Пусть по-прежнему $P_1(t)$, $P_2(t)$ — вероятности безотказной работы соответственно основного и дублирующего элементов. Найдем вероятность безотказной работы $P_3(t)$ системы, резервированной замещением, на интервале времени $(0; t)$. Событие "система работает безотказно" представляет собой сумму двух несовместных событий.

Первое событие (назовем его событием А) состоит в том, что основной элемент на всем интервале времени $(0; t)$ проработает безотказно, и дублирующий элемент так и не будет включен. Вероятность этого события равна $P_1(t)$. Второе событие (событие Б), возможное на интервале времени $(0; t)$, состоит в том, что в некоторый момент времени $\tau \in (0; t)$ основной элемент откажет, резервный элемент включится и проработает безотказно в течение промежутка времени $(\tau; t)$.

Найдем вероятность $P_Б(t)$. Вероятность отказа основного элемента на бесконечно малом интервале $(\tau;\ \tau + d\tau)$ по определению плотности вероятности отказа равна $f_1(\tau)d\tau$. Тогда величина $f_1(\tau)P_2(t-\tau)d\tau$ будет равна произведению вероятности двух событий: отказа основного элемента на интервале $(\tau; \tau + d\tau)$ и безотказной работы дублирующего элемента в течение оставшегося времени, т. е. на промежутке $(\tau; t)$. Интегрированием выражения $f_1(\tau)P_2(t-\tau)d\tau$ на интервале $(0; t)$ получим искомую вероятность события Б. Тогда вероятность $P_3(t)$ безотказной работы рассматриваемой системы

$$P_3(t) = P_1(t) + \int_0^t f_1(\tau)P_2(t-\tau)d\tau = e^{-\lambda t} + \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau} \cdot e^{-\lambda(t-\tau)}d\tau = .$$

$$e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t}t = e^{-\lambda t}(1+\lambda t)$$

Здесь учтено выражение $f_1(t) = -dP_1(t)/dt$,. Используя полученное выражение для $P_3(t)$, найдем среднее время наработки до отказа системы с ненагруженным резервом, в случае экспоненциального распределения наработки:

$$\overline{T} = \int_0^\infty P_3(t)dt = \int_0^\infty \left[e^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t}t\right]dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt + \lambda\int_0^\infty \underset{u}{t}\,\underbrace{e^{-\lambda t}dt}_{dv} = \frac{1}{\lambda} - \underbrace{\left.\frac{t}{e^{\lambda t}}\right|_0^\infty}_{0} + \underbrace{\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt}_{1/\lambda} = \frac{2}{\lambda}.$$

Таким образом, дублирование замещением обеспечивает двойной выигрыш в надежности и является более эффективным, чем "горячее" дублирование. При этом нужно иметь в виду, что надежность переключателей также должна быть достаточно высокой, иначе выигрыш в надежности системы может быть сведен к минимуму.

Расчеты показывают, что аналогичный результат получается и для нормального распределения вероятности отказов элементов: при не слишком высокой дисперсии холодное дублирование приводит к удвоению среднего времени наработки до отказа; увеличение дисперсии распределения отказов ведет к снижению эффективности дублирования.

Если считать надежность переключателей абсолютной, то для системы резервирования замещением, состоящей из одного основного элемента и $(n-1)$ резервных вероятность безотказной работы можно найти по приближенной формуле [13, 18]

$$P_3(t) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n} Q_i(t)}{n!}, \qquad (1.67)$$

где $Q_i(t)$ — вероятность отказа i–го элемента, *n* — *глубина резервирования**, т. е. общее число основных и резервных элементов ($n = 2$ соответствует дублированию).

Для поддержания высокой надежности резервированных систем отказавшие элементы необходимо восстанавливать или заменять.

Пример 2.4. Система состоит из двух технологических машин — основной и резервной, включающейся только при отказе основной (холодный резерв). Надежность обеих машин подчиняется экспоненциальному закону распределения, причем интенсивность отказов основной машины равна λ_1, резервной λ_2. Основная машина — новая, а резервная машина наработала τ часов до пуска линии. Определить вероятность безотказной работы системы за время T; надежность переключателей машин считать абсолютной.

Решение. Пусть $P_1(t)$, $P_2(t)$ — вероятности безотказной работы соответственно основного и резервного элементов. Событие "система работает безотказно" представляет собой сумму двух несовместных событий.

Первое событие (А) состоит в том, что основной элемент на всем интервале времени $(0; T)$ проработает безотказно, и резервный элемент не будет включен. Вероятность этого события равна $P_1(T)$.

Второе событие (Б), возможное на интервале времени $(0; T)$, состоит в том, что в некоторый момент времени $\theta \in (0; T)$ основной элемент откажет, резервный элемент включится и проработает безотказно в течение промежутка времени $(\theta; T)$; при этом продолжительность работы резервного элемента (с учетом его предыстории) составит $T + \tau - \theta$. Найдем вероятность второго события. Вероятность отказа основного элемента на бесконечно малом интервале $(\theta; \theta + d\theta)$ равна $f_1(\theta)d\theta$. Тогда величина $f_1(\theta)P_2(T + \tau - \theta)d\theta$ будет равна произведению вероятности двух событий: отказа основного элемента на интервале $(\theta; \theta + d\theta)$ и безотказной работы дублирующего элемента в течение оставшегося времени, т. е. на промежутке $(\theta; T)$. Интегрируя выражение $f_1(\theta)P_2(T + \tau - \theta)d\theta$ на интервале $(0; T)$, получим вероятность события Б

$$P_Б(T) = \int_0^T f_1(\theta)P_2(T+\tau-\theta)d\theta = \int_0^T \lambda_1 e^{-\lambda_1\theta} \cdot e^{-\lambda_2(T+\tau-\theta)}d\theta = .$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} e^{-\lambda_2(T+\tau)}\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} - 1\right]$$

---

* Не путать с кратностью резервирования. Формула (2.67) для расчета среднего времени наработки до отказа не применима.

Вероятность безотказной работы рассматриваемой системы равна

$$P_C(T) = e^{-\lambda_1 T} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2(\grave{O}+\tau)}\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)T} - 1\right].$$

С учетом разложения в степенной ряд $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ дробь $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots$ при $x \to 0$ имеет предел, равный 1. Поэтому при $\lambda_2 = \lambda_1$ получим

$$P_C(T) = e^{-\lambda_1 T} + T\lambda_1 e^{-\lambda_1(\grave{O}+\tau)}.$$

1.11 Надежность комбинированных систем с резервированием

Частично резервированные системы

Наиболее часто резервируют не все элементы, а лишь наименее надежные, поскольку именно они резко снижают надежность системы. Пусть в системе (см. Рисунок 1.20) элементы подсистемы I не резервированы, а элементы подсистемы II имеют глубину резервирования n_j (при $n = 2$ — дублирование, при $n = 3$ — двойное резервирование).

В этом случае надежность системы

$$P_c(t) = P_I(t) \cdot P_{II}(t),$$

где $$P_I(t) = \prod_{i=1}^{a} P_i(t),$$

$$P_{II}(t) = \prod_{j=1}^{b}\left[1 - (Q_k(t))^{n_j}\right], \quad k = 1, \ldots, n_j.$$

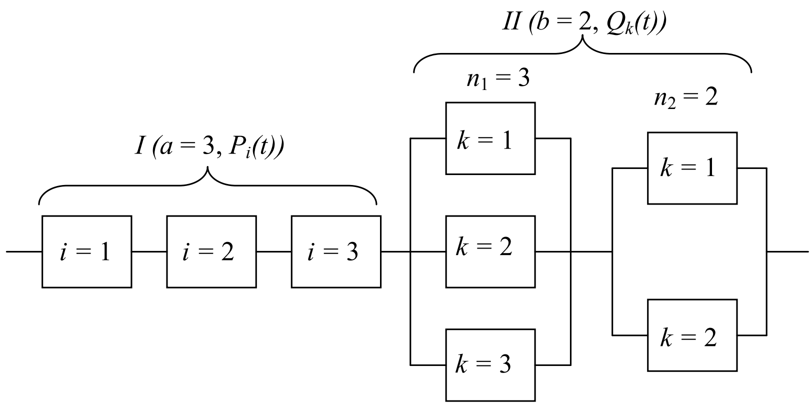


Рисунок 1.20 — Блок-схема системы с частичным резервированием.

Системы с комбинированным резервированием

В технике иногда применяют комбинированные системы, которые нельзя описать простыми последовательными или параллельными связями. Часто трудно даже изобразить в виде блок-схемы систему взаимосвязей элементов системы.

В таких случаях рекомендуется проводить анализ различных комбинаций возникновения отказов, подсчитывая вероятность их совместного появления.

Пример 2.5. Система состоит из n основных и m резервных элементов, причем все элементы одинаковы, включены постоянно и работают параллельно. Вероятность безотказной работы каждого из элементов равна P, а вероятность их отказа Q. Очевидно, система не откажет, если произойдет отказ не более m элементов. Здесь резервные элементы не могут быть отнесены к тому или иному основному элементу, равно как и система резервных элементов *не* является резервной для основной системы, т. е. здесь мы имеем случай *скользящего резерва*.

Первый из возможных подходов к расчету надежности таких систем — применение формулы Я. Бернулли для последовательных независимых испытаний, согласно которой вероятность того, что события (отказы) наступят в m испытаниях из $(n+m)$, а в остальных n не наступят, равна

$$Q_{n+m}(m) = C_{n+m}^{m} P^{n} Q^{m},$$

где $C_{n+m}^{m} = \dfrac{(n+m)!}{m!n!}$ — число сочетаний из $(n+m)$ по m (напомним, что число сочетаний может быть также найдено из треугольника Паскаля).

Вероятность того, что отказы наступят не более чем в m испытаниях из $(n+m)$, равна сумме

$$Q_{n+m}(\le m) = \sum_{k=0}^{m} C_{n+m}^{k} \cdot P^{n+m-k} \cdot Q^{k} ,$$

Тот же результат может быть получен без использования теоретико-вероятностного подхода — из разложения бинома

$$\underbrace{(P+Q)}_{1}{}^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^{k} \cdot P^{n+m-k} \cdot Q^{k} = 1^{n+m} = 1,$$

для $(n+m) = 2, 3, 4$, например:

$$\begin{aligned} &(P+Q)^2 = P^2 + 2PQ + Q^2 = 1; \\ &(P+Q)^3 = P^3 + 3P^2Q + 3PQ^2 + Q^3 = 1; \\ &(P+Q)^4 = P^4 + 4P^3Q + 6P^2Q^2 + 4PQ^3 + Q^4 = 1. \end{aligned} \qquad (1.68)$$

Первые члены разложений (P^2, P^3, P^4 соответственно) выражают вероятность безотказной работы всех элементов, вторые ($2PQ,\ 3P^2Q,\ 4P^3Q$) — вероятность отказа одного элемента и безотказной работы остальных и т. д. Суммы первых двух членов в каждом из разложений ($P^2 + 2PQ,\ P^3 + 3P^2Q,\ P^4 + 4P^3Q$) суть вероятности отказа не более одного элемента. Последние слагаемые (Q^2, Q^3, Q^4) — вероятности отказа всех элементов.

Рассмотрим сумму первых двух членов в биномиальном разложении при $(n+m) = 2$ $P^2 + 2PQ$, которая представляет собой вероятность отказа не более одного элемента из двух. Другими словами, она должна совпадать с надежностью дублированной системы, состоящей из двух элементов с вероятностью безотказной работы каждого из них P. Действительно, с учетом выражения получим

$$P^2 + 2PQ = P^2 + 2P(1-P) = 2P - P^2,$$

что совпадает с выражением (1.63) в случае $P_1 = P_2$.

Пример 2.6. В системе три параллельно работающих одинаковых элемента с вероятностью безотказной работы $P = 0{,}9$. Из них из $n = 2$ основных и $m = 1$ резервный. Определить вероятность безотказной работы системы.

Воспользуемся разложением бинома для случая $n + m = 3$

$$(P+Q)^3 = P^3 + 3P^2Q + 3PQ^2 + Q^3 = 1.$$

Здесь а) P^3 — вероятность безотказной работы всех элементов;

б) $P^3 + 3P^2Q$ — вероятность отказов не более одного элемента, что и является искомым решением задачи:

$$P_c = P^3 + 3P^2Q = 0{,}9^3 + 3\cdot 0{,}9^2\cdot 0{,}1 = 0{,}972.$$

Пример 2.7. Крышка подшипника фиксируется при помощи 4-х одинаковых болтов с вероятностью безотказной работы каждого $P = 0{,}99$. Из опыта эксплуатации известно, что крышка будет надежно функционировать при сохранении работоспособности любых двух болтов. Найти вероятность безотказной работы системы крепления крышки.

В данном примере характер взаимодействия элементов не очевиден: с одной стороны болты включены последовательно (по надежности), с другой — резервные болты включены параллельно основным. Проблема состоит в том, что заранее не известно, какие из болтов являются основными, а какие — резервными. Для ее решения проанализируем события, не приводящие к отказу системы.

Обозначим болты буквами *a, b, c, d*, а события, состоящие в отказе этих болтов — A, B, C, D соответственно. Предполагая, что отказы независимы, вычислим вероятности для различных способов появления отказов.

Так, $P\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}\right)$ ("A$\cap$B" означает произведение событий A и B, черточка сверху — логическое отрицание) есть вероятность отказа болта *a* при безотказной работе остальных болтов. Вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей, поэтому

$$P\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}\right) = P(A)\cdot P\left(\overline{B}\right)\cdot P\left(\overline{C}\right)\cdot P\left(\overline{D}\right) = (1-P)\cdot P^3 =$$
$$(1-0{,}99)\cdot 0{,}99^3 = 9{,}703\cdot 10^{-3}.$$

Как и в последовательных независимых испытаниях Бернулли, число способов появления k отказов из n элементов есть $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. В таблице 2.4 приведены все возможные события, не приводящие к отказу системы ($n = 4$).

Вероятность отказа не более двух болтов есть сумма значений вероятностей в последнем столбце, умноженных на соответствующее число сочетаний во втором столбце, поскольку способы появления отказов есть события взаимно несовместные. Поэтому вероятность безотказной работы системы равна

$P_c = P^4 + 4P^3Q + 6P^2Q^2 = 0{,}9606 + 4 \cdot 9{,}703 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 9{,}801 \cdot 10^{-5} = 0{,}999996$.

Очевидно, тот же результат мог быть получен при использовании разложения бинома. Действительно, полученный трехчлен $P_c = P^4 + 4P^3Q + 6P^2Q^2$ есть не что иное, как первые три слагаемых биномиального разложения

$(P+Q)^4 = P^4 + 4P^3Q + 6P^2Q^2 + 4PQ^3 + Q^4$,

Таблица 1.4 — Расчет вероятности отказов системы из 4-х элементов

<table>
<tr><th>Число отказавших элементов k</th><th>Число сочетаний отказавших элементов C_n^k</th><th>События, характеризующие состояния системы, не приводящие к отказу</th><th>Вероятность событий</th></tr>
<tr><td>0</td><td>$C_4^0 = 1$</td><td>$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}$</td><td>$P^4 = 0{,}99^4 = 0{,}9606$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">1</td><td rowspan="4">$C_4^1 = 4$</td><td>$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}$</td><td rowspan="4">$P^3 Q = 0{,}99^3 \cdot 0{,}01 = 9{,}703 \cdot 10^{-3}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{D}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap D$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">2</td><td rowspan="6">$C_4^2 = 6$</td><td>$A \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{D}$</td><td rowspan="6">$P^2 Q^2 = 0{,}99^2 \cdot 0{,}01^2 = 9{,}801 \cdot 10^{-5}$</td></tr>
<tr><td>$A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D}$</td></tr>
<tr><td>$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap D$</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \cap B \cap C \cap \overline{D}$</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap D$</td></tr>
<tr><td>$\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap D$</td></tr>
</table>

и характеризует вероятность события "отказ двух или менее элементов", в то время как два последних слагаемых есть вероятность события "отказ трех и более элементов". Эти два события образуют полную группу взаимно несовместных событий.

Интересно также подсчитать надежность и вероятность отказа следующих систем:

а) состоящей лишь из двух основных болтов, соединенных последовательно по надежности

$P_c = P^2 = 0{,}99^2 = 0{,}9801$; $Q_C = 1{,}99 \cdot 10^{-2}$;

б) состоящей из основной подсистемы из двух болтов и такой же резервной подсистемы (т. е. система общего резервирования,)

$$P_c = 1 - \left(1 - P^2\right)^2 = 1 - (1 - 0{,}99^2)^2 = 0{,}99960399;\ Q_C = 3{,}96 \cdot 10^{-4};$$

в) состоящей из двух основных болтов, один из которых имеет двойное резервирование

$$P_c = P\left(1 - Q^3\right) = 0{,}99[1 - (1 - 0{,}99)^3] = 0{,}98999901;\ Q_C = 1{,}00 \cdot 10^{-2};$$

г) состоящей из двух основных болтов, *каждый* из которых дублирован (т. е. система раздельного резервирования

$$P_c = \left(1 - Q^2\right)^2 = [1 - (1 - 0{,}99)^2\,]^2 = 0{,}99980001;\ Q_C = 2{,}00 \cdot 10^{-4}.$$

Полученные значения существенно ниже, чем для рассмотренной в примере системы, что особенно хорошо заметно по вероятностям отказов систем (для системы, описанной в условии примера, Q_C = $4 \cdot 10^{-6}$). Это связано с тем, что в рассмотренном примере резервные элементы относятся к системе в целом, а не к отдельным основным элементам или подсистемам, т. е. использование скользящего резерва дает максимальный выигрыш в надежности.

На практике могут встречаться также системы с нагруженным резервом, в которых одинаковые элементы работают в идентичных условиях, однако на надежность системы влияет, например, взаимное расположение не отказавших элементов. Рассмотрим такой случай на следующем примере.

Пример 2.8. Крышка подшипника (Рисунок 1.21) редуктора фиксируется при помощи 4-х одинаковых болтов с вероятностью безотказной работы каждого из них P = 0,99. С конструктивной точки зрения крышка будет надежно функционировать при наличии хотя бы двух диаметрально противоположных болтов. Найти вероятность безотказной работы системы крепления крышки.

Как и в предыдущем примере, обозначим болты буквами *a, b, c, d*, а события, состоящие в отказе этих болтов — *A*, *B*, *C*, *D* соответственно. Предполагая, что отказы независимы, вычислим вероятности для различных способов появления отказов.

Учитывая специфику условий задачи, сформулируем состояния системы, не приводящие к ее отказу:

1) Ни один элемент не отказал. Возможна одна комбинация — $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}$. Вероятность такого события $P^4 = 0{,}99^4 = 0{,}9606$.

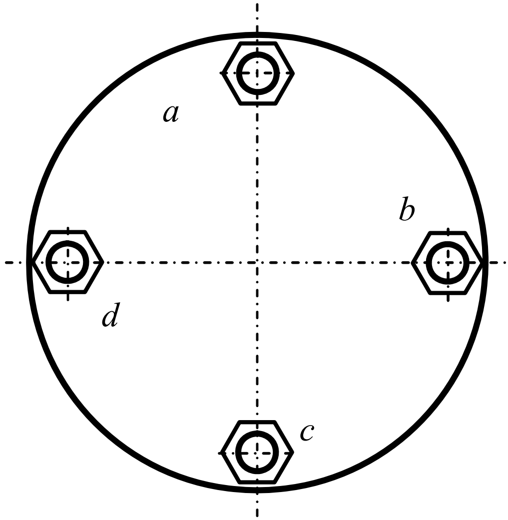


Рисунок 1.21 — Схема крепления крышки подшипника.

2) Отказал лишь один элемент. Здесь, как и в предыдущем примере, четыре комбинации — $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{D}$, $\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap \overline{D}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D}$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap D$. Вероятность каждого из этих событий равна $P^3Q = 0{,}99^3 \cdot 0{,}01 = 9{,}703 \cdot 10^{-3}$. Пара диаметрально противоположных болтов в этих случаях останется работоспособной.
3) Отказ двух диаметрально противоположных болтов (*a* и *c* либо *b* и *d*), т. е. всего две комбинации — $A \cap \overline{B} \cap C \cap \overline{D}$ и $\overline{A} \cap B \cap \overline{C} \cap D$. Вероятность каждого из этих событий есть $P^2Q^2 = 0{,}99^2 \cdot 0{,}01^2 = 9{,}801 \cdot 10^{-5}$.

Все описанные события — взаимно несовместные, поэтому вероятность безотказной работы системы равна сумме их вероятностей:

$P_{\text{ñèñ}} = P^4 + 4P^3Q + 2P^2Q^2 = 0{,}9606 + 4 \cdot 9{,}703 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 9{,}801 \cdot 10^{-5} =$ 0,99980404.

Вероятность отказов $Q_{сис} = 1{,}96 \cdot 10^{-4}$ при этом, естественно, выше, чем в предыдущем примере.

Контрольные задания

Каждый студент заочной формы обучения выполняет две контрольные работы. Для многовариантных заданий номер варианта задания соответствует номеру студента в списке (если номер студента в списке больше 25, то номер варианта задания равен номеру студента в списке минус 25).

Контрольные работы №1 и №2 включают следующие задания:

№ студента по списку	Номера заданий		№ студента по списку	Номера заданий	
	Контр. раб. №1	Контр. раб. №2		Контр. раб. №1	Контр. раб. №2
1	1, 3	2, 7	18	1, 21	2, 7
2	1, 4	2, 7	19	1, 22	2, 7
3	1, 5	2, 7	20	1, 23	2, 7
4	1, 6	2, 7	21	1, 3	2, 7
5	1, 8	2, 7	22	1, 4	2, 7
6	1, 9	2, 7	23	1, 5	2, 7
7	1, 10	2, 7	24	1, 6	2, 7
8	1, 11	2, 7	25	1, 8	2, 7
9	1, 12	2, 7	26	1, 9	2, 7
10	1, 13	2, 7	27	1, 10	2, 7
11	1, 14	2, 7	28	1, 11	2, 7
12	1, 15	2, 7	29	1, 12	2, 7
13	1, 16	2, 7	30	1, 13	2, 7
14	1, 17	2, 7	31	1, 14	2, 7
15	1, 18	2, 7	32	1, 15	2, 7
16	1, 19	2, 7	33	1, 16	2, 7
17	1, 20	2, 7	34	1, 17	2, 7

1. В результате испытаний N однотипных узлов получены данные, представленные в таблице. Построить функции надежности $P(\tau)$, отказов $Q(\tau)$, плотности отказов $f(\tau)$, интенсивности отказов $\lambda(\tau)$ и определить среднюю продолжительность наработки до отказа $T_{ср}$.

Указания: 1) При построении функций $P(\tau)$, $Q(\tau)$ использовать кусочно-линейное представление, функции $f(\tau)$, $\lambda(\tau)$ построить в виде гистограммы. 2) При расчете функции $\lambda(\tau)$ использовать среднее количество работоспособных узлов на данном интервале времени.

Таблица 1.5 — Исходные данные к задаче 1.

№ вар-та	Кол-во узлов N	Количество узлов m, наработавших до отказа ко времени τ (мес)							
		2	**4**	**8**	**12**	**18**	**24**	**30**	**36**
1	70	6	12	20	30	34	40	50	70
2	90	5	10	13	20	24	38	56	90
3	100	2	7	10	17	25	55	85	100
4	60	2	6	12	25	33	45	58	60
5	50	0	3	7	10	13	35	48	50
6	50	2	3	5	12	28	36	45	50
7	70	1	3	8	15	25	40	65	70
8	40	1	2	4	6	10	20	35	40
9	60	2	6	8	12	20	30	55	60
10	75	8	25	38	48	60	70	73	75
11	70	15	35	40	53	61	65	68	70
12	75	8	15	22	30	41	63	71	75
13	50	1	5	8	12	25	40	48	50
14	45	2	5	12	36	38	42	44	45
15	60	27	30	38	46	52	54	59	60
16	50	2	3	8	15	25	40	46	50
17	70	6	10	13	20	24	38	56	70
18	40	1	3	7	10	13	35	37	40
19	60	4	6	7	11	15	38	48	60
20	75	2	3	8	15	25	40	65	75
21	65	2	7	12	25	33	42	58	65
22	55	0	4	7	10	13	30	48	55
23	75	1	5	8	16	25	34	65	75
24	45	1	3	4	6	10	26	35	45
25	65	2	5	8	10	20	37	55	65

2. В машине, состоящей из 7 узлов, функции надежности которых подчиняются закону $P_i = \exp(-\lambda_i \tau)$, четыре узла обладают очень низкими интенсивностями отказов ($\lambda_i < 10^{-4}$ мес$^{-1}$, $i = 1 \div 4$), а у остальных, как показали многократные стендовые испытания, начальные интенсивности отказов сравнительно высоки и составляют λ_{i0} ($i = 5 \div 7$), причем после каждого k-го ремонта их интенсивности отказов увеличиваются согласно

закону: $\lambda_{ik} = \lambda_{i(k-1)} n_i = \lambda_{i0} n_i^k$, где n_i – константа, определяемая для каждого узла. Опыт эксплуатации показал, что ремонт каждого из этих трех узлов целесообразно проводить, как только их надежности P_i станут ниже допустимой $[P_i]$. Определите количество допустимых ремонтов N_i для указанных узлов и сроки их замены новыми $T_{\text{н}i}$, если межремонтный пробег их должен составлять не менее $[T]$. Изменение надежности каждого из узлов и всей машины во времени проиллюстрировать графически. Длительность ремонтов пренебрежимо мала. Исходные данные к расчету представлены в таблице.

Таблица 1.6 — Исходные данные к задаче 2.

№ вар.	λ_{50}, мес$^{-1}$	λ_{60}, мес$^{-1}$	λ_{70}, мес$^{-1}$	n_5	n_6	n_7	$[P_5]$	$[P_6]$	$[P_7]$	$[T]$, мес
1	0,0012	0,0024	0,0018	2,7	2,2	2,1	0,95	0,97	0,98	2
2	0,0016	0,0014	0,0022	2,1	2,1	2,3	0,97	0,98	0,96	3
3	0,0022	0,0018	0,0011	2,3	2,1	2,4	0,96	0,96	0,95	2
4	0,0015	0,0009	0,0013	2,4	2,5	2,3	0,95	0,99	0,97	2
5	0,0014	0,0025	0,0016	2,3	2,1	1,6	0,98	0,95	0,97	3
6	0,0012	0,0015	0,0018	2,6	2,4	1,9	0,97	0,97	0,96	3
7	0,0014	0,0016	0,0020	1,9	1,8	2,4	0,97	0,97	0,96	2
8	0,0019	0,0021	0,0010	2,4	2,05	1,8	0,97	0,95	0,99	3
9	0,0009	0,0012	0,0024	1,8	1,6	2,15	0,99	0,98	0,95	3
10	0,0025	0,0021	0,0014	2,1	1,8	2,3	0,95	0,96	0,97	2
11	0,0016	0,0020	0,0015	1,7	2,6	2,1	0,97	0,95	0,97	3
12	0,0021	0,0012	0,0019	2,2	2,05	2,2	0,95	0,98	0,96	2
13	0,0008	0,0022	0,0016	1,8	1,8	1,7	0,99	0,95	0,97	2
14	0,0025	0,0023	0,0009	1,9	2,1	2,0	0,95	0,95	0,99	3
15	0,0020	0,0018	0,0024	2,2	2,3	2,2	0,95	0,96	0,95	2
16	0,0012	0,0015	0,0018	1,7	2,6	2,1	0,97	0,95	0,97	3
17	0,0014	0,0016	0,0020	2,2	2,05	2,2	0,95	0,98	0,96	2
18	0,0019	0,0021	0,0010	1,8	1,8	1,7	0,99	0,95	0,97	2
19	0,0009	0,0012	0,0024	1,9	2,1	2,0	0,95	0,95	0,99	3
20	0,0025	0,0021	0,0014	2,2	2,3	2,2	0,95	0,96	0,95	2
21	0,0019	0,0022	0,0013	2,3	2,3	2,05	0,97	0,95	0,99	3
22	0,0009	0,0014	0,0016	2,6	2,1	1,6	0,99	0,98	0,95	3
23	0,0025	0,0017	0,0018	1,9	2,2	1,8	0,95	0,96	0,97	2
24	0,0016	0,0025	0,0020	2,4	1,7	2,6	0,97	0,95	0,97	3
25	0,0021	0,0016	0,0010	1,8	2,0	2,05	0,95	0,98	0,96	2

3. Вероятность безотказной работы ленточного пресса подчиняется зависимости $\mathrm{P} = \exp(-\lambda t)$. Определить среднюю наработку до отказа $T_{\text{ср}}$ пресса и вероятность его безотказной работы на момент времени $T_{\text{ср}}$.

4. Каландр состоит из следующих элементов: корпус, электропривод, три валка и шесть подшипников. Через год работы вероятность отказов привода составила $Q_1 = 0{,}05$, валков $Q_2 = 0{,}12$, подшипников $Q_3 = 0{,}02$,

корпуса $Q_4 = 0{,}01$. Определить надежность каландра к концу второго года, если у всех четырех типов элементов вероятность безотказной работы подчиняется зависимости $P = \exp(-\lambda t)$.

5. Технологическая линия состоит из четырех машин — двух дробилок, смесителя и мельницы. Вторая дробилка является нагруженным резервом для первого. Определить надежность работы технологической линии, если надежность машин на данный момент времени составляет соответственно: дробилок — 0,98 и 0,92; смесителя — 0,95 и мельницы — 0,89.

6. Технологическая линия состоит из четырех машин — дробилки, пресса и двух упаковочных автоматов, причем второй из них является ненагруженным резервом для первого. Определить надежность работы технологической линии к концу первого полугодия работы, если функции надежности всех машин подчиняются зависимости $P = \exp(-\lambda t)$, а интенсивности отказов соответственно равны: дробилки $\lambda_1 = 0{,}01$ мес$^{-1}$; пресса $\lambda_2 = 0{,}03$ мес$^{-1}$; упаковочных автоматов $\lambda_3 = 0{,}06$ мес$^{-1}$.

7. Предприятие закупило партию из N виброуплотнителей, характеристики надежности которых представлены в таблице 1.5 (см. задачу 1). Построить зависимость параметра потока отказов от времени на интервале [0; 144 мес] в предположении, что время восстановления отказавшего виброуплотнителя пренебрежимо мало, а его надежность после ремонта восстанавливается полностью. Сравнить величину стационарного параметра потока отказов Λ с интенсивностью отказов $\lambda = 1/T_{\text{ср}}$. Рекомендация: рассчитать количество отказавших изделий на интервалах продолжительностью 6 месяцев каждый; для расчета $Q(\tau = 6 \text{ мес})$ интерполировать исходные данные.

8. Оценить вероятность отказа в течение 3-х лет непрерывной работы подшипника скольжения мельницы, если его ресурс по износу подчиняется нормальному распределению с параметрами: математическое ожидание $m_t = 5 \cdot 10^4$ ч; дисперсия $D_t = 2 \cdot 10^8$ ч^2.

9. Оценить 90%-й ресурс поршневого пресса, если его долговечность ограничена по износу, а ресурс по износу подчиняется нормальному распределению с параметрами: среднее квадратическое отклонение $S_t = 6 \cdot 10^3$ ч; коэффициент вариации $V_t = 0{,}6$.

10. Оценить вероятность безотказной работы вала машины в течение $t = 1{,}5 \cdot 10^4$ ч, если внезапные (случайные) повреждения определяются параметром интенсивности отказов $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$, а ресурс от усталостных повреждений подчиняется нормальному распределению с параметрами: математическое ожидание $m_t = 5 \cdot 10^4$ ч; среднее квадратическое отклонение $S_t = 2 \cdot 10^4$ ч. Построить графики функций надежности от каждого вида отказов и от их совместного действия.

11. Определить коэффициент технического использования оборудования, если параметр потока отказов стационарен и равен $\Lambda = 3{,}3 \cdot 10^{-5}$ ч$^{-1}$, а средние значения времени простоя и ремонта соответственно составляют $\bar{t}_{\text{пр}} = 50$ ч; $\bar{t}_{\text{рем}} = 280$ ч.

12. Технологическая цепочка из четырех последовательно соединенных машин с ресурсом каждого из них, характеризующимся параметрами: интенсивности внезапных отказов $\lambda = 5 \cdot 10^{-6}$ ч$^{-1}$; математическое ожидание постепенных отказов $m_t = 2 \cdot 10^4$ ч, среднее квадратическое отклонение $S_t = 10^4$ ч.

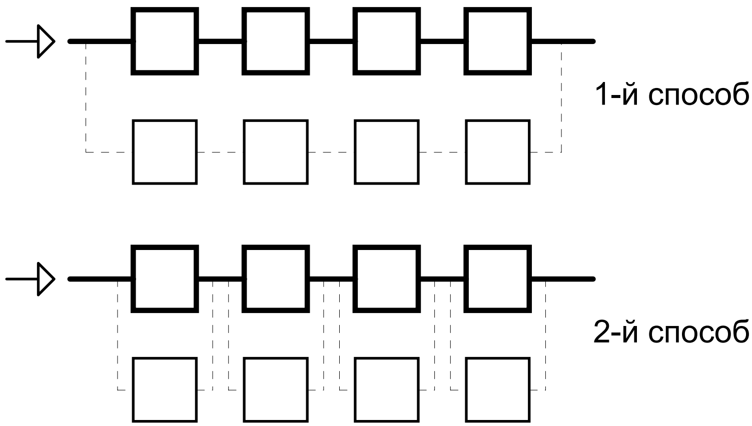


Рисунок 1.26 — К задаче 12. Варианты резервирования технологической цепочки. 1-й способ — резервирование всей линии; 2-й способ — поэлементное резервирование. Виды резервирования: а–нагруженный резерв, б – ненагруженный резерв.

Система может быть резервирована подобными машинами — либо вся (1-й способ) либо поэлементно (2-й способ), по схеме нагруженного (а) или ненагруженного (б) резерва (Рисунок 1.21). Выбрать наиболее надежный вариант, считая систему включения резерва абсолютно надежной. Найдите надежность системы в течение времени $t = 10^4$ ч.

13. Определить надежность технологической цепочки за 1 год непрерывной работы (см. рисунок 1.27), если вероятности безотказной работы ее элементов подчиняются экспоненциальному закону: $P_i = \exp(-\lambda_i\tau)$, первые три элемента не резервированы, 4-й дублирован, а 5-й и 6-й имеют двойное резервирование. $\lambda_1 = \lambda_3 = = 0{,}0025$ мес$^{-1}$; $\lambda_2 = 0{,}0017$ мес$^{-1}$; $\lambda_4 = \lambda_7 = 0{,}009$ мес$^{-1}$; $\lambda_5 = \lambda_8 = \lambda_9 = 0{,}011$ мес$^{-1}$; $\lambda_6 = \lambda_{10} = = \lambda_{11} = 0{,}008$ мес$^{-1}$.

14. Испытания выявили, что ресурс приводов виброгрохота подчиняется нормальному закону распределения с параметрами: $m_t = 30$ млн. циклов; $S_t = 5$ млн. циклов. Частота колебаний виброгрохота равна 5 Гц, режим работы — непрерывный. Найдите надежность привода и интенсивность его отказов при наработке, равной 2 мес. Как часто надо

заменять привод виброгрохота, если вероятность его отказа не должна превышать 5 % ?

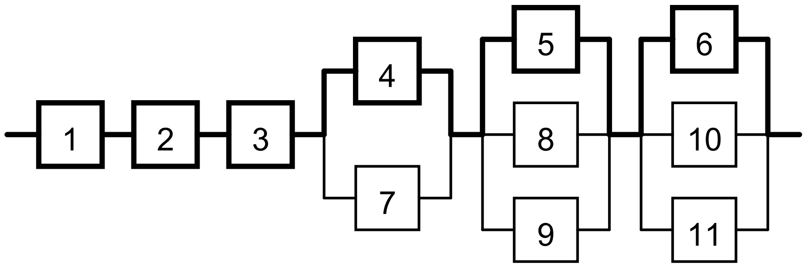


Рисунок 1.27 — К задаче 13.

15. Привод кривошипно-рычажного пресса снабжен тремя одинаковыми постоянно включенными электродвигателями, вероятность безотказной работы каждого из которых составляет 0,92. Для создания необходимого приводного момента должно функционировать не менее двух двигателей. Какова вероятность безотказной работы машины?

16. С конструктивной точки зрения для крепления венца шкива к ступице достаточно 4-х болтов М8. Однако шкив был изготовлен с 6-ю болтами М8. Какова вероятность гарантированного крепления венца, если вероятность самораскручивания и выпадения болта составляет 0,001? Принять, что взаимное расположение работоспособных болтов не влияет на прочность конструкции.

17. К вытяжному зонту машины для нанесения тефлонового покрытия подключены датчики, выдающий управляющий сигнал на снижение температуры разогрева полимера при высокой концентрации фтора в воздухе. Возможны следующие отказы этих датчиков:

Вид неисправности	Вероятность
1. Подача сигнала о высокой концентрации фтора при ее отсутствии	0,10
2. Необнаружение высокой концентрации фтора при ее наличии	0,15

Для повышения надежности системы принято решение использовать три таких датчика, включенных в цепь управления.

а) Определите, какая схема включения датчиков обеспечивает максимальную вероятность обнаружения высокой концентрации фтора при ее наличии.

б) Определите вероятность подачи ложного сигнала для каждого из возможных вариантов схем включения датчиков.

18. Для нормального освещения пульта управления машиной по нормам освещения достаточно одного осветителя. Определить необходимое количество параллельно и непрерывно включенных осветителей, если надежность системы освещения должна составлять не менее $0{,}999$, а вероятность отказа каждого осветителя равна $0{,}25$.

19. Система вытяжной вентиляции цеха по производительности может обеспечиваться одним вентилятором, однако для повышения надежности было решено установить три одинаковых вентилятора, два из которых представляют собой "холодный" резерв. Какой должна быть вероятность безотказной работы вентиляторов, если вероятность отказа системы не должна превышать $0{,}0001$? Переключатели вентиляторов считать абсолютно надежными.

20. Система вытяжной вентиляции цеха по производительности может обеспечиваться одним вентилятором, однако для повышения надежности принято решение установить несколько дополнительных вентиляторов, являющихся "горячим" резервом (производительность регулируется изменением сопротивления вытяжных трубопроводов). Определить глубину резервирования, если вероятность отказа системы не должна превышать $0{,}0001$, а надежность одного вентилятора $0{,}94$. Переключатели абсолютно надежны.

21. Время наработки до отказа каждого элемента системы холодного дублирования подчиняется нормальному закону распределения со средним значением m_t и дисперсией D_t. Считая переключатели абсолютно надежными, определить среднее время $T_{\text{с}}$ жизни системы, дисперсию $D_{\text{с}}$, а также вероятность безотказной работы системы за промежуток времени от 0 до $0{,}8T_{\text{с}}$. Решение допускается получить численно.

22. Для нормального освещения пульта управления машиной по нормам освещения достаточно двух осветителей. Определить надежность системы освещения, состоящей из пяти параллельно и непрерывно

включенных осветителей, если вероятность отказа каждого осветителя равна 0,25.

23. Сменный вкладыш возвратно-поступательной пары трения, работающий в режиме высоких температурных и механических нагрузок, имеет средний срок службы 100 ч со средним квадратичным отклонением 20 ч. Продолжительность работы машины до капитального ремонта 8000 ч. Какого количества запасных вкладышей будет достаточно с вероятностью 0,95 и с вероятностью 0,99? Процесс смены вкладышей считать очень коротким.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фомин В.Н. Квалиметрия. Управление качеством. Сертификация. Курс лекций. – М.: Ассоциация авторов и издателей "Тандем". Издательство "Экмос", 2000. – 320 с.
2. Спицнадель В.Н. Системы качества (в соответствии с международными стандартами ISO семейства 9000): Учебное пособие. – СПб.: Издательский дом "Бизнес-пресса", 2000. – 336 с.
3. Окрепилов В.В. Управление качеством: Учебное пособие для вузов. – СПб.: Наука, 2000. – 911 с.
4. Качество продукции, испытания, сертификация, терминология: Справочное пособие. – Вып. 4. – М.: Изд-во стандартов, 1989. – 144 с.
5. ГОСТ Р ИСО 9000-2008. Система менеджмента качества. Основные положения и словарь. – М.: Изд-во стандартов, 2008. – 26 с.
6. ГОСТ Р ИСО 9001-2008. Система менеджмента качества. Требования. – М.: Изд-во стандартов, 2008. – 48 с.
7. ГОСТ Р ИСО 9004-2008. Система менеджмента качества. Рекомендации по улучшению деятельности. – М.: Изд-во стандартов, 2008. – 54 с.

8. ГОСТ 27.002–89. Надежность в технике. Основные понятия. Термины и определения. Группа ТОО. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 37 с.
9. ГОСТ 27.003–83. Надежность в технике. Выбор и нормирование показателей надежности. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – 86 с.
10. Шиндовский Э., Шюрц О. Статистические методы управления качеством. Контрольные карты и планы контроля. Пер. с нем. – М.: Мир, 1976. – 597 с.
11. Ноулер Л., Хауэлл Дж. и др. Статистические методы контроля качества продукции. – М.: Изд-во стандартов, 1989. – 96 с.
12. Вопросы математической теории надежности/ Е.Ю. Бразилович, Ю.К. Беляев, В.А. Каштанов и др.; Под ред. Б.В. Гнеденко. – М.: Радио и связь, 1983. – 367 с.
13. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
14. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969. – 511 с.
15. Кордонский Х.Б. Приложения теории вероятностей в инженерном деле. – М.–Л.: Физматлит, 1963. – 436 с.
16. Вероятностные методы в инженерных задачах: Справочник/А.Н. Лебедев, М.С. Куприянов, Д.Д. Недосекин, Е.А. Чернявский. – СПб.: Энергоатомиздат. Санкт-Петербургское отделение, 2000. – 333 с.
17. Марцулевич Н.А., Борисов В.З. Надежность химико-технологических систем: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2002. – 149 с.

18. Надежность машин: Учеб. пособие для машиностр. спец. вузов/ Д.Н. Решетов, А.С. Иванов, В.З. Фадеев; Под ред. Д.Н. Решетова. – М.: Высш. шк., 1988. – 238 с.
19. Обеспечение и методы оптимизации надежности химических и нефтеперабатывающих заводов/ В.В. Кафаров, В.П. Мешалкин, Г. Грун, В. Нойманн. – М.: Химия, 1987. – 272 с.
20. Диллон Б., Сингх Ч. Инженерные методы обеспечения надежности систем. – М.: Мир, 1984. – 318 с.
21. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем. – М.: Мир, 1980. – 604 с.
22. Старосельский А.А., Гаркунов Д.Н. Долговечность трущихся деталей машин. – М.: Машиностроение, 1967. – 395 с.
23. Смазочные материалы: Антифрикционные и противоизносные свойства. Методы испытаний: Справочник/ Р.М. Матвеевский, В.Л. Лашхи, И.А. Буяновский и др. – М.: Машиностроение, 1989. – 224 с.
24. Справочник по триботехнике / Под общ. ред. М. Хебды, А.В. Чичинадзе. В 3-х т. Т. 2. Смазочные материалы, технические смазки, опоры скольжения и качения. – М.: Машиностроение, 1990. – 416 с.
25. Трение, изнашивание и смазка: Справочник. В 2-х кн./ Под ред. И.В. Крагельского, В.В. Алисина. – М.: Машиностроение, 1978. – Кн. 1, 1978. – 400 с.; Кн. 2, 1979. – 358 с.
26. Мур Д. Основы и применения трибоники. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1978. – 487 с.
27. Износостойкие материалы в химическом машиностроении. Справочник. Под ред. Ю.М. Виноградова. – Л.: Машиностроение, 1977. – 256 с.

28. Химия: Справ. изд./В. Шретер, К.-Х. Лаутеншлегер, Х. Бибрак и др.: Пер. с нем. – М.: Химия, 1989. – 648 с.
29. Малахов А. И., Тюнина К. М., Цупак Т. Е. Коррозия и основы гальваностегии. – М.: Химия, 1987. – 208 с.
30. Коррозионная стойкость оборудования химических производств: Способы защиты оборудования от коррозии. Справ. изд./Под ред. Б. В. Строкана, А. М. Сухотина. – Л.: Химия, 1987. – 280 с.
31. Воробьева Г. Я. Коррозионная стойкость материалов в агрессивных средах химических производств. – М.: Химия, 1967. – 844 с.
32. Расчет точности машин и приборов/ В. П. Булатов, И. Г. Фридлендер, А. П. Баталов и др.; Под общ. ред. В. П. Булатова и И. Г. Фридлендера. – СПб.: Политехника, 1993. – 495 с.
33. Романов А. Б., Устинов Ю. П., Кузнецов А. И. Метрология, стандартизация, сертификация. Учебное пособие. СПб., СПбГТИ (ТУ), 2004. – 155 с.
34. Палей М. А., Романов А. Б., Брагинский В. А. Допуски и посадки: Справочник в 2 ч. – 8-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Политехника, 2001. – ч. 1 – 576 с., ч. 2 – 608 с.
35. Биргер И.А. Техническая диагностика. – М.: Машиностроение, 1978. – 239 с.
36. Коллакот Р. Диагностика повреждений. – М.: Мир, 1989. – 512 с.
37. Генкин М.Д., Соколова А.Г. Виброакустическая диагностика машин и механизмов. – М.: Машиностроение, 1987. – 288 с.
38. Химмельблау Д. Обнаружение и диагностика неполадок в химических и нефтехимических процессах. – Л.: Химия, 1983. – 352 с.

39. Муромцев Ю.Л. Безаварийность и диагностика нарушений в химических производствах. – М.: Химия, 1990. – 144 с.
40. Статистические методы в инженерных исследованиях (лабораторный практикум): Учебное пособие/ В.П. Бородюк, А. П. Вощинин, А. З. Иванов и др.; Под ред. Г. К. Круга. – М.: Высш. школа, 1983. – 216 с.
41. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения: Учебник для втузов/ А. И. Якушев, Л. Н. Воронцов, Н. М. Федотов. – М.: Машиностроение, 1986. – 352 с.
42. Струков В.Г. Надежность механического оборудования: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во АСВ; Белгород: Изд-во БГТУ им. В.Г. Шухова, 2005. – 113 с.
43. Абиев Р.Ш. Основы квалиметрии в химической технике и технологии: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во "Менделеев", 2006. – 213 с.
44. Абиев Р.Ш., Струков В.Г. Надежность механического оборудования и комплексов. СПб.: Проспект науки, 2012. – 222 с.