Вариант 18

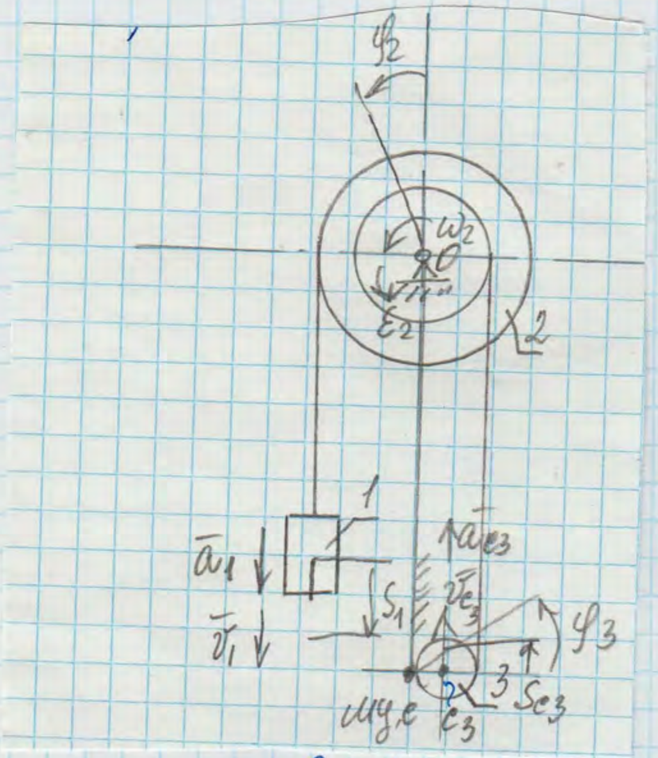


Рис 1.

Дано: $m_1 = 6m$; $m_2 = 3m$; $m_3 = m$; $r_2 = 2r$; $R_2 = 3r$; $r_3 = r$; $i_2 = r\sqrt{5}$

Найти: a_1; S_1; O_2; T_1; T_2; T_3; $F_{сц}$.

I. Решение с помощью теоремы об изменении кинетической энергии

1. Система образована грузом 1, неподвижным блоком 2 и подвижным блоком 3, связанных невесомыми нерастяжимыми нитями.

2. Изображаем систему в произвольный момент времени на рис. 1.

3. Кинематический анализ механизма.

Груз 1 движется поступательно со скоростью v_1. Блок 2 вращается вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью $\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{v_1}{3r}$.

Каток 3 совершает плоское движение. Скорость оси катка равна половине скорости точки, контактирующей с подвижным участком нити: $v_{c3} = \frac{\omega_2 \cdot r_2}{2} = \frac{v_1}{r \cdot 3} \cdot \frac{2r}{2} = \frac{v_1}{3}$.

Мгновенный центр скоростей (мцс) подвижного блока 3 находится в точке контакта с неподвижным участком нити. Угловая скорость катка $\omega_3 = \frac{v_{c3}}{r_3} = \frac{v_1}{3r}$.

4. Кинетическая энергия системы складывается из кинетических энергий тел, составляющих систему

$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ – поступательное движение;

$T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2} = \frac{15 m r^2}{2} \cdot \frac{v_1^2}{9r^2} = \frac{5}{6} v_1^2 m$ – вращательное движение;

$J_2 = m_2 \cdot i_2^2 = 3m \cdot r^2 \cdot 5 = 15 m r^2$ – момент инерции блока 2

$T_3 = \frac{J_3 \omega_3^2}{2} + \frac{m_3 v_{c3}^2}{2} = \frac{m r^2}{2 \cdot 2} \cdot \frac{v_1^2}{9r^2} + \frac{m}{2} \cdot \frac{v_1^2}{9r^2} = \frac{m v_1^2}{12}$ – плоское движение;

$J_3 = m_3 r_3^2/2 = m r^2/2$ – момент инерции сплошного однородного катка 3

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 3m v_1^2 + \frac{5}{6} m v_1^2 + \frac{m v_1^2}{12} = \frac{m_{пр} v_1^2}{2},$$

где $m_{пр} = 6m + \frac{5}{3}m + \frac{m}{6} = 7{,}833m$ – приведенная масса системы

5. На систему действуют внешние силы:

P_1, P_2, P_3 – силы тяжести;

O_x, O_y – составляющие реакции оси блока;

Элементарное перемещение системы:

dS_1 – элементарное перемещение груза 1;

$d\varphi_2$ – элементарный поворот блока 2;

dS_{c3} – элементарное перемещение оси блока 3;

$d\varphi_3$ – элементарный поворот катка 3.

Связь между элементарными перемещениями тел системы: $d\varphi_2 = \frac{dS_1}{R_3} = \frac{dS_1}{3r}$;

$dS_{c3} = dS_1 \cdot \frac{r_2}{R_2} = \frac{r_2}{2R_2} = \frac{dS_1}{3}$; $d\varphi_3 = \frac{dS_{c3}}{r_3} = \frac{dS_1}{3r}$.

6. Вычисляем сумму элементарных работ всех внешних сил:

$$\sum dA^e = P_1 dS_1 - P_2 dS_{c3} = 6mg\,dS_1 - mg \cdot \frac{dS_1}{3} = 5{,}667 mg\,dS_1.$$

Т.к. силы P_1 и O приложены к неподвижным точкам, их работа равна нулю.

7. Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$$dT = \sum dA^e$$

$$d\left(m_{пр}\frac{v_1^2}{2}\right) = 5{,}667\,mg\,dS_1,$$

$$m_{пр} \cdot \frac{v_1^2}{2} = 5{,}667\,mg\,dS_1;$$

$$m_{пр} v_1\,dv_1 = 5{,}667\,mg\,dS_1;$$

$$m_{пр} \cdot v_1 \frac{dv_1}{dt} = 5{,}667\,mg\frac{dS_1}{dt}$$

$$m_{пр} \cdot a_1 = 5{,}667\,mg;$$

$$a_1 = \frac{5{,}667\,mg}{7{,}833\,m} = 0{,}723g. \qquad \underline{a_1 = 0{,}723g.}$$

8. Определяем натяжения нитей. Для этого рассматриваем движение каждого тела отдельно.

Схемы сил, действующих на каждое тело, показаны на рис. 2.

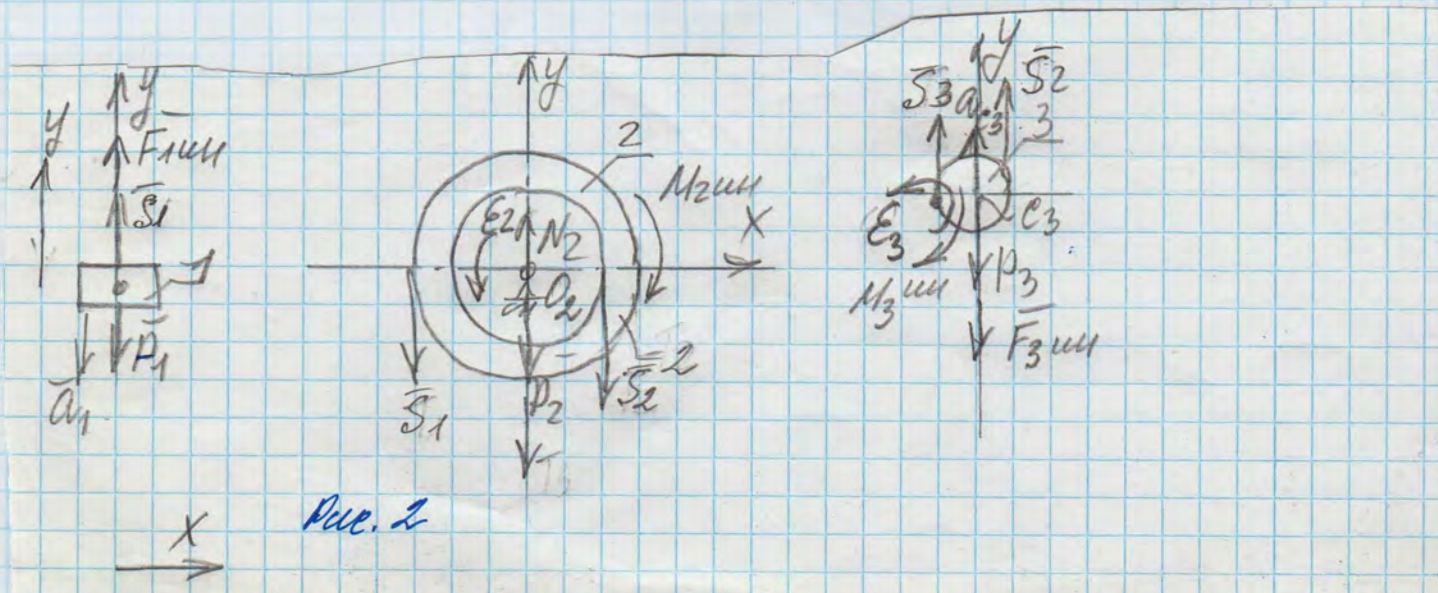


Рис. 2

Составляем дифференциальное уравнение поступательного движения тела 1:

$+m_1\bar a_1 = {}^{+}\bar P_1 + \bar S_1$; в проекции на ось y: $m_1 a_1 = P_1 - S_1$

$S_1 = 6mg - 6ma_1 = 6m(g - 0{,}723g) = 1{,}662\,gm.$

Дифференциальное уравнение движения блока 2

$J_2\varepsilon_2 = S_1\cdot 3r - S_2\cdot 2r;\qquad 15mr^2\cdot\dfrac{0{,}723g}{3r} = 1{,}662\,mg\cdot 3r - S_2\cdot 2r$

$$S_2 = \frac{1{,}662\cdot 3 - 15\cdot 0{,}723/3}{2} = 0{,}686\,mg.$$

Дифференциальное уравнение движения тела 3

$m\cdot a_{c3} = S_2 + S_3 - m_3 g;$

$S_3 = mg + 0{,}241\,m\cdot g - 0{,}686\,mg = 0{,}556\,mg.$

$\underline{S_1 = 1{,}662\,mg;\ S_2 = 0{,}686\,mg;\ S_3 = 0{,}556\,mg.}$

9. Определяем реакцию оси блока 2

Рассматриваем отдельно блок 2, применяя теорему о движении центра масс системы

$m_2\bar a_0 = \bar S_1' + \bar S_2 + \bar P_2 + \bar O_x + \bar O_y.$

Т.к. блок неподвижен, $a_0 = 0$.

В проекциях на оси координат:

$\Sigma F_x = 0;\quad O_x = 0$

$\Sigma F_y = 0;\ -m_2 g + O_y - S_1 - S_2 = 0;\ O_y = 3mg + 1{,}667\,mg + 0{,}686\,mg =$
$= 5{,}353\,mg.$

$\underline{O_x = 0;\quad O_y = 5{,}353\,mg}$

Таблица 1

a_1	ε_2	a_{c3}	ε_3	S_1	S_2	S_3	O_x	O_y
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

1. Показываем на рис.3 тела, составляющие систему- груз 1, блок 2, подвижный блок 3.

2. Изображаем активные силы: силы тяжести $\bar P_1$, $\bar P_2$ и $\bar P_3$.

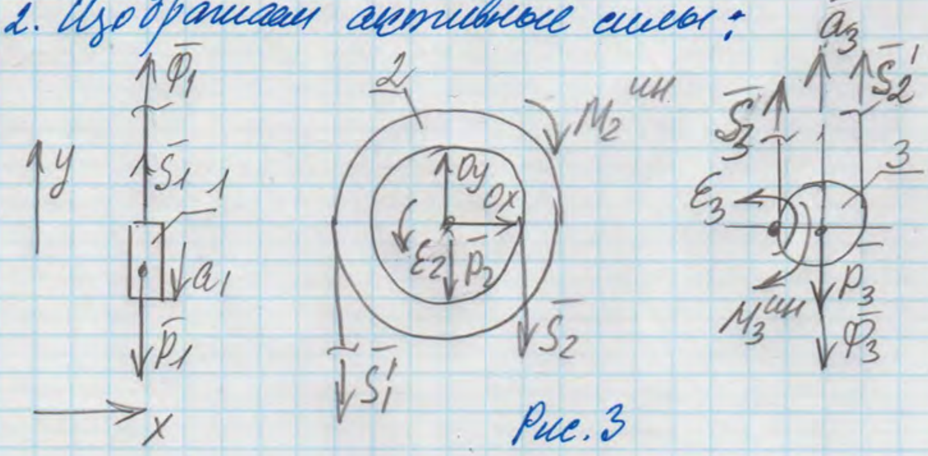


Рис.3

3. Изображаем реакции связей:

O_x, O_y - составляющие реакции оси блока 2.

$S_1, S_1'; S_2; S_2'; S_3$ - натяжение нитей ($S_1=S_1'$; $S_2=S_2'$).

4. Силы инерции.

Силы инерции точек груза 1, движущегося поступательно, приводятся к главному вектору $\bar\Phi_1=-m_1\bar a_1$; $\Phi_1=m_1a_1$

Силы инерции точек блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси, приводятся к главному моменту

$M_2^{ин}=J_2\varepsilon_2=15mr^2\cdot\frac{a_1}{3r}=5mra_1$.

Каток 3 совершает плоское движение. В качестве центра приведения выбираем ось катка, тогда главный вектор $\bar\Phi_3=-m_3\bar a_3$; ($\Phi_3=m\cdot\frac{a_1}{3}$) и главный момент сил инерции

$M_3^{ин}=J_3\varepsilon_3=\frac{mr^2}{2}\cdot\frac{a_1}{3\cdot r}=\frac{mra_1}{6}$.

5. Составляем уравнения кинетостатики, вытекающие из принципа Даламбера, для каждого тела. Активные силы, реакции и силы инерции образуют плоскую систему

Груз 1 $\sum F_{iy}=0$; $\Phi_1+S_1-P_1=0$; (1)

Блок 2 $\sum F_{ix}=0$; $O_x=0$; (2)

$\sum F_{iy}=0$; $O_y-P_2-S_1-S_2=0$; (3)

$\sum M_{iO}=0$; $-S_1R_2+S_2r_2+M_2^{ин}=0$; (4)

Блок 3 $\sum F_{iy}=0$; $\bar S_2+S_3-P_3-\Phi_3=0$;

$\sum M_{iC}=0$; $M_{3ин}+S_3\cdot r-S_2\cdot r=0$; (5)

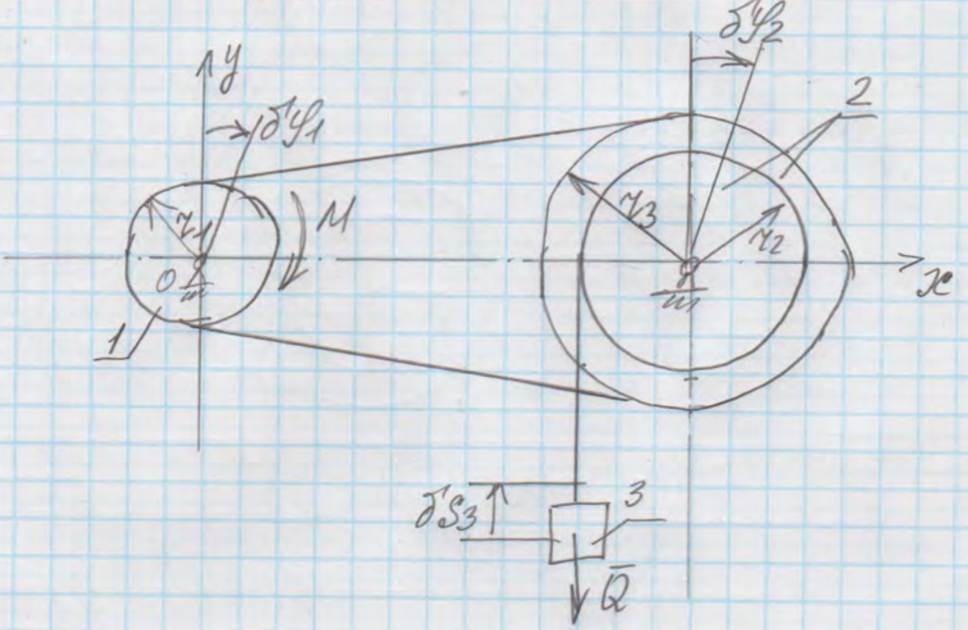
Решаем полученную систему уравнений относительно $a_1; S_1; S_2; S_3; O_x; O_y$.

$$\begin{cases} 6ma_1+S_3-6mg=0; \\ O_x=0 \\ O_y-3mg-S_1-S_3=0; \\ -S_1\cdot 3\cancel{r}+S_2\cdot 2\cancel{r}+15m\cancel{r}^2\cdot\frac{a_1}{3\cancel{r}}=0; \\ S_2+S_3-mg-m\cdot\frac{a_1}{3}=0 \\ \frac{m\cancel{r}^2}{2}\cdot\frac{a_1}{3\cancel{r}}+S_3r-S_2r=0; \end{cases}$$

Решаем полученную систему уравнений. Результаты решения сводим в табл. 2

a_1	ε_2	a_{c3}	ε_3	S_1	S_2	S_3	O_x	O_y
$0{,}729g$	$0{,}241\frac{g}{r}$	$0{,}241g$	$0{,}241\frac{g}{r}$	$1{,}661mg$	$0{,}686mg$	$0{,}556mg$	0	$5{,}351mg$

Вариант 8   Дано: $r_1 = 20$ см; $r_2 = 30$ см; $r_3 = 40$ см;
$M = 100$ Н·м
Найти: Q



1. Механическая система содержит идеальные связи (все виртуальные работы на реакциях этих связей равны 0), стационарные (неизменяемые во времени). Число степеней свободы равно 1, т.к. при мысленной остановке одного из звеньев системы останавливается вся система. Принцип возможных перемещений применим.

Активные силы данной механической системы: пара сил с моментом M, приложенная к колесу 1 и вес груза 3 Q.

2. Сообщаем возможное перемещение колесу 1, повернув его на угол $\delta\varphi_1$ по часовой стрелке. При этом колесо 2 поворачивается на угол $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1 \cdot \frac{r_1}{r_3} = \delta\varphi_1 \cdot \frac{20}{40} = \frac{1}{2}\delta\varphi_1$.
Груз 3 при этом перемещается на расстояние
$\delta S_3 = \delta\varphi_2 \cdot r_2 = \frac{1}{2}\delta\varphi_1 = \delta\varphi_1 \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3}$.

3. Запишем уравнение принципа возможных перемещений для данного механизма. Т.к. активных сил две (момент M и вес Q), в уравнении 2 слагаемых

$\Sigma \delta A_k^{акт} = 0$; $M\delta\varphi_1 - Q \cdot \delta S_3 = 0$,

$M \cancel{\delta\varphi_1} - Q \cdot \cancel{\delta\varphi_1} \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_3} = 0$;

$Q = \frac{M \cdot r_2}{r_1 \cdot r_2}$.

Подставляем численные значения $Q = \frac{100 \cdot 0{,}30}{0{,}2 \cdot 0{,}4} = 375$ Н.

$Q = 375$ Н