**3 Кручение**

**3.1 Основные теоретические положения**

Кручением (чистым кручением) называется такое напряженное состояние, при котором в поперечном сечении бруса возникает единственный внутренний силовой фактор - крутящий момент Мz. Все остальные внутренние силовые факторы (изгибающие моменты Mx, My, продольная N и поперечные силы Qx, Qу) равны нулю [1].

Как правило, слово «чистое» опускается и, имея в виду чистое кручение говорят просто кручение. Брус, работающий на кручение, называют валом.

Опытные данные дают основание для следующих допущений:

* сечения плоские до деформации остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений);
* радиусы, проведенные в них, остаются прямыми.

Это позволяет полагать, что поперечные сечения поворачиваются вокруг оси вала в своей плоскости на некоторый угол ϕ. Угол ϕ называют углом закручивания.

При этом в поперечном сечении вала возникают только касательные напряжения сдвига τ.

Если рассматривать деформации в пределах упругости, то между относительным сдвигом γ и напряжениями τ существует линейная зависимость, которая может быть выражена формулой:

τ = Gγ

Данную зависимость называют закон Гука при сдвиге. Здесь G - коэффициент пропорциональности, который называется модулем упругости при сдвиге (модуль сдвига) или модулем упругости второго рода.

Значения модуля упругости при сдвиге зависят от свойств материала, их получают экспериментально, в справочной литературе имеются таблицы, где приведены значения модуля сдвига.

Основные расчетные формулы приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 Расчетные формулы

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Крутящий момент | Мz = Мz(z) | | Мz находится при построении эпюр |
| Наибольший по длине вала крутящий момент | Мz наиб | | Мz наиб  находится из эпюры |
| Закон Гука | τ=Gγ | | G - модуль упругости второго рода или модуль сдвига,  γ относительный сдвиг |
| Касательное напряжение | τ = Мzρ /Iρ | | Iρ - полярный момент инерции сечения |
| Наибольшее по сечению касательное напряжение | τmax = Мz /Wρ | | Wρ - полярный момент сопротивления сечения (Wρ = Iρ / r) |
| Наибольшее по длине вала касательное напряжение | τнаиб  = Мzнаиб /Wρ | |  |
| Угол закручивания | φ = Мz l/ G Iр | | G Iр жесткость сечения при кручении |
| Относительный угол закручивания | θ = dφ/ dz | | θ(z) - эпюра относительного угла закручивания  θ = Мz / G Iр - при постоянной жесткости |
| Наибольший относительный угол закручивания | θ наиб | | Находится из эпюры относительного угла закручивания |
| Относительный сдвиг | γ = ρ θ = ρ dφ/ dz | |  |
| Условие прочности | τ наиб  ≤ [τ] | | [τ] –допускаемое касательное напряжение |
| Условие жесткости | θ наиб  ≤ [θ] | [θ] – допускаемый относительный угол закручивания | |

**3.2 Условие задачи и варианты заданий**

Жестко защемленный одним концом вал круглого поперечного сечения скручивается моментами M1, M2, M3, M4. Исходные данные к задаче выбираются из таблицы 3.2 и схем на рис.3.1 в соответствии с вариантом задания.

Таблица 3.2 Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № варианта | № схемы (рис.3.1) | Расстояние, м | | | Моменты, кНм | | | | [θ], рад/м |
| а | b | c | M1 | M2 | M3 | M4 |
| 15 | 15 | 2 | 1,7 | 2 | 1,7 | 1,6 | 0,6 | 0,7 | 0,028 |

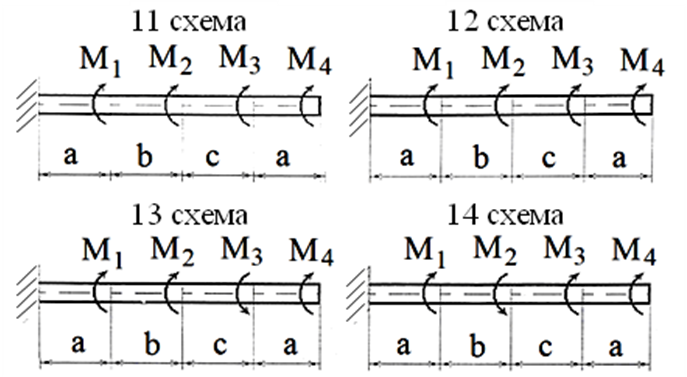
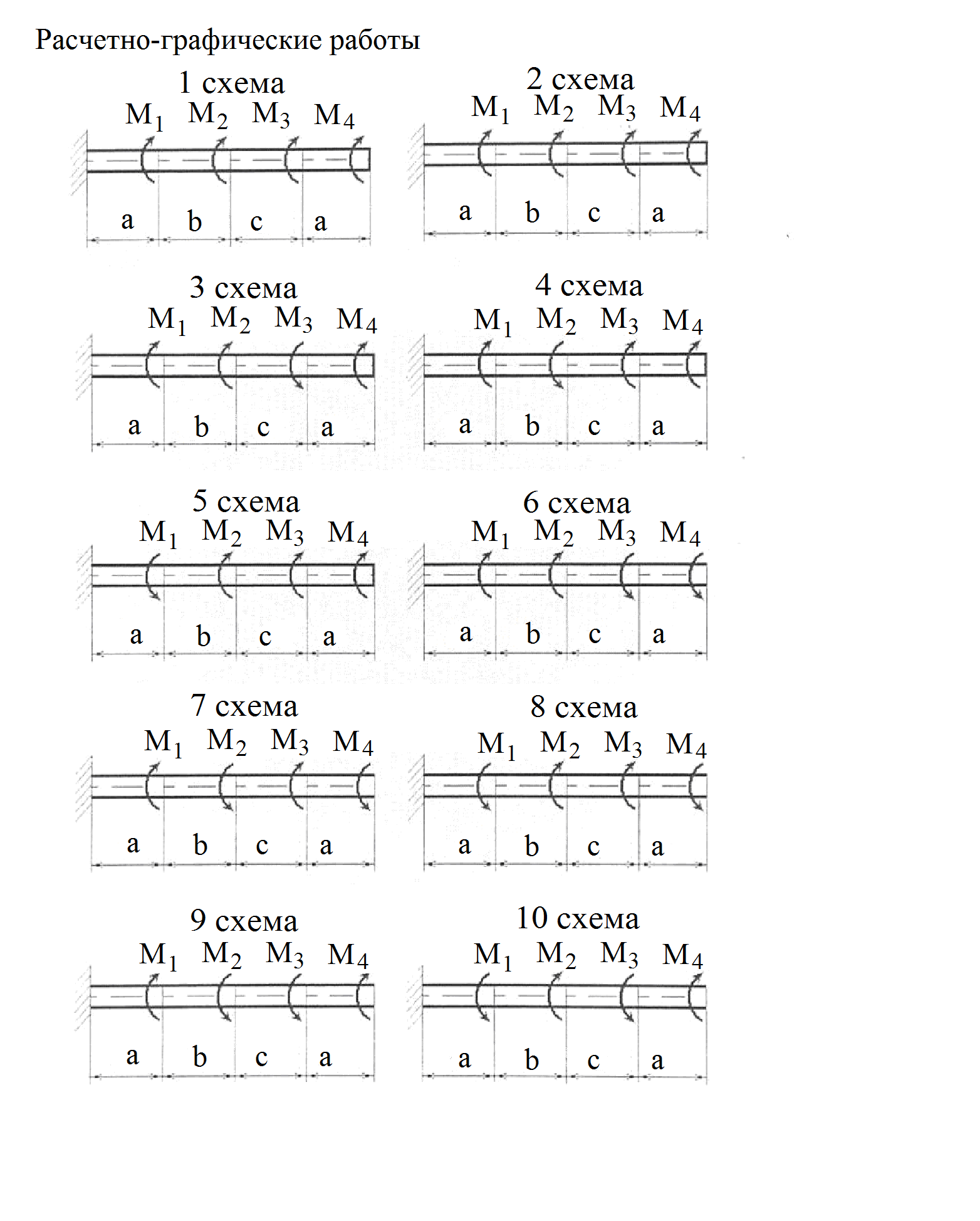


Рис.3.1 Варианты расчетных схем

1. Нарисуйте схему вала в масштабе. На рисунке проставьте размеры стержня и значения нагрузки (моментов) в численном виде.

2. Определите реакцию в заделке из уравнения равновесия.

3. Найдите аналитические выражения для крутящего момента Mz = f(z) на каждом участке вала и постройте (в выбранном масштабе) эпюру крутящего момента.

4. Установите опасное сечение и определите диаметр вала из расчета на прочность: τ = Mz / Wρ ≤ [τ]. Допускаемое напряжение [τ] = 80 МПа, модуль сдвига G= 8·104МПа. Округлите размеры диаметров до ближайшего большего значения, равного 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм.

5. Проверьте соблюдение условия жесткости вала (θ = Мz / G Iр ≤ [θ]). Если условие жесткости не соблюдается, то скорректируйте диаметр сечения вала.

6. Постройте эпюру τ = τ (ρ) в опасном сечении.

7. Постройте эпюру τ = τ (z).

8. Постройте эпюру углов закручивания φ =φ(z) (φ= ∫Mz dz/(G Iρ)), приняв жесткость вала постоянной.

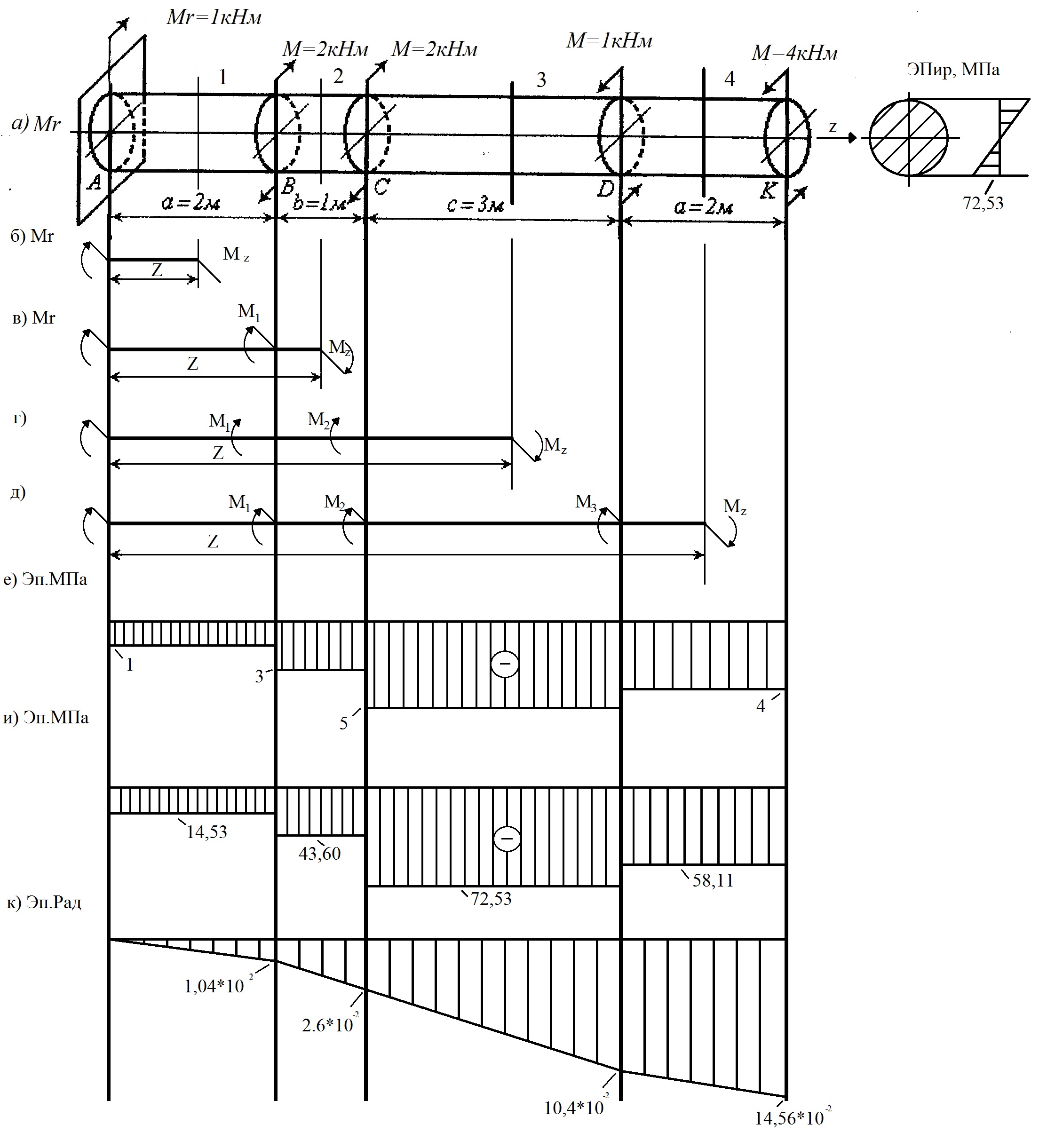
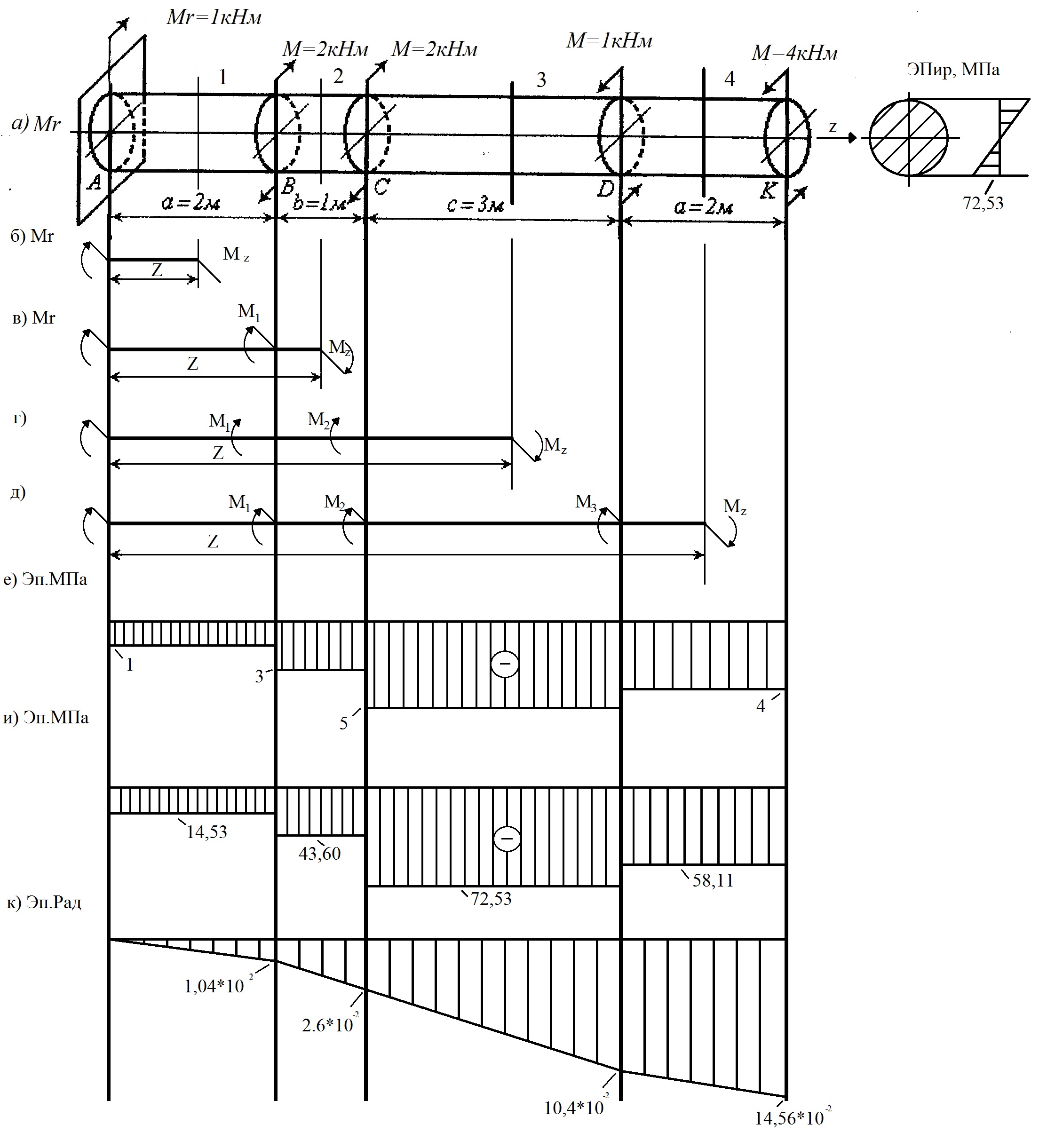
**3.3 Пример выполнения задания**

**3.3.1 Определение опорных реакций**

Расчетную схему вала выбираем согласно варианту 00 (таблица 3.3 и рис.3.2а). На схеме показаны геометрические размеры вала и действующие на него моменты.

Таблица 3.3 Исходные данные

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № варианта | № схемы | Расстояние, м | | | Моменты, кНм | | | | [θ], рад/м |
| а | b | c | M1 | M2 | M3 | M4 |
| 15 | 15 | 2 | 1,7 | 2 | 1,7 | 1,6 | 0,6 | 0,7 | 0,028 |



MR = 1 кНм

M1 = 2 кНм

M2 = 2 кНм

M3 = 1 кНм

M4 = 4 кНм

а)

б)

в)

г)

д)

е)

ж)

з)

MR

MR

MR

MR

Эпюра τ(z), МПа

Эпюра φ, рад

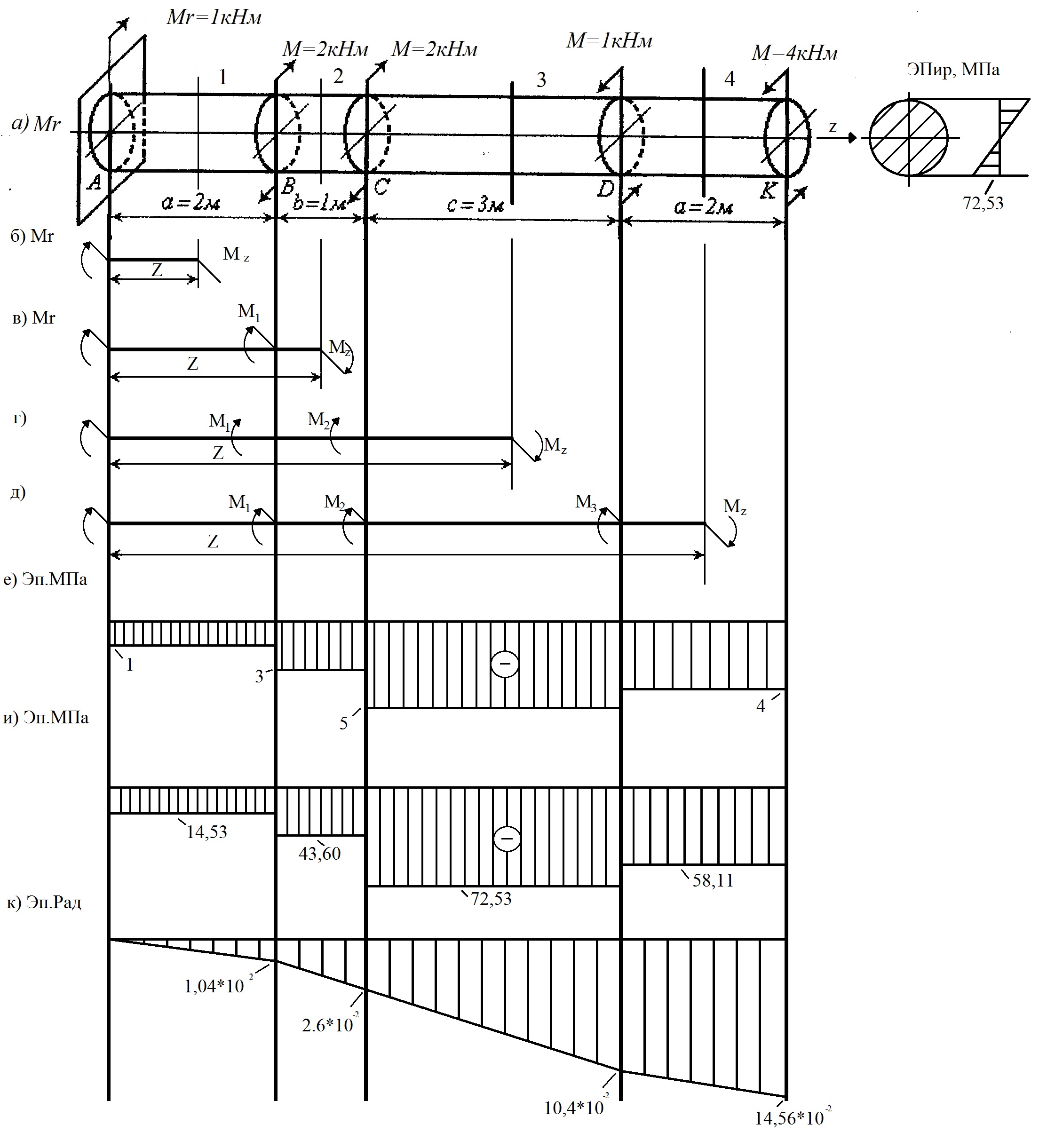
Эпюра

Mz, кНм

Эпюра τ(ρ), МПа

72,89

MR



1

3

5

4

14,58

43,73

72,89

1,04·10-2

2,6·10-2

10,4·10-2

14,56·10-2

58,31

Рис.3.2 Пример графических построений при решении задачи

Составим уравнения равновесия для вала(рис.3.2а), связь (заделку) отбросим, заменив ее действие реакцией. При заданной нагрузке – это момент MR.

В расчетах принимаем, что знак «+» соответствует повороту вала по часовой стрелке, если смотреть с положительного направления оси Z. Сумма моментов сил относительно оси Z равна нулю:

ΣМz = 0,

МR + М1 + М2 – М3 – М4 = 0,

откуда

МR = – М1 – М2 + М3 + М4 = – 2 – 2 + 1 +4 = 1 кНм.

Проверка ΣМz = 0: 1 + 2 + 2 – 1 – 4 =0.

**3.3.2 Построение эпюры крутящего момента Мz =f(z)**

**Первый участок вала с координатами 0 ≤ z ≤ а*.***

Разрежем (мысленно) вал (рис.3.2а) сечением 1 и рассмотрим равновесие левой отсеченной части (рис.3.2б), действие отброшенной (правой части) заменим реакцией (крутящий момент Мz). Условие равновесия левой отсеченной части следующее:

сумма моментов сил относительно оси Z равна нулю:

ΣМz = 0,

МR + Мz = 0,

откуда

Мz = – МR = – 1 кНм.

На данном участке вала крутящий момент постоянен Мz = – 1 кНм (рис.3.2е).

Между моментом Мz и распределенной нагрузкой существует дифференциальная зависимость:

m = dМz / dz,

где m - распределенный внешний момент.

Выполним проверку. Так как Мz на данном участке постоянен, то:

dМz / dz = 0,

Действительно на участке с координатами 0 ≤ z ≤ а распределенная нагрузка (распределенный момент сил)отсутствует (m = 0).

**Второй участок вала с координатами а ≤ z ≤ (а + b)*.***

Разрежем вал сечением 2 и рассмотрим равновесие левой отсеченной части (рис. 3.2в), действие отброшенной части заменим реакцией Мz.

Сумма моментов сил относительно оси Z равна нулю:

ΣМz = 0,

МR + М1 + Мz = 0,

откуда

Мz = – МR – М1 = – 1 – 2 = – 3 кНм.

На данном участке вала крутящий момент постоянен Мz = – МR – М1 = – 3 кНм (рис.3.2е), поэтому:

dМz / dz = 0.

Действительно на этом участке распределенная нагрузка (распределенный момент сил)отсутствует (m = 0).

**Третий участок вала с координатами (а + b)≤ z ≤ (а + b + с)*.***

Разрежем вал сечением 3 и рассмотрим равновесие левой отсеченной части (рис.3.2г), действие отброшенной части заменим реакцией Мz.

Сумма моментов сил относительно оси Z равна нулю:

ΣМz = 0,

МR + М1+ М2 + Мz = 0,

откуда

Мz = – МR – М1 – М2 = – 1 – 2 – 2 = – 5 кНм.

На данном участке вала крутящий момент постоянен Мz = –МR –М1 –М2 = –5 кНм. (рис.3.2е), поэтому:

dМz / dz = 0.

Действительно на этом участке распределенная нагрузка (распределенный момент сил) отсутствует (m = 0).

**Четвертый участок вала с координатами (а + b + с) ≤ z ≤ (а + b + с + а).**

Разрежем вал сечением 4 и рассмотрим равновесие левой отсеченной части (рис. 3.2д), действие отброшенной части заменим реакцией Мz.

Сумма моментов сил относительно оси Z равна нулю:

ΣМz = 0,

МR + М1+ М2 + Мz – М3 = 0,

откуда

Мz = – МR – М1 – М2 + М3 = – 1 – 2 – 2 +1 = – 4 кНм.

На данном участке вала крутящий момент постоянен Мz = – МR – М1 – М2 + М3 = – 4 кНм. (рис.3.2е), поэтому:

dМz / dz = 0,

Действительно на этом участке распределенная нагрузка (распределенный момент сил)отсутствует (m = 0).

Крутящий момент Мz  имеет наибольшее по абсолютной величине значение Мz наиб = 5кНм на участке вала с координатами (а + b) ≤ z ≤ (а + b + с)*.* Сечения на данном участке являются равноопасными.

**3.3.3 Подбор размеров поперечного сечения**

Размеры поперечного сечения подбираем по касательным напряжениям в опасном сечении:

τнаиб = Мz наиб / Wρ.

Допускаемое напряжение в соответствии с условиями задачи:

[τ] = 80 МПа = 80·106 Па =80·103 кН/м2

Условие прочности по касательным напряжениям

τнаиб = Мz наиб / Wρ ≤ [τ].

Решая неравенство относительно Wρ получаем:

Wρ ≥ Мzнаиб / [τ],

Wρ ≥ 4/(80·103) = 50·10-6м3 = 50 см3.

Полярный момент сопротивлениякруглого сечения равен:

Wρ = πd3/16 ≈ 0,2d3,

откуда

d ≥ ≥ ≥ 6,3см ≥ 63мм.



Округляем полученное значение в соответствии с условиями задачи в большую сторону. Таким образом, диаметр круглого поперечного сечения d = 70мм. Площадь сечения равна:

F = πd2/4 = 3846 мм2 = 38,46 см2.

Полярный момент сопротивления равен:

Wρ = 0,2d3 =0,2·703 = 68600мм3 = 68,6см3.

**3.3.4 Проверка вала на жесткость**

Проверяем соблюдение условия жесткости вала для опасных сечений с координатами (а + b)≤ z ≤ (а + b + с):

θ = Мz / (GIр) ≤ [θ],

где GIр - жесткость сечения вала при кручении;

Iρ - полярный момент инерции сечения. Для круглого сечения:

Iρ = πd4/32 ≈ 0,1d4 = 0,1·0,074 = 0,2401·10-5м4;

G – модуль сдвига (G=8·1010 Па (Н/м2)).

Тогда GIρ = 8·1010 ·0,2401·10-5 = 1,921·105 Нм2

Проверка условия жесткости вала:

5000 / 1,921·105 = 0,026 рад /м.

Так как по условию задачи [θ] =0,030 рад/м, то условие жесткости соблюдается.

**3.3.5 Построение эпюры касательных напряжений τ = f(z)**

В соответствии с формулой τ= Мz / Wρ, строим эпюру τ = f(z) (рис.3.2ж). Значения берем с эпюры крутящих моментов Мz, а полярный момент сопротивления Wρ= 68,6см3= 68,6·10-6 м3:

- на первом участке (0 ≤ z ≤ а):

τ= – 1·103/68,6·10-6 = – 0,01458·109Па = – 14,58МПа,

- на втором участке (а ≤ z ≤ (а+b)):

τ= – 3·103/68,6·10-6 = – 0,04373·109Па = – 43,73МПа,

- на третьем участке ((а +b) ≤ z ≤ (а + b + с)):

τ= – 5·103/68,6·10-6 = – 0,07289·109Па = – 72,89МПа,

- на четвертом участке ((а + b + с)≤ z ≤ (а + b + с + а)):

τ= – 4·103/68,6·10-6 = – 0,05831·109Па = – 58,31МПа.

**3.3.6 Построение эпюры касательных напряжений τ = f(ρ)**

Эпюры касательных напряжений τ = f(ρ) (рис.3.2и) строим по опасному сечению. В соответствии с принятыми допущениями в этом сечении τ = f(ρ) изменяется по линейному закону, максимальное значение касательное напряжение τ имеет при ρ= r = d/2. τ = 72,89МПа.

**3.3.7 Построение эпюры углов закручивания φ = f(z)**

Эпюра (рис.3,2з) перемещений φ сечений относительно заделки (z = 0) строим по участкам стержня, используя формулу:

φ = ∫ Мz(z) dz / (GIρ).

Здесь жесткость (GIρ) =1,921·105 Нм2.

**Первый участок с координатами 0 ≤ z ≤ а.**

Так как крутящий момент на этом участке постоянен и равен 1кНм, то угол поворота сечения с координатой z = а относительно заделки составляет:

φ1 = – 1000·2/(GIρ) = – 2000/(1,921·105) = – 1,041·10-2 Рад = – 0,5968 град.

**Второй участок с координатами а ≤ z ≤ (а + b)*.***

Так как крутящий момент на этом участке постоянен и равен 3 кНм, то угол поворота сечения с координатой z = (а + b) относительно сечения с координатой z = а составляет:

– 3000/GIρ = – 3/1,921·10-2 = – 1,56·10-2 рад.

Угол поворота сечения с координатой z = (а + b) относительно заделки составляет:

φ2 =φ1 – 3000/GIρ = – (1,041+1,56) ·10-2 Рад = – 2,6·10-2 рад = – 1,49 град.

**Третий участок с координатами (а + b) ≤ z ≤ (а + b + с).**

Так как крутящий момент на этом участке постоянен и равен 5кНм, то угол поворота сечения с координатой z = (а +b +с) относительно сечения с координатой z = (а + b) составляет:

– 5000·3/ (GIρ) = – 15/1,921·10-2 =– 7,808·10-2 рад = – 4,476 град

Угол поворота сечения с координатой z = (а + b + с) относительно заделки

φ3 = φ2 – 15000 / (GIρ) =φ3 = – (2,6 + 7,808)·10-2 = – 10,4·10-2 рад = – 5,96 град.

**Четвертый участок с координатами (а + b + с)≤ z ≤ (а + b + с + а)*.***

Так как крутящий момент на этом участке постоянен и равен 4кНм, то угол поворота сечения с координатой z = (а + b +с + а)относительно сечения с координатой z = (а + b+с) составляет:

– 8000/(GIρ) = – 8/1,921·10-2 = – 4,165·10-2 рад,

φ4 = φ3 – 8000/(GIρ) = – (10,4 + 4,165)·10-2 = – 14,56 рад = – 8,35 град.

По точкам строим эпюру углов закручивания сечений относительно заделки φ = f(z). Правый конец вала относительно заделки переместится на величину φ4 = – 8,35град. Знак «**-**» говорит о том, что правый конец вала относительно левого (начало координат) повернется против часовой стрелки.