ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 10. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

10.1. Цель: изучение методов решения нелинейных уравнений и использование различных функций пакета MATLAB для их решения.

10.2. Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.

2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи;
- m-файл для решения задачи.

10.3. Методические рекомендации.

10.3.1. Основные понятия и определения

Рассмотрим нелинейное уравнение с одним неизвестным

$$f(x) = 0. \qquad (10.1)$$

Требуется найти решение x уравнения (10.1) с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

Если $f(x)$ – многочлен, отличный от нулевого, то уравнение (10.1) называют алгебраическим, иначе – трансцендентным (трансцендентные функции – аналитические функции, не являющиеся алгебраическими, например показательные, логарифмические, тригонометрические и т.п.).

Большинство методов решения нелинейных уравнений предполагает, что известны достаточно малые окрестности, в каждой из которых имеется только один корень уравнения. Принимая за начальное приближение корня одну из точек этой окрестности, можно вычислить искомый корень с заданной точностью. Таким образом, задача приближенного вычисления корней уравнения (10.1) распадается на две:

– отделение корней уравнения, то есть отыскание достаточно тесных промежутков, в каждом из которых содержится только один корень уравнения;

– вычисление корня с заданной точностью, если известно некоторое начальное его приближение в области, не содержащей других корней.

10.3.2. Локализация (отделение) корней уравнения

Графические методы решения нелинейных уравнений – одни из самых простых. Однако применять их можно лишь для грубой оценки корней. С другой стороны, графические методы можно использовать для решения задачи отделения корней.

Суть графического метода решения нелинейных уравнений состоит в следующем. Необходимо построить график функции $y = f(x)$, а затем найти абсциссы точек пересечения этого графика с осью x, которые и будут приближенными значениями действительных корней уравнения. На рисунке 10.1 видно, что функция четырежды пересекает ось абсцисс, следовательно, уравнение имеет соответствующее число корней. Расположены корни на интервалах [–0,5; 0], [0; 0,5], [1,5; 2], [2; 2,5].

Для выделения интервалов, в которых находятся действительные корни уравнения $f(x)=0$, если $f(x)$ – непрерывная функция, можно воспользоваться следующими предположениями:

– если на концах некоторого отрезка $[a, b]$ непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков $f(a)* f(b) < 0$, то на этом отрезке уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень, при этом отрезок $[a, b]$ называют интервалом изоляции корня, а значения a и b называют пределами интервала изоляции;

– если при этом функция $f(x)$ имеет первую производную, не меняющую знака, то корень единственный.

Теперь рассмотрим методы вычисления корней с заданной точностью (уточнение корней).

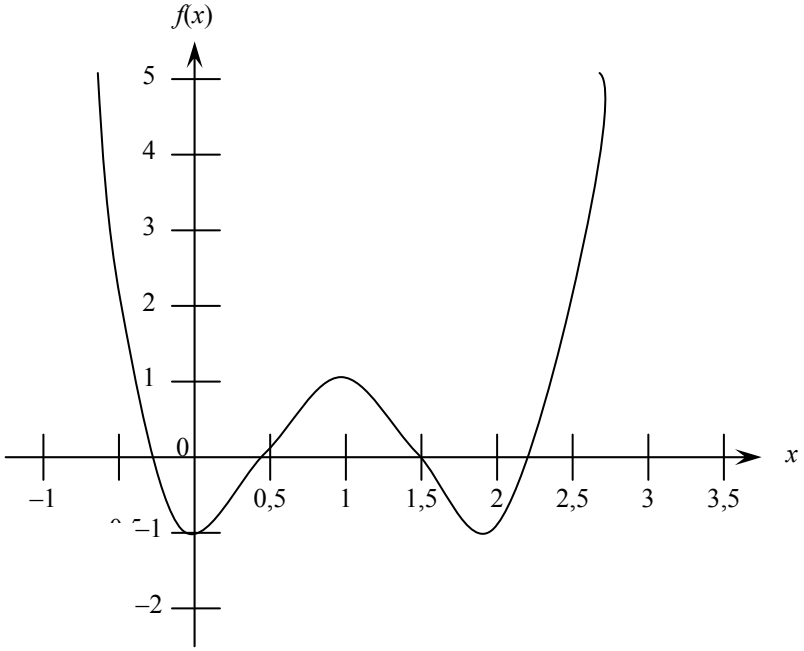

Рисунок 10.1 – Графическое решение уравнения $y = f(x)$

10.3.3. Метод половинного деления (метод дихотомии)

Метод половинного деления (дихотомии) заключается в следующем. Пусть дано уравнение $f(x) = 0$, где функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)*f(b) < 0$. Для отыскания корня уравнения $f(x) = 0$, принадлежащего отрезку $[a, b]$, этот отрезок необходимо поделить пополам и принять за первое приближение корня точку c, которая является серединой отрезка $[a, b]$. Далее из двух отрезков – $[a, c]$ и $[c, b]$ – выбирается тот, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Это будет означать сужение интервала изоляции корня уравнения $f(x) = 0$. Новый суженный отрезок снова делится пополам, и проводятся аналогичные вычисления. Графическая интерпретация метода половинного деления приведена на рисунке 10.2.

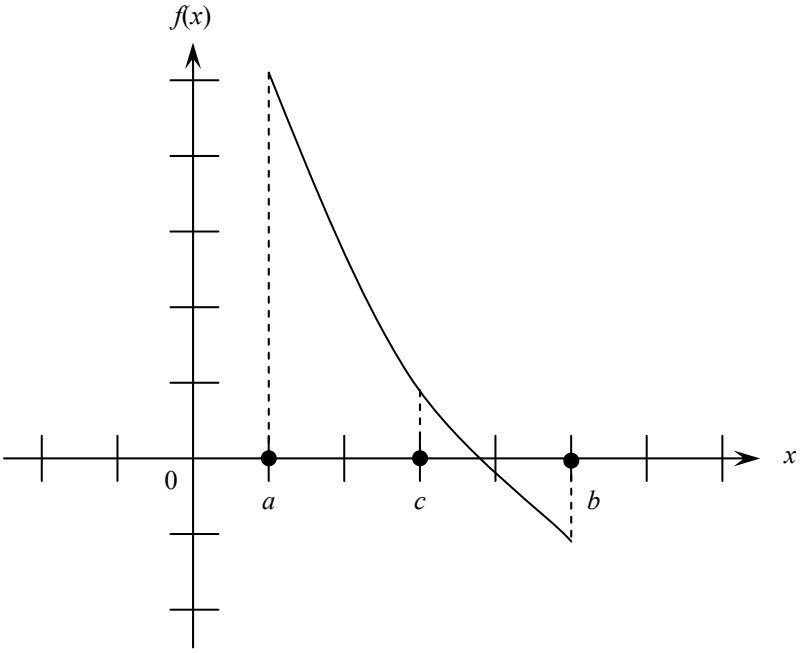

Рисунок 10.2 – Графическая интерпретация метода половинного деления

Метод половинного деления легко реализуется в виде следующего алгоритма:

Шаг 1. Находим точку $c = (a + b) / 2$.

Шаг 2. Если $f(a) * f(c) < 0$, то корень лежит в интервале $[a, c]$, иначе – корень лежит на интервале $[c, b]$.

Шаг 3. Если величина интервала не превышает некоторое достаточно малое число ε, то найден корень с точностью ε, иначе возвращаемся к шагу 1.

Несмотря на простоту, такое последовательное сужение интервала проводится редко, так как требует слишком большого количества вычислений. Кроме этого, этот способ не всегда позволяет найти решение с заданной точностью. С другой стороны, его можно использовать как один из методов отделения корней.

10.3.4. Метод хорд (пропорциональных частей)

Идея метода хорд состоит в следующем. Вместо того, чтобы делить отрезок $[a, b]$ пополам, разделим его в отношении $-f(a) : f(b)$. Таким образом, первое приближение корня $x = c$ находится в точке пересечения отрезка $[a, b]$ хордой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Далее, применяя этот прием к тому из отрезков $[a, c]$ или $[c, b]$, на концах которых функция имеет противоположные знаки, получим следующее приближение корня (рисунок 10.3).

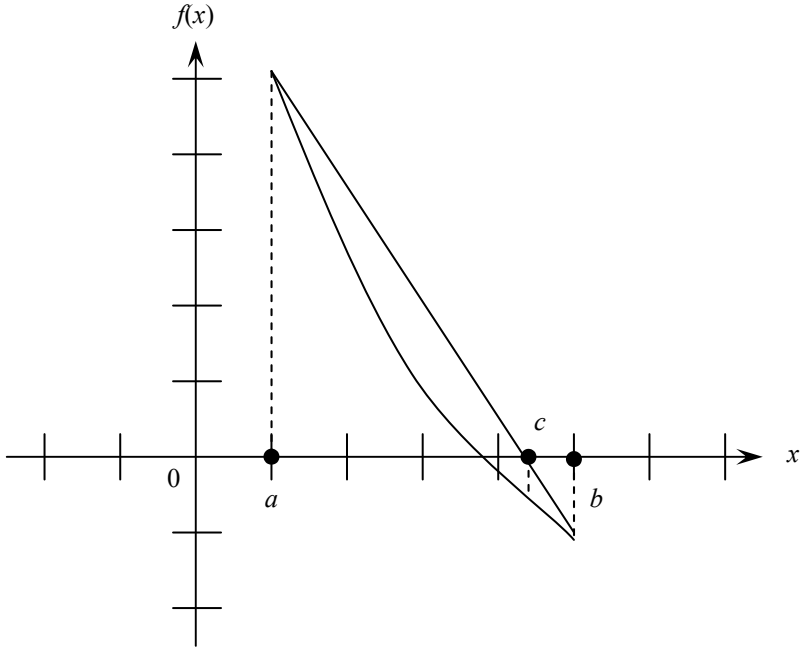

Рисунок 10.3 – Графическая интерпретация метода хорд

Выведем формулу для вычисления приближенного значения c корня уравнения $f(x)=0$. Запишем уравнение прямой, проходящей через точки с координатами $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \Rightarrow y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \qquad (10.2)$$

Прямая, заданная уравнением (10.2), пересекает ось x при условии $y = 0$. Найдем точку пересечения хорды с осью x:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),\ x = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}.$$

Итак,

$$c = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \qquad (10.3)$$

Алгоритм, реализующий метод хорд, можно представить следующим образом:

Шаг 1. Находим точку c по формуле (14).

Шаг 2. Если $f(a) * f(c) < 0$, то корень лежит в интервале $[a, c]$, иначе – корень лежит на интервале $[c, b]$.

Шаг 3. Если абсолютное значение $f(c)$ не превышает некоторое достаточно малое число ε, то найден корень с точностью ε, иначе возвращаемся к шагу 1.

Блок-схемы алгоритмов метода дихотомии и метода хорд приведены соответственно на рисунках 10.4.-10.5.

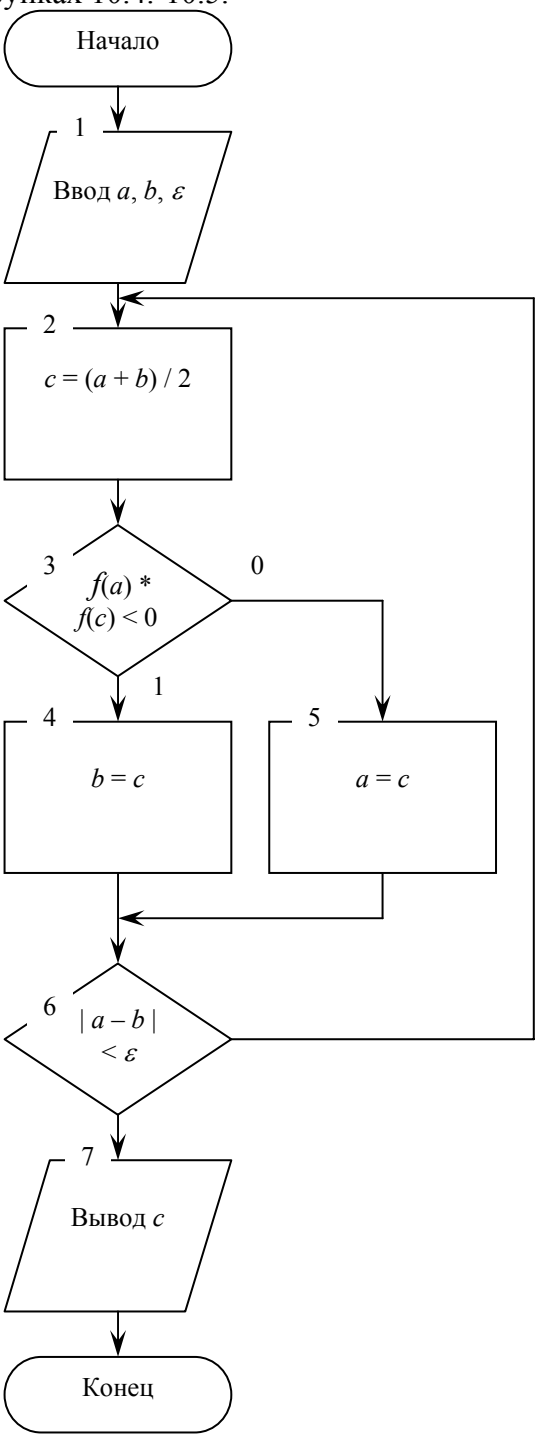

Рисунок 10.4 – Блок-схема алгоритма решения уравнения методом дихотомии

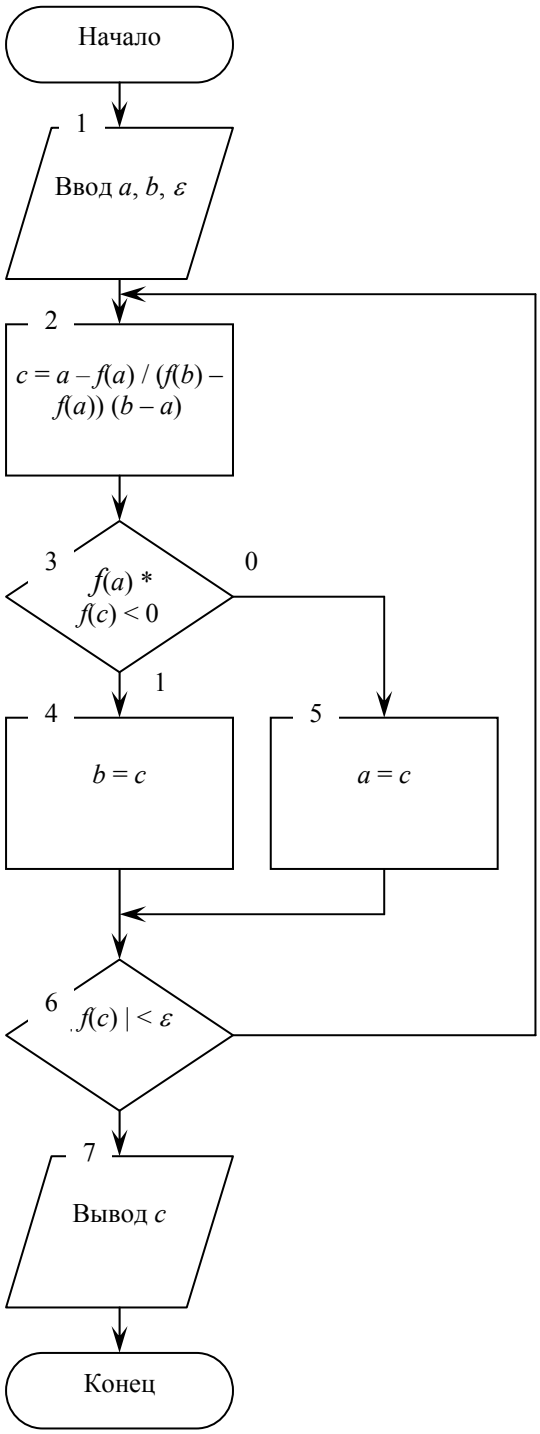

Рисунок 10.5 – Блок-схема алгоритма решения уравнения методом хорд

10.3.5. Численный пример

Пример 1. Решить нелинейное уравнение методом дихотомии:

$y = x^5 - x^3 + 1$, $y = 0$.

Решение. На рисунке 7 изображен график функции. Как видно из графика, уравнение имеет один корень и он лежит в интервале [–2, –1]. Таким образом, зададим интервал $a = -2$, $b = -1$.

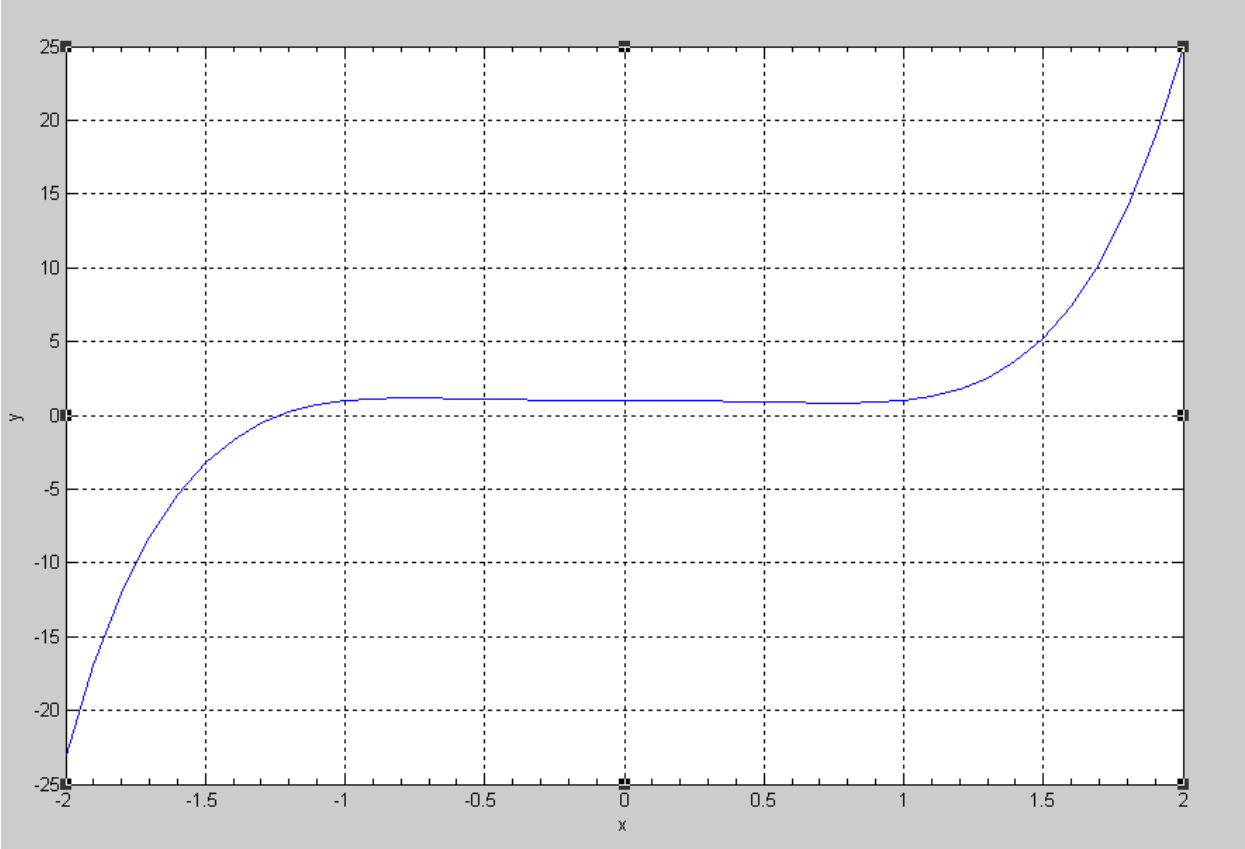

Рисунок 10.6 – График функции $y = x^5 - x^3 + 1$

Решение уравнения приведено в таблице 10.1. Вычисления продолжаются до тех пор, пока $\varepsilon = | a - b | < 0.001$.

Таблица 10.1 – Промежуточные результаты решения задачи методом дихотомии

№ итерации	*a*	*b*	*c*	*f*(*a*)	*f*(*c*)	$\varepsilon = \| a - b \|$
1	–2	–1	–1.5	–23	–3.2188	1
2	–1.5	–1	–1.25	–3.2188	–0.0986	0.5
3	–1.25	–1	–1.125	–0.0986	0.6218	0.25
4	–1.25	–1.125	–1.1875	–0.0986	0.3132	0.125
5	–1.25	–1.1875	–1.2188	–0.0986	0.1214	0.0625
6	–1.25	–1.2188	–1.2344	–0.0986	0.0151	0.0312
7	–1.25	–1.2344	–1.2422	–0.0986	–0.0408	0.0156
8	–1.2422	–1.2344	–1.2383	–0.0408	–0.0127	0.0078
9	–1.2383	–1.2344	–1.2363	–0.0127	0.0013	0.0039
10	–1.2383	–1.2363	–1.2373	–0.0127	–0.0057	0.002
11	–1.2373	–1.2363	–1.2368			0.001

Так как $| a - b | = 0.001 \le eps = 0.001$, то корень нелинейного уравнения найден и равен x=–1.2368.

Пример 2. Решить нелинейное уравнение методом хорд:

$y = x^5 - x^3 + 1$, $y = 0$.

Решение. Решение уравнения приведено в таблице 10.2. Вычисления продолжаются до тех пор, пока $|f(c)| < \varepsilon$.

Таблица 10.2 – Промежуточные результаты решения задачи методом хорд

№ итерации	*a*	*b*	*c*	*f*(*a*)	*f*(*c*)
1	–2	–1	–1.0417	–23	0.9038
2	–2	–1.0417	–1.0779	–23	0.7973
3	–2	–1.0779	–1.1088	–23	0.6872
4	–2	–1.1088	–1.1347	–23	0.5801
5	–2	–1.1347	–1.1559	–23	0.4807
6	–2	–1.1559	–1.1732	–23	0.3921
7	–2	–1.1732	–1.1871	–23	0.3156
8	–2	–1.1871	–1.1981	–23	0.2512
9	–2	–1.1981	–1.2067	–23	0.1982
10	–2	–1.2067	–1.2135	–23	0.1553
11	–2	–1.2135	–1.2188	–23	0.1210
12	–2	–1.2188	–1.2229	–23	0.0939
13	–2	–1.2229	–1.2261	–23	0.0726
14	–2	–1.2261	–1.2285	–23	0.0560
15	–2	–1.2285	–1.2304	–23	0.0431
16	–2	–1.2304	–1.2318	–23	0.0331
17	–2	–1.2318	–1.2329	–23	0.0254
18	–2	–1.2329	–1.2337	–23	0.0195
19	–2	–1.2337	–1.2344	–23	0.0149
20	–2	–1.2344	–1.2349	–23	0.0114
21	–2	–1.2349	–1.2353	–23	0.0087
22	–2	–1.2353	–1.2356	–23	0.0067
23	–2	–1.2356	–1.2358	–23	0.0051
24	–2	–1.2358	–1.2360	–23	0.0039
25	–2	–1.2360	–1.2361	–23	0.0030
26	–2	–1.2361	–1.2362	–23	0.0023
27	–2	–1.2362	–1.2363	–23	0.0017
28	–2	–1.2363	–1.2364	–23	0.0007805

Так как $f(c) = 0.0007805 < eps = 0.001$, то корень нелинейного уравнения найден и равен $x = -1.2364$.

10.3.6. Встроенные функции MATLAB для решения нелинейных уравнений

MATLAB обладает большим набором специальных функций, реализующих различные численные методы. Для нахождения корней нелинейных уравнений в MATLAB предусмотрены следующие функции:

1) x = fzero(‘func_name’, x0) – позволяет приближенно вычислить корень x уравнения func_name на некотором интервале или ближайший к заданному начальному приближению x0:

```
>> x=fzero('x^5-x^3+1',[-2 -1])
x =
  -1.2365
```

или

```
>> fzero('x^5-x^3+1',-2 )
```

```
ans =
  -1.2365
```

2) r = roots(p) – вычисление всех корней полинома (p – вектор коэффициентов полинома):

```
>> r=roots([1 0 -1 0 0 1])
r =
 -1.2365
  0.9590 + 0.4284i
  0.9590 - 0.4284i
 -0.3408 + 0.7854i
 -0.3408 - 0.7854i
```

3) x = solve(‘func_name’) – вычисление всех корней уравнений:

```
>> solve('x^5-x^3+1')
 ans =
  .95904771789275592744010129430222+.42836595625418931634897870943251*i
 -.34079486619700641527131389381414+.78542310304944908052855289605797*i
                    -1.2365057033914990243375748009761
 -.34079486619700641527131389381414-.78542310304944908052855289605797*i
  .95904771789275592744010129430222-.42836595625418931634897870943251*i
```

10.5. Задание.

1. Создать m-файл для решения нелинейного уравнения методом дихотомии и хорд.

2. Найти решение нелинейного уравнения ручным способом, с помощью разработанного m-файла и встроенных функций MATLAB, сравнить полученные результаты.

Варианты заданий.

1) $2x+\ln x+0{,}5=0$;

2) $x-\frac{1}{3}+2\sin 3{,}6x=0$;

3) $x^4-3\sin 3x=0$;

4) $e^x+\ln|x|-10x=0$;

5) $x+\cos\left(x^{0{,}52}+2\right)=0$;

6) $\sqrt{|1-x|}-tgx=0$;

7) $x^2-\sin 5x=0$;

8) $x-4\sin x=1$;

9) $arctgx-\frac{1}{3}x^3=0$;

10) $\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}+x-1=0$;

11) $3\sin\sqrt{|x|}+0{,}35x-3{,}8=0$;

12) $arctg(x-1)+2x=0$;

13) $1-x+\sin x-\ln|1+x|=0$;

14) $x\log_3|x+1|=1$;

15) $2e^x-5x=0$;

16) $x^2\cos 2x+1=0$;

17) $2x-\lg x-7=0$;

18) $ctgx-0{,}1=0$;

19) $tg(0{,}55x+0{,}1)-x^2=0$;

20) $5x-8\ln x-8=0$;

21) $x^2-\sin x=0$;

22) $2-\ln x-x=0$;

23) $e^x-x-2=0$;

24) $x^2-\cos x=0$;

25) $\ln x+0{,}5x-1=0$;

26) $x^2+\ln x=0$;

27) $\frac{1}{2}e^x-x-1=0$;

28) $\frac{1}{1+x^2}-\ln x=0$;

29) $x^2-\lg(x+2)=0$;

30) $x^2-\cos x^2-6=0$.

10.5. Примерные вопросы на защите работы:

1. Какие уравнения называю алгебраическими?
2. Какие уравнения являются трансцендентными?
3. На какие два этапа распадается задача нахождения корней нелинейных уравнений?
4. В чем состоит смысл этапа локализации корней. Какие методы применяются на данном этапе?
5. В чем состоит этап вычисления корней с заданной точностью. Какие методы применяются на данном этапе?
6. Приведите геометрическую интерпретацию метода дихотомии.
7. Приведите геометрическую интерпретацию метода хорд.
8. Приведите алгоритм и блок-схему алгоритма метода дихотомии.
9. Приведите алгоритм и блок-схему алгоритма метода хорд.
10. Перечислите специальные функции MATLAB для нахождения корней уравнения.