ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7.
АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.

7.1. Цель работы: Сформировать у студентов представления о применении аппроксимации и интерполирования функций для решения жизненных задач, привить умения составлять и применять параболические многочлены, линейные и степенные функции, оценивать их погрешности, дать навыки в использовании программных средств для проверки полученных результатов.

7.2. Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.

2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи;
- m-файл для решения задачи.

7.3. Методические рекомендации.

7.3.1. Понятие о приближении функций.

7.3.1.1. Постановка задачи. Пусть величина y является функцией аргумента x. Это означает, что любому значению x из области определения поставлено в соответствие значение y. Вместе с тем на практике часто неизвестна явная связь между y и x, т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой зависимости $y = f(x)$.

Наиболее распространенным и практически важным случаем, когда вид связи между параметрами x и y неизвестен, является задание этой связи в виде некоторой таблицы $\{x_i, y_i\}$. Это означает, что дискретному множеству значений аргумента x_i поставлено в соответствие множество значений функции $\{y_i\}$ ($i = 0, 1, \ldots, n$). Эти значения – либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. На практике могут понадобиться значения величины y и в других точках, отличных от узлов x_i.

Таким образом, возникает необходимость использования имеющихся табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра y при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра x, поскольку точная связь $y = f(x)$ не известна.

Этой цели и служит задача о приближении (*аппроксимации*) функций: данную функцию $f(x)$ требуется приближенно заменить (*аппроксимировать*) некоторой функцией $\varphi(x)$ так, чтобы отклонение $\varphi(x)$ от $f(x)$ в заданной области было наименьшим. Функция $\varphi(x)$ называется *аппроксимирующей*.

Аппроксимация, при которой приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, называется *точечной*. К ней относятся интерполирование, среднеквадратичное приближение и др. При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке) аппроксимация называется *непрерывной* (или *интегральной*). К непрерывной аппроксимации относится, например, равномерное приближение.

Для практики весьма важен случай аппроксимации функции многочленом

$$\varphi(x) = P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 . \qquad (7.1)$$

7.3.1.2. Точечная аппроксимация. Одним из основных типов точечной аппроксимации является *интерполирование*. Оно состоит в следующем: для данной функции $y = f(x)$ строим *интерполирующую функцию* $\varphi(x)$ (например, многочлен (7.1)), принимающую в заданных точках x_i, те же значения y_i, что и функция $f(x)$, т.е.

$$\varphi(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (7.2)$$

При этом предполагается, что среди значений x_i нет одинаковых, т.е. $x_i \neq x_k$ при $i \neq k$. Точки x_i называются *узлами интерполяции*.

Таким образом, близость интерполирующей функции (рисунок 7.1, сплошная линия) к заданной функции состоит в том, что их значения совпадают на заданном множестве точек.

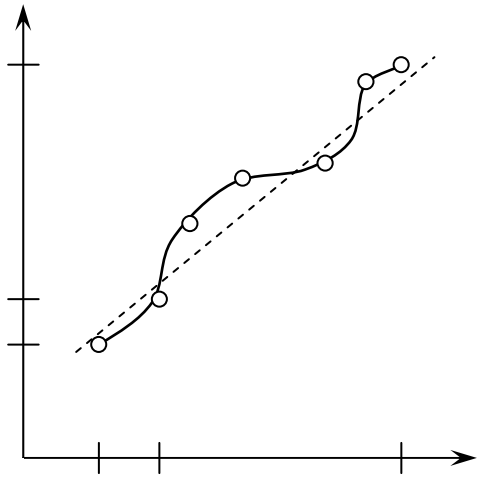

Рисунок 7.1 – Интерполяция и аппроксимация

Интерполирующая функция $\varphi(x)$ может строиться сразу для всего рассматриваемого интервала изменения x или отдельно для разных частей этого интервала. В первом случае говорят о *глобальной интерполяции*, во втором – о *кусочной* (или *локальной*) *интерполяции*.

Как правило, интерполирование используется для аппроксимации функции в промежуточных точках между крайними узлами интерполяции, т.е. при $x_0 < x < x_n$. Однако оно применяется и для приближенного вычисления функции вне рассматриваемого отрезка ($x < x_0$, $x > x_n$). Это приближение называется *экстраполяцией*.

Рассмотрим использование в качестве функции $\varphi(x)$ многочлена (7.1), называемого *интерполяционным многочленом*. При глобальной интерполяции, т.е. при построении одного многочлена для всего рассматриваемого интервала изменения x, для нахождения коэффициентов многочлена необходимо использовать все уравнения системы (7.2). Данная система содержит $n + 1$ уравнение, следовательно, с ее помощью можно определить $n + 1$ коэффициент. Поэтому максимальная степень интерполяционного многочлена $m = n$, и многочлен принимает вид

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0\,. \qquad (7.3)$$

Система уравнений (7.2) при использовании в качестве $\varphi(x)$ многочлена (7.3) является системой линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и имеет вид

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_1x_0 + a_0 = y_0, \\ a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \ldots + a_1x_1 + a_0 = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \ldots + a_1x_n + a_0 = y_n. \end{cases} \qquad (7.4)$$

Определитель такой системы в линейной алгебре называется определителем Вандермонда. Определитель Вандермонда отличен от нуля, если $x_i \neq x_k$ при $i \neq k$, т.е. если среди узлов интерполяции нет совпадающих. Следовательно, в этом случае система (7.4) имеет единственное решение. Решив систему (7.4), можно построить интерполяционный многочлен. Такой метод построения интерполяционного многочлена называется *методом неопределенных коэффициентов*. Существуют более простые алгоритмы построения интерполяционных многочленов, которые будут рассмотрены в курсовом проекте.

Как видим, при интерполировании основным условием является прохождение графика интерполирующей функции через данные значения функции в узлах интерполяции. Однако в ряде случае выполнение этого условия затруднительно или даже нецелесообразно.

Например, при большом количестве улов интерполяции в случае глобальной интерполяции получается высокая степень многочлена (7.3). Кроме того, табличные данные могли быть получены путем измерений и содержать ошибки. Построение аппроксимирующей функции с условием обязательного прохождения ее графика через эти экспериментальные точки означало бы тщательно повторение допущенных при измерениях ошибок. Выход из этого положения может быть найден выбором такой функции, график которой проходит близко от данных точек (см. рисунок 7.1, штриховая линия). Понятие «близко» уточняется при рассмотрении различных видов приближения.

Одним из таких видов является *среднеквадратичное приближение*. Если при этом используется многочлен (7.1), то $m \leq n$; $m = n$ соответствует глобальной интерполяции. На практике стараются подобрать аппроксимирующую функцию как можно более простого вида, например, многочлен степени $m = 1, 2, 3$.

Мерой отклонения функции $\varphi(x)$ от заданной функции $f(x)$ на множестве точек (x_i, y_i) $(i = 0, 1, \ldots, n)$ при среднеквадратичном приближении является величина S, равная сумме квадратов разностей между значениями аппроксимирующей и заданной функции в данных точках:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left[\varphi(x_i) - y_i\right]^2 . \qquad (7.5)$$

Аппроксимирующую функцию нужно подобрать так, чтобы величина S была наименьшей. В этом состоит метод наименьших квадратов, который будет рассмотрен позже.

7.3.1.3. Квадратичная интерполяция. В качестве интерполяционной функции на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ принимается квадратный трехчлен. Такую интерполяцию называют *параболической*.

Уравнение квадратного трехчлена

$$y = a_i x^2 + b_i x + c_i,\ x_{i-1} \leq x_i \leq x_{i+1}, \qquad (7.6)$$

содержит три неизвестных коэффициента a_i, b_i, c_i, для определения которых необходимы три уравнения. Ими служат условия прохождения параболы (7.6) через три точки (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}). Эти условия можно записать в виде

$$\begin{cases} a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = y_{i-1}, \\ a_i x_i^2 + b_i x_i \quad + c_i = y_i, \\ a_i x_{i+1}^2 + b_i x_{i+1} + c_i = y_{i+1}. \end{cases} \qquad (7.7)$$

Если отвлечься от того, что отрезок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ является подмножеством отрезка $[x_0, x_n]$, и рассмотреть его отдельно, то квадратичную интерполяцию (7.6) можно трактовать как глобальную с $n = 2$, а систему (7.7) – как частный случай системы (7.4). Интерполяция для любой точки $x \in [x_0, x_n]$ проводится по трем ближайшим к ней узлам.

7.3.2. Метод наименьших квадратов.

7.3.2.1. Постановка задачи. Пусть в результате измерений получена таблица (таблица 7.1) зависимости одной величины y от другой x.

Таблица 7.1

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n

Необходимо найти формулу $y = f(x)$, выражающую таблично заданную зависимость аналитически. Применение интерполяции в данном случае нецелесообразно, т.к. значения y_i в узлах получены экспериментально и поэтому являются сомнительными (в ходе эксперимента возникает неустранимая погрешность, обусловленная неточностью измерений). Кроме того, совпадение значений в узлах не означает совпадения характеров поведения исходной и интерполирующей функции. Поэтому необходимо найти такой метод подбора эмпирической формулы, который не только позволяет найти саму формулу, но и оценить погрешность подгонки.

Постановка задачи. Найдем функцию заданного вида

$$y = f(x), \tag{7.8}$$

которая в точках x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, …, x_n принимает значения как можно более близкие к табличным значениям x_0, y_1, y_2, y_3, y_4, …, y_n.

Практически вид приближающей функции можно определить визуально: по таблице 7.1 строится точечный график функции, а затем проводится кривая, по возможности наилучшим образом отражающая характер расположения точек (рисунок 7.2).

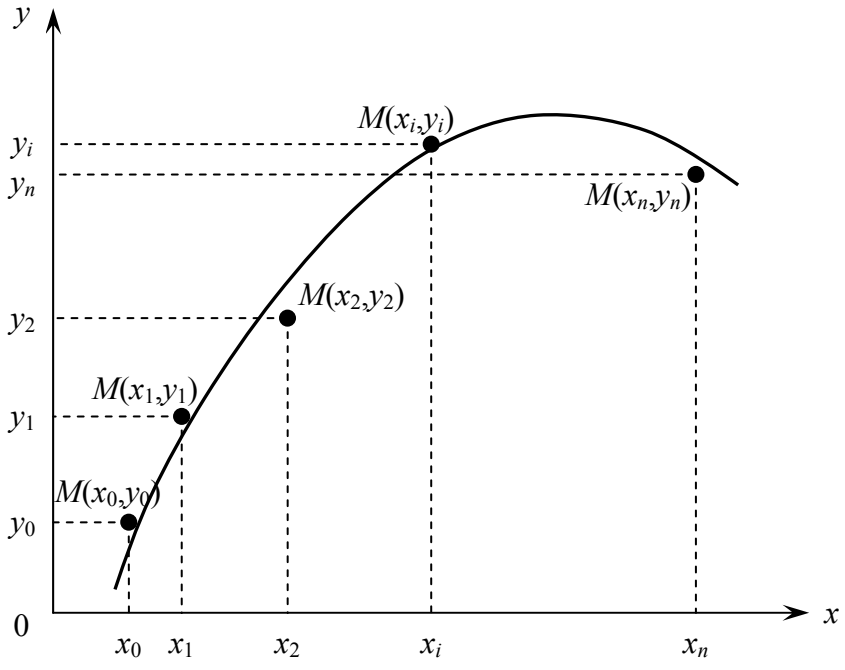

Рисунок 7.2

По полученной кривой устанавливается вид приближающей функции (обычно из числа простых по виду аналитических функций: линейная, степенная, экспоненциальная или показательная, логарифмическая, гипербола, дробно-рациональная и т.д.).

Заметим, что формула (7.8), называемая эмпирической формулой или уравнением регрессии y на x, позволяет находить значения функции $f(x)$ для нетабличных значений x, «сглаживая» результаты измерений величины y.

Из рисунка 7.2 видно, что для каждого значения x_i экспериментальное y_i и расчетное y_i^p значения различаются на некоторую величину Δy_i, называемую *абсолютной разностью*. Потребовав, чтобы сумма квадратов абсолютных разностей для всех точек была минимальной, найдем оптимальные параметры функции $f(x)$: если выполняется условие

$$S = \min\left(\sum_{i=0}^{n}(\Delta y_i)^2\right) \tag{7.9}$$

где $\Delta y_i = y_i^p - y_i = \varphi(x_i) - y_i$, то считается, что функция $f(x)$ подобрана наилучшим образом.

Рассмотрим все изложенное выше на примере линейной регрессии.

7.3.2.2. Линейная регрессия. Будем искать приближающую функцию в виде:

$$y = f(x,k,b) = kx + b.$$

Абсолютная разность Δy_i для x_i определяется следующим образом:

$$\Delta y_i = y_i^p - y_i = \varphi(x_i) - y_i = (kx_i + b) - y_i.$$

Формулу (7.9) перепишем в виде:

$$S = \sum_{i=0}^{n}(\Delta y_i)^2 = \sum_{i=0}^{n}(kx_i + b - y_i)^2 .$$

Рассматриваемая сумма является функцией с двумя параметрами $S = F(k, b)$. Задача сводится к отысканию минимума этой функции. Используем необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial F(k,b)}{\partial k} = 0; \ \frac{\partial F(k,b)}{\partial b} = 0 ,$$

т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial k} = \dfrac{\partial \sum_{i=0}^{n}(\Delta y_i)^2}{\partial k} = \dfrac{\partial \sum_{i=0}^{n}(kx_i + b - y_i)^2}{\partial k} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = \dfrac{\partial \sum_{i=0}^{n}(\Delta y_i)^2}{\partial b} = \dfrac{\partial \sum_{i=0}^{n}(kx_i + b - y_i)^2}{\partial b} = 0. \end{cases} \tag{7.10}$$

Решив систему двух уравнений с двумя неизвестными относительно параметров k и b, получим конкретный вид искомой функции $y = kx + b$. Опуская математические выкладки, запишем выражения для искомых параметров:

$$k = \frac{(n+1)\sum_{i=0}^{n} x_i y_i - \sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{i=0}^{n} y_i}{(n+1)\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2}, \qquad (7.11)$$

$$b = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} y_i - k\sum_{i=0}^{n} x_i\right).$$

Рассчитав значение S, получим величину среднеквадратичной ошибки рассматриваемого приближения.

Как видно из рассмотренного примера, изменение количества параметров не приведет к искажению сущности самого подхода, изменится лишь количество уравнений в системе (7.10) (для n параметров соответственно будет записано n уравнений).

7.3.2.3. Степенная зависимость (геометрическая регрессия). Степенная зависимость имеет вид

$$y = ax^b. \qquad (7.12)$$

Во всех случаях $y = a$ при $x = 1$. При $b > 1$ в точке $x = 0$ кривая касается оси абсцисс. В этом случае, чем больше b, тем ближе подходит кривая к оси абсцисс при $0 < x < 1$ и тем быстрее она возрастает при $x > 1$.

При $0 < b < 1$ в точке $x = 0$ кривая касается оси ординат. При $-1 < b < 0$ кривая ближе подходит к оси ординат, чем к оси абсцисс, при $b < -1$ наоборот (рисунок 7.3).

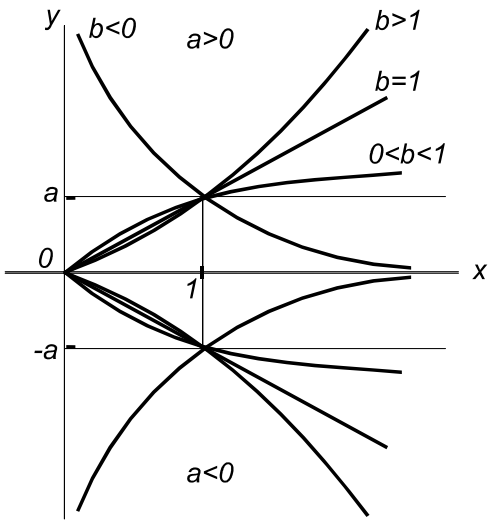

Рисунок 7.3 – График степенной зависимости

Покажем, как нахождение приближающей функции в виде геометрической регрессии может быть сведено к нахождению параметров линейной функции. Предполагая, что в исходной таблице 7.1 значения аргумента и функции положительны, прологарифмируем равенство (7.12) при условии $a > 0$:

$$\ln y = \ln a + b \ln x. \qquad (7.13)$$

Введем новую переменную $t = \ln x$, тогда $\ln y$ будет функцией от t. Обозначим $A = \ln a$, $q = \ln y$, тогда равенство (7.13) примет вид:

$$q(t) = A + bt,$$

т.е. задача свелась к отысканию приближающей функции в виде линейной.

Практически для нахождения приближающей функции в виде степенной (при сделанных выше предположениях) необходимо проделать следующие операции:

1. По данной таблице 7.1 составить новую таблицу 7.2, прологарифмировав значения x и y в исходной таблице:

Таблица 7.1

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n

Таблица 7.2

t	$\ln x_0$	$\ln x_1$	$\ln x_2$	$\ln x_3$	$\ln x_4$	…	$\ln x_n$
$q(t)$	$\ln y_0$	$\ln y_1$	$\ln y_2$	$\ln y_3$	$\ln y_4$	…	$\ln y_n$

2. По новой таблице 7.2 найти параметры A и b приближающей функции вида $q(t)=A+bt$.

3. Используя примененные обозначения, найти значения параметров a и b и подставить их в выражение (7.12).

Окончательно получаем:

$$b = \frac{(n+1)\sum_{i=0}^{n} \ln x_i \ln y_i - \sum_{i=0}^{n} \ln x_i \sum_{i=0}^{n} \ln y_i}{(n+1)\sum_{i=0}^{n} (\ln x_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} \ln x_i\right)^2},$$

$$a = \exp\left(\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} \ln y_i - b\sum_{i=0}^{n} \ln x_i\right)\right). \qquad (7.14)$$

7.3.2.4. Показательная зависимость. Показательная зависимость имеет вид

$$y = f(x,a,k) = a\exp(kx) = ae^{kx}. \qquad (7.15)$$

Во всех случаях $y = a$ при $x = 0$. Если $a > 0$, то при $k > 0$ кривая растет с увеличением x тем быстрее, чем больше k. При $k < 0$ она приближается к оси абсцисс с возрастанием x тем быстрее, чем больше абсолютная величина k.

Если найденная на опыте зависимость y от x является показательной, то график зависимости $\ln y$ от x представляет собой прямую линию, тангенс угла наклона которой равен параметру k. Если значение y при $x = 0$ неизвестно, то величину параметра a можно найти по формуле $y = a\exp(kx)$ для ряда значений x, а затем взять среднее.

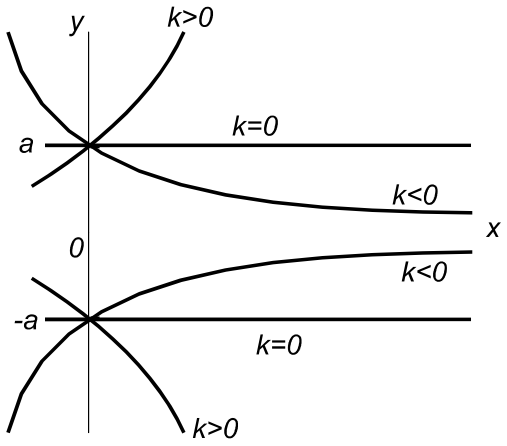

Рисунок 7.4 – График показательной функции

Найдем коэффициенты k и a для исходной таблицы 7.1, если известно, что приближающую функцию целесообразно искать в виде показательной функции (7.15).

Прологарифмируем равенство (7.15) :

$$\ln y = \ln a + kx, \tag{7.16}$$

приняв обозначения $\ln y = q,\ \ln a = A,$ перепишем (7.16) в виде:

$$q(x) = kx + A. \tag{7.17}$$

Таким образом, приближающая показательная функция нехитрыми преобразованиями сведена к линейной, следовательно, для определения коэффициентов a и k показательной функции можно воспользоваться выведенной для линейной функции формулой (7.11).

Итак, для нахождения приближающей функции в виде (7.15) нужно прологарифмировать значения функции в исходной таблице 7.1 и, рассматривая их совместно с исходными значениями аргумента, построить для новой таблицы 7.3 приближающую функцию вида (7.17).

Таблица 7.1

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n

Таблица 7.3

t	$\ln x_0$	$\ln x_1$	$\ln x_2$	$\ln x_3$	$\ln x_4$	…	$\ln x_n$
$q(t)$	$\ln y_0$	$\ln y_1$	$\ln y_2$	$\ln y_3$	$\ln y_4$	…	$\ln y_n$

Окончательно получаем:

$$k = \frac{(n+1)\sum_{i=0}^{n} x_i \ln y_i - \sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{i=0}^{n} \ln y_i}{(n+1)\sum_{i=0}^{n} (x_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2}$$

$$a = \exp\left(\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=01}^{n} \ln y_i - k\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\right). \tag{7.18}$$

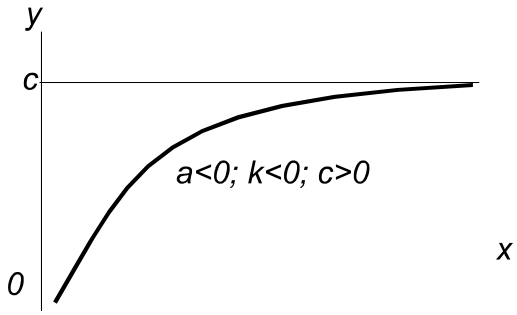

Рисунок 7.5

***Замечание*:** формулам

$$y = ax^k + c, \tag{7.19}$$

$$y = a\exp(kx) + c, \tag{7.20}$$

соответствуют кривые, изображенные на рисунках 7.3 и 7.4, сдвинутые вверх или вниз на величину c. Например, кривая, изображенная на рисунке 7.5, соответствует формуле $y = a\exp(kx) + c$ при $a < 0$, $k < 0$, $c > 0$ и $|a| > c$. Чтобы найти параметры этих формул, следует сначала определить значение c. Иногда величину c можно легко найти по значению, к которому стремится y при возрастании x (при $k < 0$) или по значению y при $x = 0$ (для формулы 7.19 при $k > 0$). Можно также воспользоваться формулой

$$c = \frac{y_1 y_2 - y^2{}_3}{y_1 + y_2 - 2y_3},$$

где y_1 и y_2 – ординаты произвольных (но достаточно далеких) точек с абсциссами x_1, x_2, а ордината y_3 соответствует абсциссе $x_3 = \sqrt{x_1 x_2}$ в случае формулы (7.19) и абсциссе $x_3 = 1/2(x_1 + x_2)$ в случае формулы (7.20).

7.3.2.5. Дробно-линейная зависимость. Будем искать приближающую функцию в виде

$$y = f(x, a, b) = \frac{1}{ax + b}. \tag{7.21}$$

Равенство (7.21) перепишем следующим образом: $q(x) = \dfrac{1}{y} = ax + b.$

Из последнего равенства следует, что для нахождения значений параметров a и b по заданной таблице 7.1 нужно составить новую таблицу 7.4, у которой значения аргумента оставить прежними, а значения функции заменить обратными числами, после чего для получения таблицы найти приближенную функцию вида $ax + b$. Найденные значения параметров a и b подставить в формулу 7.21.

Таблица 7.1

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n

Таблица 7.4

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
$q(x)$	$1/y_0$	$1/y_1$	$1/y_2$	$1/y_3$	$1/y_4$	…	$1/y_n$

Используя формулы, полученные для линейной регрессии (7.11), а также подстановку $y_i \to \dfrac{1}{y_i}$, окончательно получим:

$$a = \frac{(n+1)\sum_{i=0}^{n} x_i / y_i - \sum_{i=0}^{n} x_i \sum_{i=0}^{n} 1/y_i}{(n+1)\sum_{i=0}^{n} (x_i)^2 - (\sum_{i=0}^{n} x_i)^2},$$
$$b = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} 1/y_i - a\sum_{i=0}^{n} x_i\right). \qquad (7.22)$$

7.3.2.6. Дробно-рациональная функция. Приближающая функция имеет вид (рисунок 7.6):

$$y = f(x,a,b) = \frac{x}{ax+b}. \qquad (7.23)$$

Преобразуем ее к виду

$$\frac{1}{f(x)} = a + \frac{b}{x},$$

если в исходной таблице 7.1 заменить значения x и y обратными величинами по формулам $t = 1/x,\ q = 1/y$ и искать для новой таблицы 7.5 приближающую функцию в виде линейной $q(t) = a + bt$, то найденные значения a и b будут искомыми для формулы 7.23.

Таблица 7.1

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n

Таблица 7.5

t	$1/x_0$	$1/x_1$	$1/x_2$	$1/x_3$	$1/x_4$	…	$1/x_n$
$q(t)$	$1/y_0$	$1/y_1$	$1/y_2$	$1/y_3$	$1/y_4$	…	$1/y_n$

Выполнив все подстановки, получим

$$b = \frac{(n+1)\sum_{i=0}^{n} 1/(x_i y_i) - \sum_{i=0}^{n} 1/x_i \sum_{i=1}^{n} 1/y_i}{(n+1)\sum_{i=0}^{n} (1/x_i)^2 - (\sum_{i=0}^{n} 1/x_i)^2},$$
$$a = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} 1/y_i - b\sum_{i=0}^{n} 1/x_i\right). \qquad (7.24)$$

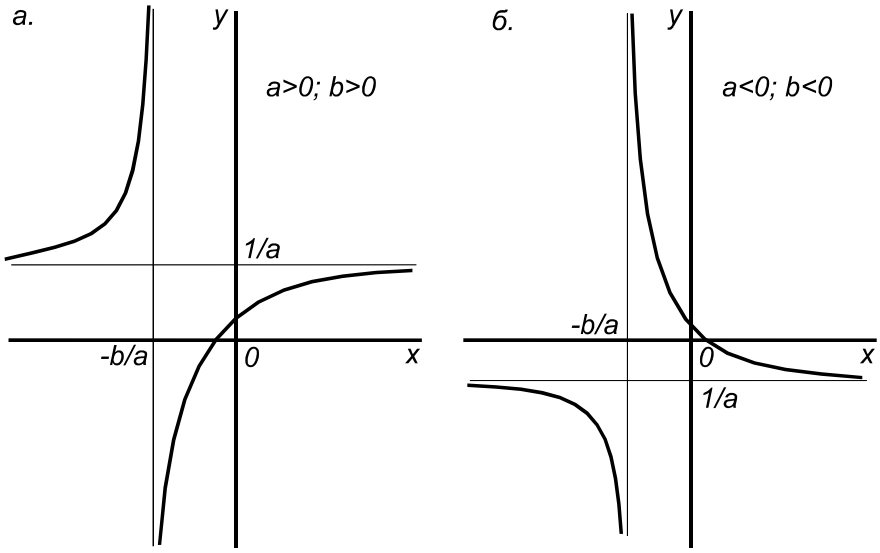

Рисунок 7.6 – Графики дробно-рациональной функции

7.3.2.6. Логарифмическая функция. Будем искать приближающую функцию в виде (рисунок 7.7):

$$y = f(x,a,b) = a\ln x + b. \tag{7.25}$$

Для перехода к линейной функции достаточно выполнить подстановку $t = \ln x$.

Отсюда следует, что для нахождения значений a и b нужно прологарифмировать значения аргумента в исходной таблице 7.1 и для новой таблицы 7.6 найти приближающую функцию в виде линейной $y = at+b$. Коэффициенты a и b найденной функции подставить в формулу 7.21.

Таблица 7.1

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n

Таблица 7.6

t	$\ln x_0$	$\ln x_1$	$\ln x_2$	$\ln x_3$	$\ln x_4$	…	$\ln x_n$
$f(t)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n

Окончательно получим:

$$a = \frac{(n+1)\sum_{i=0}^{n} y_i \ln x_i - \sum_{i=0}^{n} \ln x_i \sum_{i=0}^{n} y_i}{(n+1)\sum_{i=0}^{n} (\ln x_i)^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} \ln x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} y_i - a\sum_{i=0}^{n} \ln x_i\right). \tag{7.26}$$

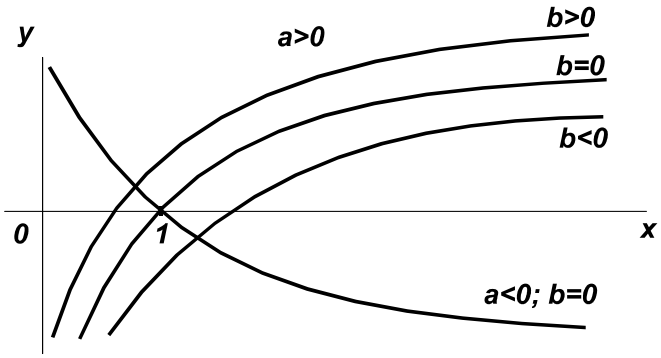

Рисунок 7.7 – График логарифмической функции

7.3.2.7. Гиперболическая зависимость. Приближающая функция имеет вид (рисунок 7.8):

$$y = f(x,a,b) = \frac{a}{x} + b. \tag{7.27}$$

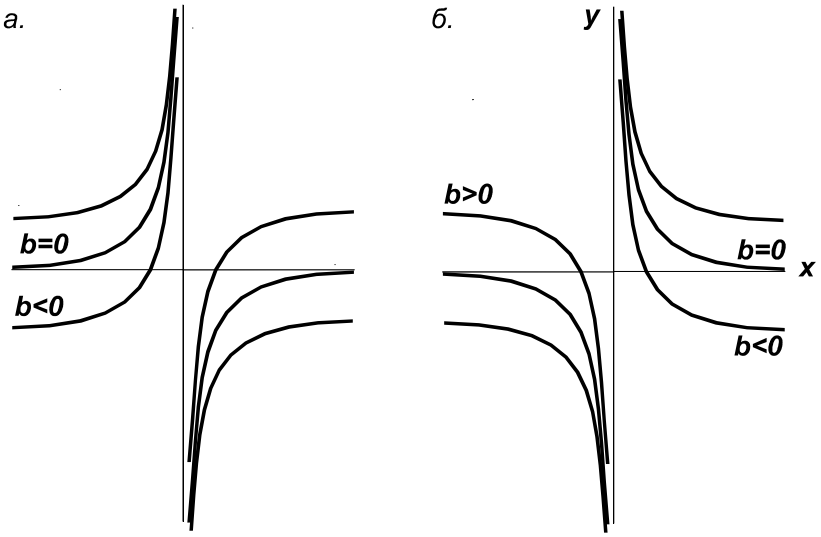

Рисунок 7.8 – График гиперболической функции

Для перехода к линейной функции сделаем подстановку $t = 1/x$. Получим $y = at + b$.

Перед нахождением приближающей функции вида 7.27 значения аргумента в исходной таблице 7.1 необходимо заменить обратными числами и найти для новой таблицы 7.7 приближающую функцию в виде линейной регрессии (7.11).

Таблица 7.1

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n

Таблица 7.7

t	$1/x_0$	$1/x_1$	$1/x_2$	$1/x_3$	$1/x_4$	…	$1/x_n$
$f(t)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	…	y_n

Окончательно получим

$$a = \frac{(n+1)\sum_{i=0}^{n} y_i / x_i - \sum_{i=0}^{n} 1/x_i \sum_{i=0}^{n} y_i}{(n+1)\sum_{i=0}^{n} (1/x_i)^2 - (\sum_{i=0}^{n} 1/x_i)^2},$$

$$b = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} y_i - a\sum_{i=0}^{n} 1/x_i\right). \qquad (7.28)$$

7.3.3.1. Пример поиска приближающего многочлена методом неопределенных коэффициентов. Найти приближенное значение функции $y = f(x)$ при $x = 0.32$, если известна следующая таблица ее значений (таблица 7.8):

Таблица 7.8 – Экспериментальные данные

x	0.15	0.30	0.40	0.55
y	2.17	3.63	5.07	7.78

Решение. Найдем решение методом неопределенных коэффициентов. Запишем систему уравнений (7.4):

$$\begin{cases} 0.15^3 a_3 + 0.15^2 a_2 + 0.15 a_1 + a_0 = 2.17, \\ 0.30^3 a_3 + 0.30^2 a_2 + 0.30 a_1 + a_0 = 3.63, \\ 0.40^3 a_3 + 0.40^2 a_2 + 0.40 a_1 + a_0 = 5.07, \\ 0.55^3 a_3 + 0.55^2 a_2 + 0.55 a_1 + a_0 = 7.78. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a_0 = 1.73$, $a_1 = -0.9167$, $a_2 = 27.1667$, $a_3 = -10.0000$.
Тогда функцией интерполяции будет следующий полином третьей степени:

$$P_3(x) = -10x^3 + 27.1667x^2 - 0.9167x + 1.73.$$

Искомое значение функции $y \approx -10.0000*0.32^3 + 27.1667*0.32^2 - 0.9167*0.32 + 1.73 \approx 3.8908$.

Решим задачу, используя квадратичную интерполяцию. Составим систему уравнений (7.7) с учетом ближайших к точке $x = 0.32$ узлов: $x_{i-1} = 0.15$, $x_i = 0.30$, $x_{i+1} = 0.40$. Соответственно $y_{i-1} = 2.17$, $y_i = 3.63$, $y_{i+1} = 5.07$. Система (7.7) запишется в виде

$$\begin{cases} 0.15^2 a_i + 0.15 b_i + c_i = 2.17, \\ 0.30^2 a_i + 0.30 b_i + c_i = 3.63, \\ 0.40^2 a_i + 0.40 b_i + c_i = 5.07. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $a_i = 18.67$, $b_i = 1.33$, $c_i = 1.55$.
Тогда функцией интерполяции будет следующий квадратный трехчлен:

$$y = 18.67x^2 + 1.33x + 1.55.$$

Искомое значение функции $y \approx 18.67*0.32^2 + 1.33*0.32 + 1.55 \approx 3.8874$.

Интерполяция полиномами в среде MATLAB осуществляется с помощью функции polyfit(), которая имеет вид:

polyfit(x, y, n),

где:

x – вектор узлов интерполяции;

y – вектор значений функции в узлах интерполяции;

n – степень полинома.

Откликом при реализации функции polyfit() является вектор коэффициентов полинома.

```
>> x=[0.15 0.30 0.40 0.55];
>> y=[2.17 3.63 5.07 7.78];
>> a=polyfit(x,y,3)
a =
  -10.0000   27.1667   -0.9167    1.7300
```

Тогда функцией интерполяции будет следующий полином третьей степени:

$$P_3(x) = -10x^3 + 27.1667x^2 - 0.9167x + 1.73 .$$

Решение совпадает с решением, полученным по методу неопределенных коэффициентов.

Интерполяция кубическими сплайнами в среде MATLAB осуществляется с помощью функции spline(). Функция имеет вид:

yi=spline(x, y, xi),

где:

x – вектор узлов интерполяции;

y – вектор значений функции в узлах интерполяции;

xi – вектор аргументов функции $y = f(x)$ из области ее определения, задаваемый пользователем.

На рисунке 7.9 приведено графическое решение задачи.

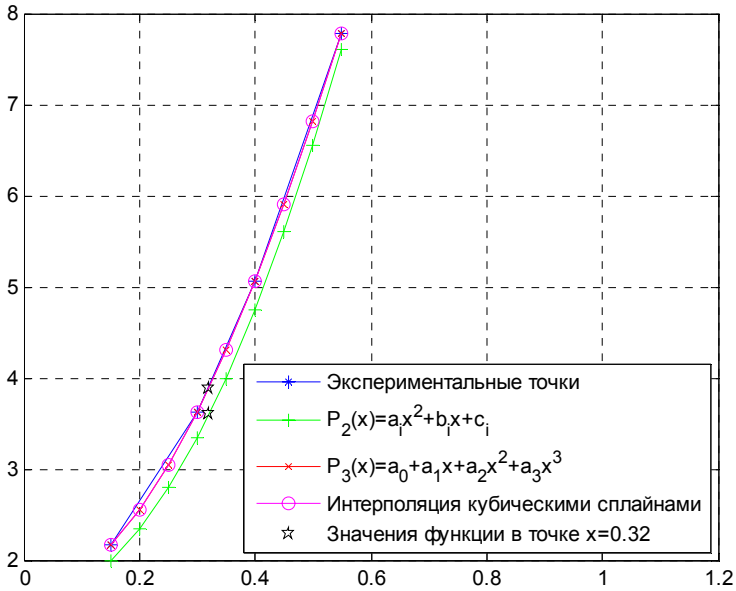

Рисунок 7.9 – Графическое решение задачи

7.3.3.2. Пример поиска приближающей функции методом наименьших квадратов. Построим приближающую функцию методом наименьших квадратов для зависимости, заданной таблицей 7.9.

Таблица 7.9 – Экспериментальные данные

x	1.1	1.7	2.4	3.0	3.7	4.5	5.1	5.8
$f(x)$	0.3	0.6	1.1	1.7	2.3	3.0	3.8	4.6

Точечный график изображен на рисунке 7.10. Вид приближающей кривой не очевиден, поэтому рассмотрим два способа приближения заданной функции: в виде прямой $y=kx + b$ и в виде степенной функции $y = cx^m$. После нахождения значений параметров k, b, c и m найдем суммы квадратов уклонений (7.9) и по их значениям установим какое из двух приближений лучше.

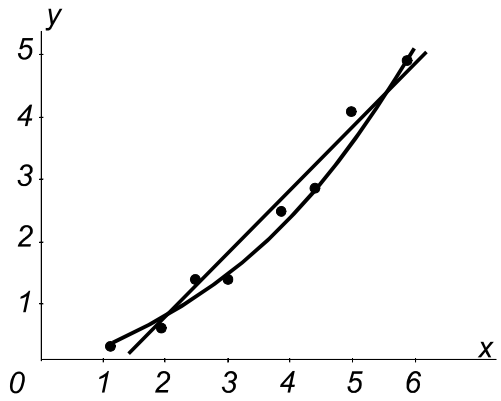

Рисунок 7.10

Значения параметров k, b линейной функции находятся из системы вида 7.11.

Проделав необходимые вычисления, получаем:

$k = 0.9219$, $b = -0.9710$, $S_{лин} = 0.2011$.

Т.е. приближающее линейное уравнение запишется в виде

$y = 0.9219x - 0.9710$.

Для нахождения параметров c и m степенной функции воспользуемся формулой (7.14) и получим следующие значения:

$c = 0.2581$, $m = 1.6524$, $S_{ст} = 0.0394$.

Таким образом, уравнение степенной регрессии имеет вид

$y = 0.2581x^{1.6524}$.

Как видно, сумма квадратов абсолютных погрешностей для линейной функции составляет $S_{лин} = 0.2011$, для степенной функции – $S_{ст} = 0.0394$. Видно, что приближение в виде степенной функции в данном случае предпочтительнее.

Графическое решение задачи изображено на рисунке 7.11.

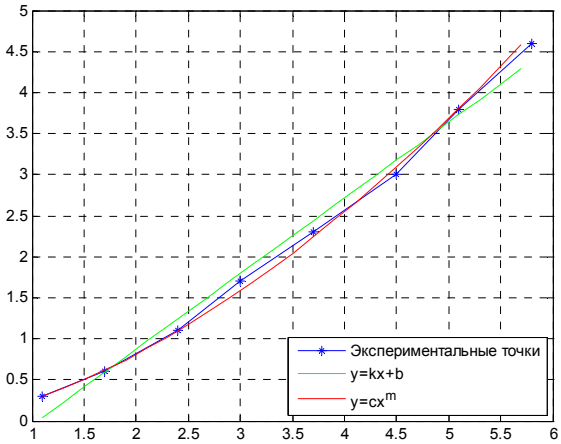

Рисунок 7.11 – Графическое представление задачи

7.4. Задание 1.

1. Построить интерполяционный многочлен методом неопределенных коэффициентов.

2. Построить интерполяционный многочлен в виде квадратного трехчлена.

3. Построить графики интерполяционных функций.

4. Найти приближенные значения функции при данных промежуточных значениях аргумента.

5. Найти приближенные значения функции при данных промежуточных значениях аргумента с помощью кубического сплайна и визуализируйте результаты сплайн-интерполяции.

6. Все пункты задания оформить в виде *m*-файла-функции и привести результаты выполнения файла.

Входные аргументы *m*-файла-функции: x – вектор узлов интерполяции; y – вектор значений функции в узлах интерполяции, xi – вектор аргументов функции $y = f(x)$ из области ее определения, задаваемый пользователем.

Выходные параметры *m*-файла-функции: a – вектор коэффициентов интерполяционного многочлена, b – вектор коэффициентов квадратного трехчлена; $y1$, $y2$ и $y3$ – векторы приближенных значений функции при данных промежуточных значениях аргумента с помощью интерполяционного многочлена, квадратного трехчлена и кубического сплайна.

Варианты заданий.

1		2		3		4		5	
x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
1.415	0.8886	0.101	1.2618	0.15	0.8607	0.180	5.6154	3.50	33.115
1.420	0.8900	0.106	1.2764	0.20	0.8187	0.185	5.4669	3.55	34.813
1.425	0.8906	0.111	1.2912	0.25	0.7788	0.190	5.3263	3.60	36.598
1.430	0.8917	0.116	1.3061	0.30	0.7408	0.195	5.1930	3.65	38.474
1.435	0.8927	0.121	0.3213	0.35	0.7046	0.200	5.0664	3.70	40.447
1.440	0.8940	0.126	1.3366	0.40	0.6703	0.205	4.9461	3.75	42.521
1.445	0.8947	0.131	1.3521	0.45	0.6376	0.210	4.8317	3.80	44.701
1.450	0.8957	0.136	1.3677	0.50	0.6065	0.215	4.7226	3.85	46.993
1.455	0.8967	0.141	1.3836	0.55	0.5769	0.220	4.6185	3.90	49.402
1.460	0.8977	0.146	1.3995	0.60	0.5488	0.225	4.5191	3.95	51.935
1.465	0.8986	0.151	1.4157	0.65	0.5220	0.230	4.4242	4.00	54.598
в точке x=1.4161		в точке x=0.1026		в точке x=0.7250		в точке x=0.175		в точке x=3.475	

Лабораторный практикум по дисциплине «Программирование и вычислительные методы», 4 семестр, 2010-2011 учебный год

6		**7**		**8**		**9**		**10**	
x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
0.115	8.6572	1.340	4.2556	0.01	0.9918	0.15	4.481	0.45	20.194
0.120	8.2932	1.345	4.3532	0.06	0.9519	0.16	4.953	0.46	19.613
0.125	7.9582	1.350	4.4552	0.11	0.9136	0.17	5.473	0.47	18.942
0.130	7.6489	1.355	4.5618	0.16	0.8769	0.18	6.049	0.48	18.174
0.135	7.3623	1.360	4.6734	0.21	0.8416	0.19	6.685	0.49	17.301
0.140	7.0961	1.365	4.7903	0.26	0.8077	0.20	7.389	0.50	16.312
0.145	6.8481	1.370	4.9130	0.31	0.7753	0.21	8.166	0.51	15.198
0.150	6.6165	1.375	5.0419	0.36	0.7441	0.22	9.025	0.52	13.948
0.155	6.3998	1.380	5.1774	0.41	0.7141	0.23	9.974	0.53	12.550
0.160	6.1965	1.385	5.3201	0.46	0.6854	0.24	11.023	0.54	10.993
0.165	6.0055	1.390	5.4706	0.51	0.6579	0.25	12.182	0.55	9.264
в точке *x*=0.1745		в точке *x*=1.3921		в точке *x*=0.492		в точке *x*=0.244		в точке *x*=0.445	
11		**12**		**13**		**14**		**15**	
x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
1.345	4.3532	0.130	7.6489	-4	41.79	-4	20.35	-3	1.1
1.350	4.4552	0.135	7.3623	-3	25.69	-3	12.54	-2	-1.6
1.355	4.5618	0.140	7.0961	-2	13.73	-2	7.5	0	0.21
1.360	4.6734	0.145	6.8481	0	1.54	0	0.78	1	0.38
1.365	4.7903	0.150	6.6165	1	0.16	1	1.08	3	2.8
1.370	4.9130	0.155	6.3998	3	13.06	3	4.14	4	9.1
1.375	5.0419	0.160	6.1965	4	24.4	4	12.37	5	16.77
1.380	5.1774	0.165	6.0055	5	41.56	5	21	6	36.31
1.385	5.3201	0.170	5.8255	6	60.85	6	32	7	49.01
1.390	5.4706	0.175	5.6558	7	84.48	7	57.8	8	80.24
1.395	5.6296	0.180	5.4954	9	87.65	9	61.3	9	76.53
в точке *x*=1.374		в точке *x*=0.158		в точке *x*=1.58		в точке *x*=3.65		в точке *x*=6.5	
16		**17**		**18**		**19**		**20**	
x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
-4	24.96	-4	27.14	-5	63.14	-5	56.14	-5	84.14
-2	9.06	-2	12.7	-2	16.7	-4	37.7	-4	56.7
-1	4.53	-1	5.68	-1	6.68	-1	-0.32	-1	3.68
0	1.98	0	0.97	0	0.97	0	-6.03	0	-3.03
1	0.48	1	0.59	1	1.59	1	-5.41	1	-1.41
2	-0.37	2	1.67	2	5.67	2	-1.33	2	5.67
3	0.77	3	5.48	3	14.48	3	7.48	3	19.48
5	18.82	5	18.06	5	43.06	5	36.06	4	39.06
6	26.94	6	26.4	6	62.4	6	55.4	5	63.4
8	46.69	8	50.67	7	86.67	7	79.67	6	94.67
10	52.21	10	64.13	9	91.43	9	87.98	8	98.76
в точке *x*=8.16		в точке *x*=7.32		в точке *x*=-3.46		в точке *x*=-3.51		в точке *x*=7.43	

21		22		23		24		25	
x	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***	***x***	***y***
-5	-2.86	-4	-19.51	-6	-13.35	-4	-27.51	-3	-0.51
-4	5.7	-2	0.2	-5	-13.55	-2	-9.8	-2	4.2
-1	12.68	-1	7.36	-4	-8.27	-1	-3.64	-1	7.36
0	9.97	0	10.96	0	0.6	0	-1.04	0	6.96
1	7.59	1	14.01	2	4.78	1	1.01	1	6.01
2	2.67	2	15.01	3	9.73	2	1.67	2	3.01
3	-3.52	3	14.63	4	9.75	3	-0.37	3	-1.37
4	-11.94	4	10.82	6	14.91	4	-5.18	4	-9.18
5	-23.6	5	4.44	7	21.2	5	-12.56	5	-19.56
6	-36.33	6	1.15	8	21.67	6	-16.85	6	-26.85
8	-41.21	8	0.56	9	23.45	7	-17.87	7	-31.32
в точке x=2.16		в точке x=4.44		в точке x=-4.61		в точке x=5.55		в точке x=4.59	

Задание 2.

1. Методом наименьших квадратов вывести формулы для параметров a, b и c приближающей квадратичной функции: $y = ax^2 + bx + c$.

2. Построить точечный график по заданной таблице (x_i. y_i).

3. Построить график приближающей квадратичной функции.

4. Рассмотреть наиболее подходящие приближающие функции (3 и более), приведенные в разделе 7.3.2. После нахождения значений параметров каждой из приближающих функций найти суммы квадратов абсолютных значений и по их значениям установить, какое из приближений лучше. На том же чертеже построить графики рассчитанных приближающих функций.

5. Все пункты задания оформить в виде *m*-файла-функции и привести результаты выполнения файла.

Входные аргументы *m*-файла-функции: x – вектор узлов интерполяции; y – вектор значений функции в узлах интерполяции.

Выходные параметры *m*-файла-функции: a – вектор коэффициентов квадратичной функции (параметров a, b и c); параметры приближающих функций; суммы квадратов абсолютных значений каждой приближающей функции.

Варианты заданий

Вариант	**Результаты опыта**						
1	***x***	0.0	0.5	1.0	11.5	2.0	2.5
	y	13.65	5.77	0.07	6.95	12.05	18.97
	x	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
	y	25.67	31.57	38.44	46.20	51.33	58.83
2	***x***	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
	y	15.65	18.47	22.27	27.09	33.98	40.59
	x	3.0	3.5				
	y	51.21	62.34				
3	***x***	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
	y	10.652	10.730	10.074	10.455	10.951	10.532
	x	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
	y	10.310	10.934	10.564	10.703	10.667	10.334
4	***x***	0.0	0.5	1.0	11.5	2.0	2.5
	y	7.49	6.95	5.95	5.93	5.42	4.99
	x	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5
	y	4.45	3.90	3.85	2.91	2.41	1.40

Вариант	**Результаты опыта**						
5	***x***	0	1	2	3	4	5
	y	0.129	0.29	0.319	0.512	0.811	1.29
	x	6	7	8	9	10	
	y	1.392	1.593	1.76	1.92	2.195	
6	***x***	0	1	2	3	4	5
	y	54.98	45.52	37.00	29.53	23.00	17.53
	x	6	7	8	9	10	11
	y	12.97	9.49	7.034	5.50	4.98	5.32
7	***x***	10	12	14	16	18	20
	y	29.5885	29.5880	29.6747	29.6869	29.7484	29.7223
	x	22	24	26	28	30	32
	y	29.7710	29.8260	29.8100	29.8038	29.8554	29.8885
8	***x***	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
	y	3.875	3.640	3.475	3.363	3.260	3.195
	x	2.2	2.4				
	y	3.125	3.072				
9	***x***	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
	y	2.617	1.893	1.659	1.347	1.888	1.698
	x	1.4	1.6				
	y	1.323	1.127				
10	***x***	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
	y	45.03	35.99	27.04	18.00	8.99	0.01
	x	1.4					
	y	8.98					
11	***x***	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
	y	9.35	8.48	7.74	7.30	6.84	6.61
	x	2.2	2.4				
	y	6.28	6.13				
12	***x***	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7	1.9
	y	8.48	7.23	6.35	5.71	5.22	4.84
	x	2.1	2.3				
	y	4.52	4.26				
13	***x***	0.4	0.7	1.0	1.3	1.6	1.9
	y	8.481	5.382	4.153	3.480	3.069	2.777
	x	2.2	2.5				
	y	2.571	2.418				
14	***x***	2	3	4	5	6	7
	y	8.15	13.45	22.17	36.55	60.26	99.35
	x	8	9	10	11	12	
	y	163.79	270.05	445.24	734.08	1210.286	
15	***x***	2	3	4	5	6	7
	y	0.967	1.346	1.872	2.604	3.621	5.037
	x	8	9	10	11	12	
	y	7.010	9.75	13.56	18.86	26.24	
16	***x***	2	3	4	5	6	7
	y	37.52	22.76	13.80	8.37	5.08	3.08
	x	8	9	10	11	12	
	y	1.87	1.13	0.68	0.41	0.25	

Вариант	**Результаты опыта**						
17	***x***	2	3	4	5	6	7
	y	12.21	13.498	14.918	16.487	18.220	20.137
	x	8	9	10	11	12	
	y	22.255	24.596	27.183	30.040	33.200	
18	***x***	2	3	4	5	6	7
	y	0.967	1.346	1.872	2.604	3.621	5.037
	x	8	9	10	11	12	
	y	7.010	9.75	13.56	18.86	26	24
19	***x***	0	1	2	3	4	5
	y	0	2.0	2.297	2.491	2.639	2.759
	x	6	7	8	9	10	11
	y	2.861	2.9511	3.031	3.104	3.169	3.231
20	***x***	0	1	2	3	4	5
	y	0	10.00	14.114	17.32	20.00	22.36
	x	6	7	8	9	10	11
	y	24.49	26.45	28.28	30.00	31.62	33.16
21	***x***	1	2	3	4	5	6
	y	1.0	0.707	0.577	0.500	0.447	0.408
	x	7	8	9	10	11	12
	y	0.377	0.353	0.333	0.316	0.301	0.288
22	***x***	1	2	3	4	5	6
	y	10	9.33	8.95	8.70	8.51	8.36
	x	7	8	9	10	11	12
	y	8.23	8.12	8.03	7.94	7.86	7.80
23	***x***	1	2	3	4	5	6
	y	2.00	3.38	4.19	4.77	5.22	5.58
	x	7	8	9	10	11	112
	y	5.89	6.16	6.39	6.60	6.79	6.96
24	***x***	1	2	3	4	5	6
	y	5.50	5.25	5.16	5.112	5.10	5.08
	x	7	8	9	10	11	12
	y	5.07	5.07	5.05	5.05	5.04	5.04
25	***x***	1	2	3	4	5	6
	y	0.17	0.25	0.30	0.33	0.36	0.37
	x	7	8	9	10	11	12
	y	0.39	0.40	0.41	0.42	0.42	0.43

7.5. Примерные вопросы на защите работы:

1. Что такое интерполяция? Что такое узлы интерполяции?
2. В чем заключается задача отыскания интерполирующего многочлена?
3. В чем суть приближения таблично заданной функции по методу наименьших квадратов? Чем отличается этот метод от метода интерполяции?
4. Каким образом сводится задача построения приближающих функций в виде различных элементарных функций к случаю линейной функции?
5. Почему метод наименьших квадратов наиболее эффективен, если функция *f(x)* линейна относительно искомых параметров?
6. В чем заключается квадратичная интерполяция?
7. В чем основная идея метода неопределенных коэффициентов?