ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 11.
ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

11.1. Цель: изучение методов вычисления значений определенных интегралов и использование различных функций пакета MATLAB для их решения.

11.2. Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.

2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи;
- m-файл для решения задачи.

11.3. Методические рекомендации.

11.3.1. Основные понятия и определения.

Пусть дана функция $f(x)$, известно, что она непрерывна на интервале $[a, b]$, и уже определена ее первообразная $F(x)$, тогда определенный интеграл от этой функции можно вычислить в пределах от a до b по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (11.1)$$

где $F'(x) = f(x)$.

Однако на практике часто встречаются интегралы с первообразной, которая не может быть выражена через элементарные функции или является слишком сложной, что затрудняет или делает невозможным вычисления по формуле (11.1). Кроме того, нередко подынтегральная функция задается таблицей или графиком, и тогда понятие первообразной вообще теряет смысл. В этом случае большое значение имеют численные методы интегрирования, основная задача которых заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании значений подынтегральной функции.

Численное вычисление определенного интеграла называют *механической квадратурой*. Формулы, соответствующие тому или иному численному методу приближенного интегрирования, называют *квадратурными*. Подобное название связано с геометрическим смыслом определенного интеграла: значение определенного интеграла

$$y = \int_a^b f(x)dx, \;\; f(x) \geq 0 \qquad (11.2)$$

равно площади квадрата, которая, в свою очередь, совпадает с площадью криволинейной трапеции с основаниями $[a, b]$ и $f(x)$.

11.3.2 Интегрирование по методу прямоугольников

Интегрирование по методу прямоугольников заключается в том, что интервал интегрирования $[a, b]$ делится точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ на n равных частей (рисунок 11.1), причем $x_0 = a$, $x_n = b$, длина каждой части составляет $h = (b - a) / n$, и тогда $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, \ldots, n$-1.

Из каждой точки x_i проведем перпендикуляр до пересечения с кривой $f(x)$, а затем заменим кривую подынтегральной функции ломаной линией, отрезки которой параллельны оси абсцисс.

Площадь полученной ступенчатой фигуры можно найти как сумму площадей прямоугольников, стороны которых равны h и y_i.

Следовательно, площадь отдельного прямоугольника составит $S_i = y_i * h$, тогда

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx y_0 h + y_1 h + y_2 h + \ldots + y_{n-1} h = f(x_0)h + f(x_1)h + f(x_2)h + \ldots + f(x_{n-1})h.$$

Следовательно, формула вычисления определенного интеграла по методу прямоугольников имеет вид:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}). \qquad (11.3)$$

Формулу (11.3) называют *квадратурной формулой левых прямоугольников*.

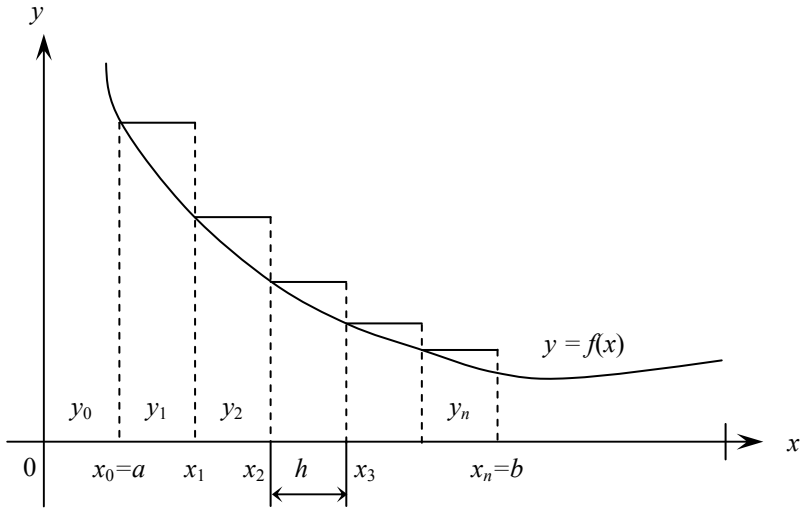

Рисунок 11.1 – Графическая интерпретация метода левых прямоугольников

Рассмотрим другую геометрическую интерпретацию метода прямоугольников, изображенную на рисунке 11.2.

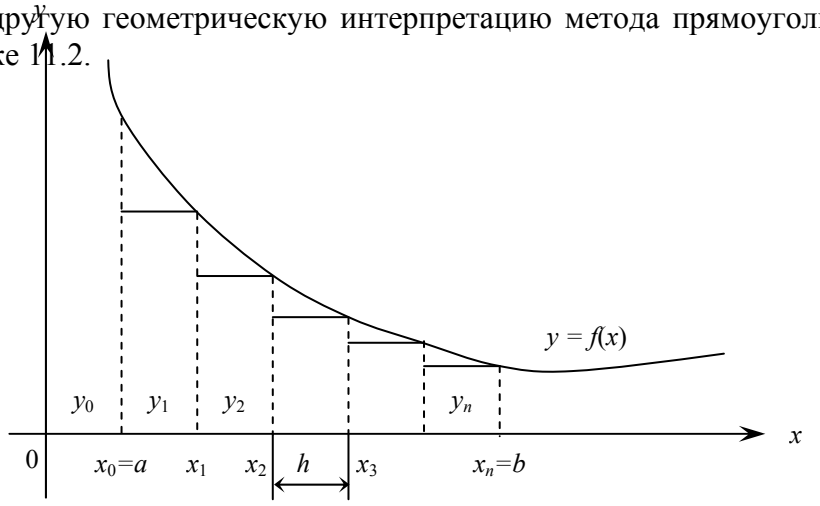

Рисунок 11.2 – Графическая интерпретация метода правых прямоугольников

В этом случае, площадь ступенчатой фигуры будет вычисляться следующим образом:

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx y_1 h + y_2 h + y_3 h + \ldots + y_n h = f(x_1)h + f(x_2)h + f(x_3)h + \ldots + f(x_n)h\,.$$

Из чего вытекает квадратурная формула правых прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \qquad (11.4)$$

Рассмотрим еще один пример геометрической интерпретации интегрирования по методу прямоугольников (рисунок 11.3).

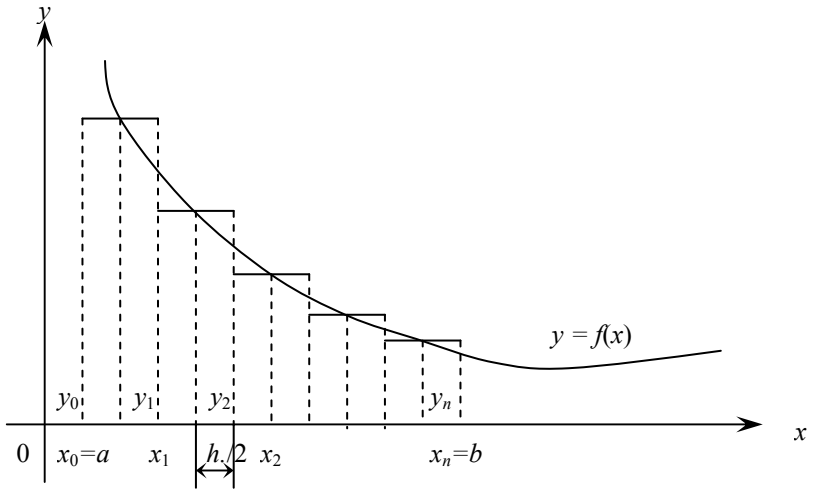

Рисунок 11.3 – Графическая интерпретация метода средних прямоугольников

Идея этого метода заключается в том, что значение функции вычисляется в точке, расположенной в середине отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, то есть

$$x_{i-1} + \frac{h}{2} = x_i - \frac{h}{2}.$$

Из чего вытекает квадратурная формула средних прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) = h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i - \frac{h}{2}\right). \qquad (11.5)$$

Формула (11.5) имеет большую точность по сравнению с (11.3) и (11.4), поэтому именно её применяют чаще всего и называют *формулой прямоугольников*.

Алгоритм метода прямоугольников достаточно прост и имеет следующий вид:

Шаг 1. Определить шаг разбиения интервала $[a, b]$.

Шаг 2. Рассчитать сумму значений функции в соответствующих точках интервала.

Шаг 3. Получить результат, умножив полученную сумму на значение шага.

Блок-схемы вычисления определенного интеграла по трем квадратурным формулам прямоугольников показаны на рисунках 11.4-11.6.

11.3.3. Численный пример.

Вычислить определенный интеграл по квадратурным формулам прямоугольников: $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1}$.

Решение. $I = \int_0^1 \frac{1}{x+1} = 0{,}69315$.

$a = 0$, $b = 1$, $n = 10$, $h = (b - a)/n = 0{,}1$.

Промежуточные результаты по квадратурным формулам левых прямоугольников приведены в таблице 11.1.

Промежуточные результаты по квадратурным формулам правых прямоугольников приведены в таблице 11.2.

Промежуточные результаты по квадратурным формулам средних прямоугольников при-

ведены в таблице 11.3.

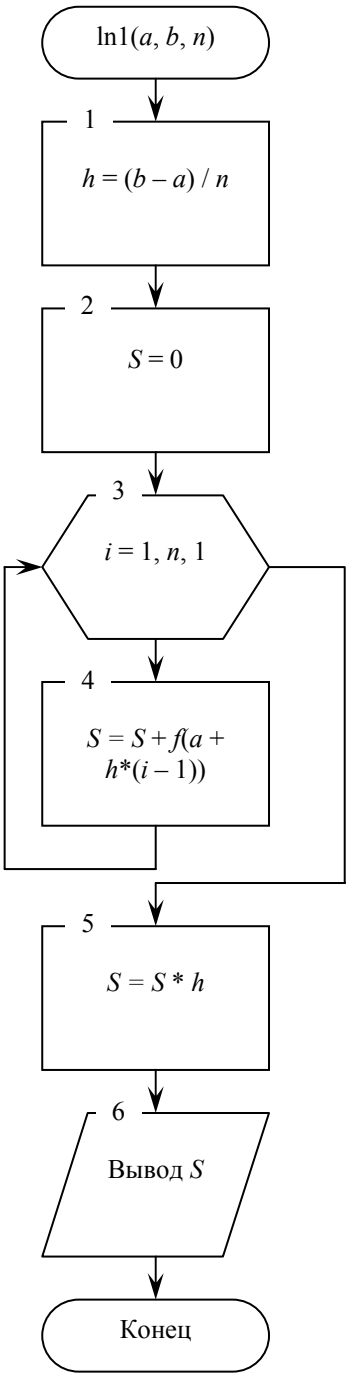

Рисунок 11.4 – Блок-схема алгоритма метода левых прямоугольников

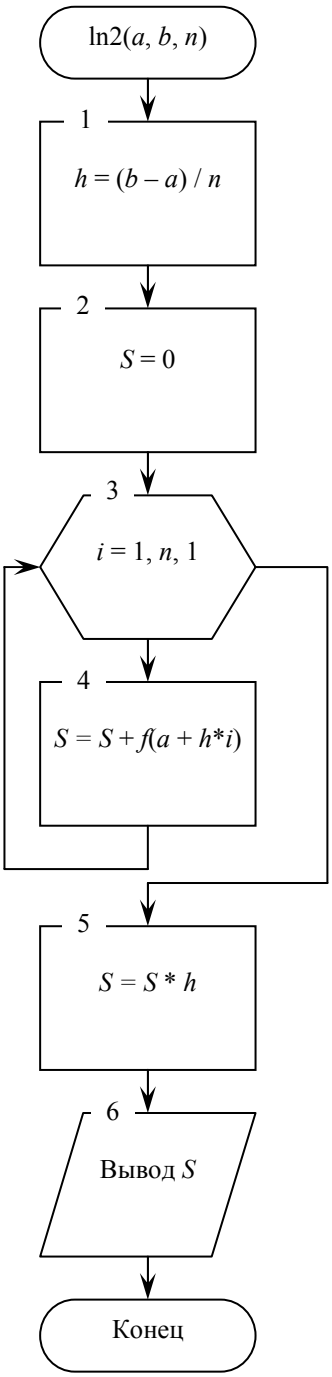

Рисунок 11.5 – Блок-схема алгоритма метода правых прямоугольников

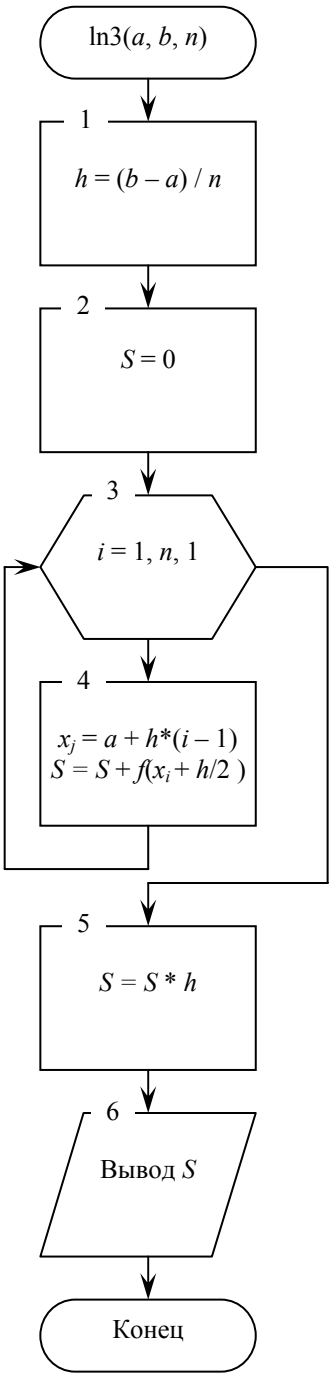

Рисунок 11.6 – Блок-схема алгоритма метода средних прямоугольников

Таблица 11.1 – Промежуточные результаты решения по методу левых прямоугольников

№ итерации	***x***	***f***	***s***
1	0	1	1
2	0,1	0,9091	1,9091
3	0,2	0,8333	2,7424
4	0,3	0,7692	3,5117
5	0,4	0,7143	4,2259
6	0,5	0,6667	4,8926
7	0,6	0,6250	5,5176
8	0,7	0,5882	6,1058
9	0,8	0,5556	6,6614
10	0,9	0,5263	7,1877

$I = h*S$ = 0,1*7,1887=0,7188.

Таблица 11.2 – Промежуточные результаты решения по методу правых прямоугольников

№ итерации	***x***	***f***	***s***
1	0,1	0,9091	0,9091
2	0,2	0,8333	1,7424
3	0,3	0,7692	2,5117
4	0,4	0,7143	3,2259
5	0,5	0,6667	3,8926
6	0,6	0,6250	4,5176
7	0,7	0,5882	5,1058
8	0,8	0,5556	5,6614
9	0,9	0,5263	6,1877
10	1,0	0,5000	6,6877

$I = h*S$ = 0,1*6,6877=0,6688.

Таблица 11.3 – Промежуточные результаты решения по методу средних прямоугольников

№ итерации	***x***	***f***	***s***
1	0	0.9524	0.9524
2	0,1	0.8696	1.8219
3	0,2	0.8000	2.6219
4	0,3	0.7407	3.3627
5	0,4	0.6897	4.0523
6	0,5	0.6452	4.6975
7	0,6	0.6061	5.3036
8	0,7	0.5714	5.8750
9	0,8	0.5405	6.4155
10	0,9	0.5128	6.9284

$I = h*S$ = 0,1*6,9284=0,6928.

Точное значение интеграла равно 0,69315. Нетрудно заметить, что значение, вычисленное по формулам средних прямоугольников, меньше всего отличается от точного значения интеграла.

11.3.4. Встроенные функции MATLAB для нахождения значений определенных интегралов

Для нахождения значений определенных интегралов в системе MATLAB предусмотрена функция int, синтаксис которой имеет следующий вид:

int(fun, var, a, b),

где fun – подынтегральная функция, а var – переменная интегрирования, a, b – пределы интегрирования.

Перед использованием данной функции, переменную интегрирования надо описать в виде символьной переменной с помощью функции syms/

```
>> syms x;
>> int('1/(x+1)','x',0,1)
 ans = log(2)
 >> log(2)
ans =
   0.6931
```

11.5. Задание.

1. Создать m-файл для решения определенного интеграла методом прямоугольников (левых, правых и средних).

2. Найти решение определенного интеграла ручным способом, с помощью разработанного m-файла и встроенных функций MATLAB, сравнить полученные результаты и определить абсолютные и относительные погрешности методов прямоугольников.

Варианты заданий.

1) $\int_0^3 \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$; 2) $\int_1^2 (x+1.9)\sin\left(\frac{x}{3}\right)dx$; 3) $\int_2^3 x^2\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx$;

4) $\int_0^{\pi/4} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$; 5) $\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$; 6) $\int_1^2 (3x+\ln x)dx$;

7) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x-(arctgx)^4}{1+x^2}dx$; 8) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$; 9) $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$;

10) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$; 11) $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$; 12) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4}dx$;

13) $\int_1^{64} \frac{6-\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x^3}-7x-6\sqrt[4]{x^3}}dx$; 14) $\int_{0,2}^{1,8} \sqrt{0,2x^2+2}\,dx$; 15) $\int_0^2 \frac{x^4dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}$;

16) $\int_{1,1}^{2,1} \frac{\sqrt{x}}{e^{x^2}}dx$; 17) $\int_2^3 \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}dx$; 18) $\int_1^2 \frac{x+\sqrt{3x-2}-10}{\sqrt{3x-2}+7}dx$;

19) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(1+\sin x+\cos x)^2}$; 20) $\int_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$; 21) $\int_1^2 \frac{1}{x}\sin\frac{\pi x}{2}dx$;

22) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$; 23) $\int_6^9 \sqrt{\frac{9-2x}{2x-21}}dx$; 24) $\int_3^5 \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx$.

11.5. Примерные вопросы на защите работы:

1. Как называются численные методы вычисления значений определенных интегралов?

2. Как называются формулы, соответствующие определенному численному методу вычисления значений определенных интегралов?

3. В чем состоит идея интегрирования по методу прямоугольников?

4. Приведите формулу и геометрическую интерпретацию метода левых прямоугольников.

5. Приведите формулу и геометрическую интерпретацию метода правых прямоугольников.

6. Приведите формулу и геометрическую интерпретацию метода средних прямоугольников.

7. Приведите алгоритм и блок-схему алгоритма метода левых прямоугольников.

8. Приведите алгоритм и блок-схему алгоритма метода правых прямоугольников.

9. Приведите алгоритм и блок-схему алгоритма метода средних прямоугольников.

10. Какая функция системы MATLAB предназначена для нахождения значений определенных интегралов?