ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 12.
РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

12.1. Цель: изучение методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и использование различных функций пакета MATLAB для их решения.

12.2. Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.

2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи;
- m-файл для решения задачи.

12.3. Методические рекомендации.

12.3.1. Основные понятия и определения.

Дифференциальные уравнения и системы описывают очень многие динамические процессы и используются при решении различных задач физики, электротехники, химии и других наук.

В зависимости от числа переменных дифференциальные уравнения делятся на две существенно различные категории: обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие одну независимую переменную, и уравнения с частными производными, содержащие несколько независимых переменных.

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ) называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции $y = y(x)$. Их можно записать в виде

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0, \tag{12.1}$$

где x – независимая переменная.

Наивысший порядок n входящий в уравнение (12.1) производной называется *порядком дифференциального уравнения*. В частности, запишем уравнения первого и второго порядков:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0, \; F\left(x, y, y', y''\right) = 0.$$

В ряде случаев из общей записи дифференциального уравнения (12.1) удается выразить старшую производную в явном виде. Например,

$$\begin{aligned} y' &= f\left(x, y\right), \\ y'' &= f\left(x, y, y'\right). \end{aligned} \tag{12.2}$$

Такая форма записи называется *уравнением*, *разрешенным относительно старшей производной*.

Решением дифференциального уравнения (12.1) называется всякая n раз дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка (12.1) содержит n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$y = y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \tag{12.3}$$

где (12.3) является решением уравнения (12.1) при любых значениях $C_1, C_2, \ldots, C_n$, а любое решение уравнения (12.1) можно представить в виде (12.3) при некоторых $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным придать определенные значения.

Для уравнения первого порядка общее решение зависит от одной произвольной постоянной:

$y = y(x, C)$. (12.4)

Если постоянная принимает определенное значение $C = C_0$, то получается частное решение

$y = y(x, C_0)$.

Таким образом, каждое дифференциальное уравнение, имеет бесконечное множество решений, которые отличаются друг от друга константами. Для однозначного определения решения необходимо определить дополнительные начальные или граничные условия. Количество таких условий должно совпадать с порядком дифференциального уравнения. В зависимости от вида дополнительных условий в дифференциальных уравнениях различают:

– *задачу Коши* – в случае, если все дополнительные условия заданы в одной (чаще начальной) точке интервала;

– *краевую задачу* – в случае, когда дополнительные условия заданы на границах интервала.

Различают *точные (аналитические)* и *приближенные (численные)* методы решения дифференциальных уравнений.

Численные методы решения дифференциального уравнения первого порядка будем рассматривать для следующей задачи Коши. Необходимо найти решение дифференциального уравнения

$$y' = f(y, x), \tag{12.5}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \tag{12.6}$$

Иными словами, требуется найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ (рисунок 12.1).

Для дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{12.7}$$

задача Коши состоит в нахождении решения $y = y(x)$, удовлетворяющего уравнению (12.7) и начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y''(x_0) = y''_0, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}. \tag{12.8}$$

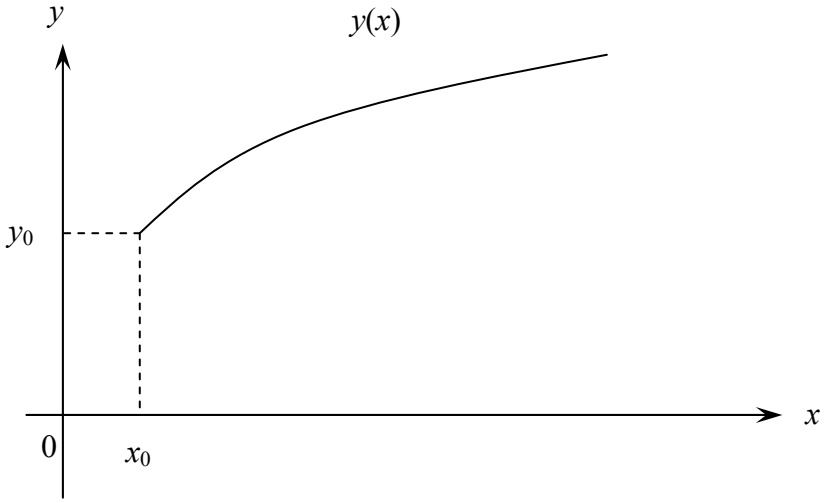

Рисунок 12.1 – Интегральная кривая $y(x)$, проходящая через заданную точку (x_0, y_0)

12.3.2. Метод Эйлера

Рассмотрим метод Эйлера для решения дифференциального уравнения.

При решении задачи Коши (12.5), (12.6) на интервале $[x_0, x_n]$, выбрав достаточный малый шаг h, построим систему равноотстоящих точек:

$$h = \frac{x_n - x_0}{n},\ x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (12.9)$$

Для вычисления значения функции в точке x_1 разложим функцию $y = y(x)$ в окрестности точки x_0 в ряд Тейлора:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + y''(x_0)\frac{h^2}{2} + \ldots \qquad (12.10)$$

При достаточно малом значении h членами выше второго порядка можно пренебречь и с учетом $y'(x_0) = f(y_0, x_0)$ получим следующую формулу для вычисления приближенного значения функции $y(x)$ в точке x_1:

$$y(x_1) \approx y_1 = y_0 + hf(y_0, x_0). \qquad (12.11)$$

Рассматривая найденную точку (y_1, x_1) как начальное условие задачи Коши, запишем аналогичную формулу для нахождения значения функции $y(x)$ в точке x_2:

$$y_2 = y_1 + hf(y_1, x_1).$$

Повторяя этот процесс, сформируем последовательность значений y_i в точках x_i по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + hf(y_i, x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (12.12)$$

Процесс нахождения значений y_i в узловых точках x_i по формуле (12.12) называется *методом Эйлера*. Геометрическая интерпретация метода Эйлера состоит в замене интегральной кривой $y(x)$ ломаной M_0, M_1, M_2, …, M_n с вершинами $M_i(x_i, y_i)$. Последовательность ломаных Эйлера при $h \to 0$ на достаточно малом отрезке стремиться к искомой интегральной кривой (рисунок 12.2).

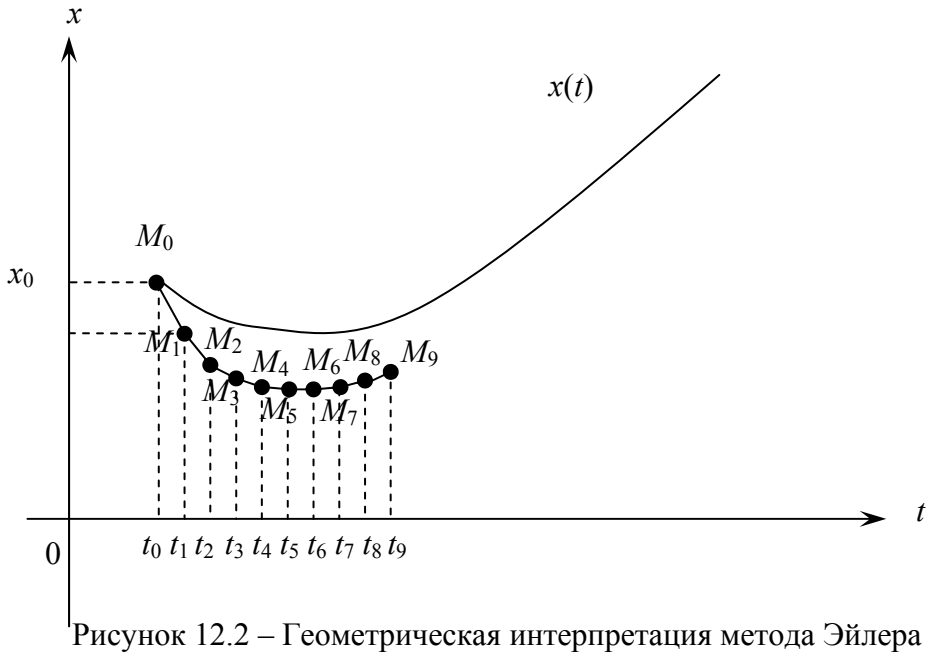

Рисунок 12.2 – Геометрическая интерпретация метода Эйлера

На каждом шаге решение $y(x)$ определяется с ошибкой за счет отбрасывания членов ряда Тейлора выше первой степени, что в случае быстроменяющейся функции $f(x, y)$ может привести к быстрому накапливанию ошибки. В методе Эйлера следует выбирать достаточно малый шаг h.

На рисунке 12.3 представлена блок-схема решения задачи Коши (12.5)-(12.6) методом Эйлера на интервале [a, b].

Метод Эйлера является очень простым методом решения задачи Коши, но недостаточно точным: для его использования нужно выбирать достаточно маленький шаг интегрирования h.

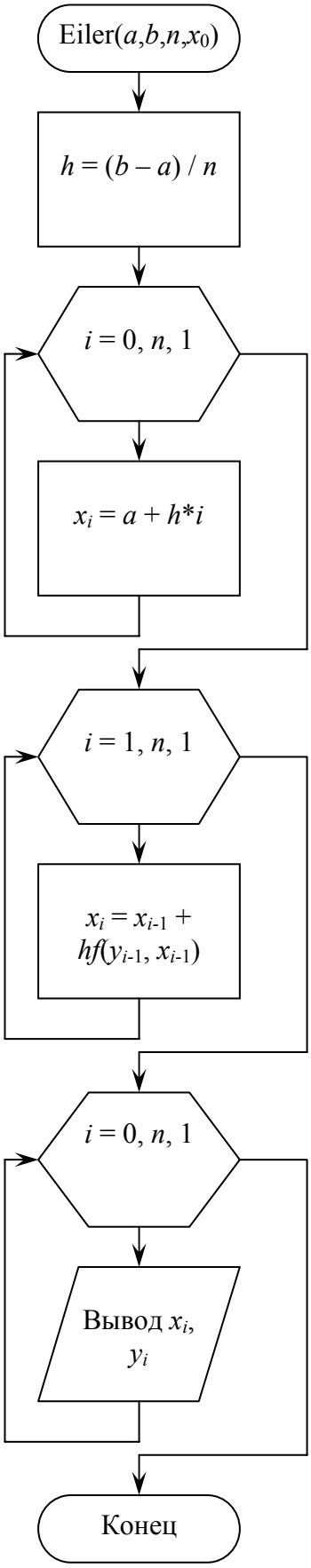

Рисунок 12.3 – Блок-схема алгоритма метода Эйлера

12.3.3. Численный пример

Методом Эйлера решить следующую задачу Коши $y' = \frac{2}{x^2} - y^2$, $y(1) = 0$ на интервале [1; 3].

Решение. Возьмем $n = 15$. Тогда шаг h, вычисленный по формуле (12.9) будет равен $h = \frac{t_n - t_0}{n} = \frac{3-1}{20} = 0.1$.

Значения x_i и y_i, вычисленные соответственно по формулам (12.9) и (12.12), приведены в таблице 12.1.

Таблица 12.1 – Промежуточные результаты решения методом Эйлера

№ итерации	*x*	*y*	№ итерации	*x*	*y*
0	1.0	0	11	2.1	0.7425
1	1.1	0.2000	12	2.2	0.7327
2	1.2	0.3613	13	2.3	0.7203
3	1.3	0.4871	14	2.4	0.7063
4	1.4	0.5817	15	2.5	0.6911
5	1.5	0.6499	16	2.6	0.6753
6	1.6	0.6966	17	2.7	0.6593
7	1.7	0.7262	18	2.8	0.6433
8	1.8	0.7427	19	2.9	0.6274
9	1.9	0.7492	20	3.0	0.6118
10	2.0	0.7485			

На рисунках 12.4-12.5 представлены графики решения задачи методом Эйлера (при n=20 и n=40) и точного решения.

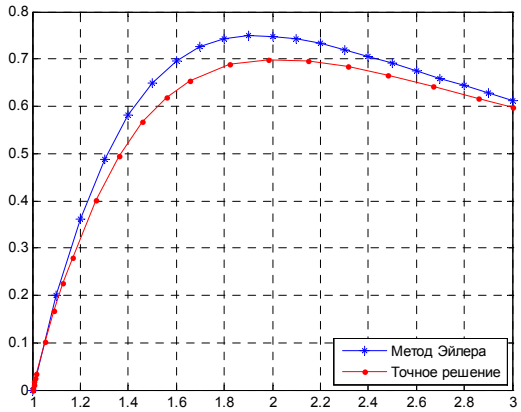

Рисунок 12.4 – Графики решения задачи методом Эйлера (n = 20) и точного решения

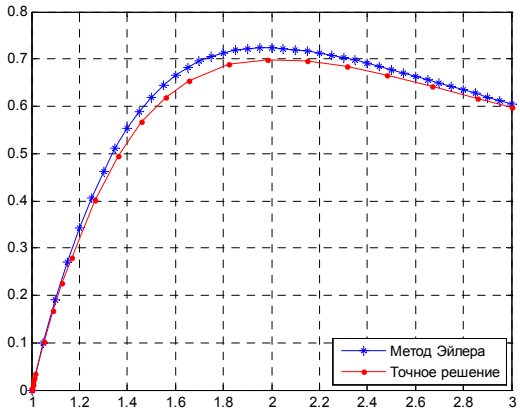

Рисунок 12.5 – Графики решения задачи методом Эйлера (n = 40) и точного решения

12.3.4. Встроенные функции MATLAB для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Для решения систем ОДУ в MATLAB реализованы различные методы. Их реализации названы решателями ОДУ. Обобщенное название solver (решатель) означает один из возможных численных методов решения ОДУ: ode45, ode23, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb, bvp4c или pdepe.

Решатели реализуют следующие методы решения ОДУ:

1) ode45 – одношаговые явные методы Рунге-Кутта 4-го и 5-го порядка; это классический метод, рекомендуемый для начальной пробы решения, во многих случаях он дает хорошие результаты;

2) ode23 – одношаговые явные методы Рунге-Кутта 2-го и 4-го порядка; при умеренной жесткости системы ОДУ и низких требованиях к точности этот метод может дать выигрыш в скорости решения;

3) ode113 – многошаговый метод Адамса-Башворта-Мултона переменного порядка; это адаптивный метод, который может обеспечить высокую точность решения;

4) ode23tb – неявный метод Рунге-Кутта в начале решения и метод, использующий формулы обратного дифференцирования 2-го порядка.

Имеются и другие функции для решения ОДУ.

Покажем применение решателя ОДУ для решения уравнения, приведенном в предыдущем пункте:

$$y' = \frac{2}{x^2} - y^2, \; y(1) = 0.$$

Перед решением нужно записать дифференциальное уравнение в виде ode-функции. Для этого в главном меню выберем File > New > M-File и введем

```
function dy = dp(x,y)
dy = zeros(1,1);
dy(1) = 2/(x^2)-y^2;
```

Сохраним m-файл-функцию под именем dp.m. Тогда решение решателем ode15s и сопровождающий его график (рисунок 12.6) можно получить, используя следующие команды:

```
>> [x,y] = ode15s(@dp,[1 3],0);
>> plot(x,y,'r-*');
>> grid on;
```

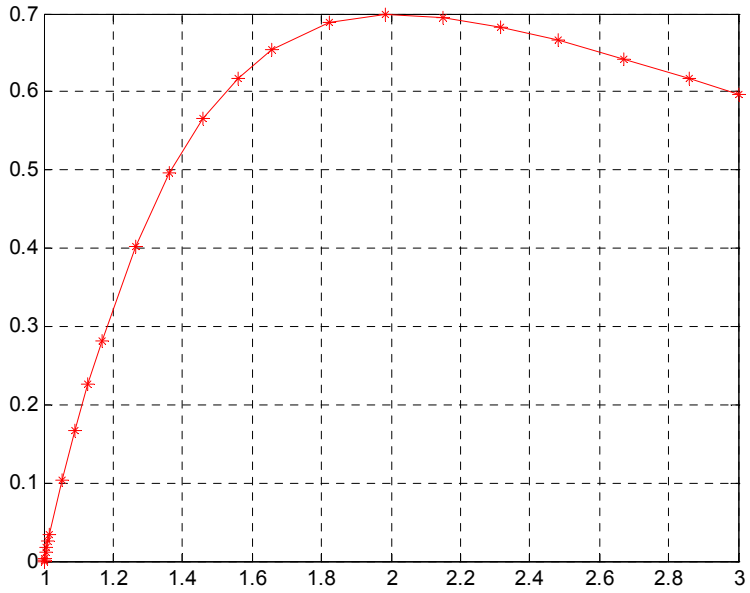

Рисунок 12.6 – График решения уравнения

12.4. Задание.

1. Создать m-файл для решения дифференциального уравнения методом Эйлера (в m-файл включить решение уравнения с помощью встроенных решателей ОДУ системы MATLAB).

2. Найти решение дифференциального уравнения ручным способом, с помощью разра-

ботанного m-файла и встроенных функций MATLAB, сравнить полученные результаты и определить абсолютные и относительные погрешности метода Эйлера. Для решения ОДУ вручную возьмите $n = 10$.

Варианты заданий.

1) $y' - y = 2xy^2, y(0) = 0.5$, [0; 0.5];

2) $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, y(0) = 1$, [0; 7];

3) $3(xy' + y) = xy^2, y(1) = 3$, [1; 2];

4) $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1 - x^3), y(0) = -1$, [0; 1];

5) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}, y(1) = 1$, [1; 4];

6) $\begin{matrix} 2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x}y^{-1}, \\ y(0) = 2 \end{matrix}$, [0; 4];

7) $xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1$, [1; 5];

8) $4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2, y(0) = 1$, [0; 2];

9) $y' + xy = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 1$, [0; 4];

10) $y' + xy = -x^3, y(0) = 3$, [0; 6];

11) $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1$, [1; 6];

12) $y' - 3x^2y = \frac{x^2(1 + x^3)}{3}, y(0) = 0$, [0; 1];

13) $y' - \frac{y}{x} = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1$, [1; 7];

14) $y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -\frac{1}{2}$, [0; 1];

15) $y' + \frac{y}{x} = 3x, y(1) = 2$, [1; 3];

16) $y' - \frac{2y}{x + 1} = (x + 1)^3, y(0) = \frac{1}{2}$, [0; 4];

17) $y' - \frac{y}{x} = x^2, y(1) = 0$, [1; 4];

18) $y' - \frac{2}{x + 1}y = e^x(x + 1)^2, y(0) = 1$, [0; 5];

19) $y' - \frac{xy}{2(1 - x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3}$, [0; 0.5];

20) $\begin{matrix} 2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, \\ y(0) = 1 \end{matrix}$, [0; 6];

21) $y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1}$, [1; 5];

22) $y' - y\cos x = \sin 2x, y(0) = -1$, [0; 7];

23) $y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2, y(1) = 3$, [1; 6];

24) $y' + \frac{1 - 2x}{x^2}y = 1, y(1) = 1$, [1; 3];

25) $y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x, y(0) = 1$, [0; 4];

26) $y' - y\cos x = -\sin 2x, y(0) = 3$, [0; 4];

27) $y' + \frac{y}{x} = \sin x, y(\pi) = \frac{1}{\pi}$, [π; 2π];

28) $y' - \frac{y}{x + 1}y = e^x(x + 1), y(0) = 1$, [0; 0.5];

29) $y' + \frac{2}{x}y = x^2, y(1) = -\frac{5}{6}$, [1; 7];

30) $y' - \frac{y}{x + 2} = x^2 + 2x, y(1) = \frac{3}{2}$, [0; 6].

12.5. Примерные вопросы на защите работы:

1. Где применяются дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений?
2. На какие две категории подразделяются дифференциальные уравнения в зависимости от числа независимых переменных?
3. Какие уравнения называются обыкновенными дифференциальными уравнениями?
4. Что называется порядком дифференциального уравнения?
5. Приведите форму записи уравнения, разрешенного относительно старшей производной.
6. Какое решение уравнения называется общим, а какое частным?
7. На какие две задачи подразделяются дифференциальные уравнения в зависимости от задания дополнительных условий?
8. Приведите геометрическую интерпретацию метода Эйлера.
9. Приведите алгоритм и блок-схему алгоритма метода Эйлера.
10. Какие функции системы MATLAB предназначены для решения ОДУ?