



Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

## **Методические указания**

### **КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ**

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана

КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО  
ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

*Методические указания к курсовой работе  
по теоретической механике*

Москва  
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
2007

УДК 539.3  
ББК 22.21  
К16

Рецензент *Л.П. Варламова*

**Кинематика сложного движения точки:** Методические  
К16 указания к курсовой работе по теоретической механике /  
В.В. Дубинин, Г.М. Тушева, Г.И. Гатауллина, А.В. Ремизов. –  
М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 52 с.: ил.

Представлены 40 вариантов задач курсовой работы по курсу теоретической механики на тему «Кинематика сложного движения точки», четыре примера решения типовых вариантов.

Для студентов 1-го курса.

Ил. 26.

УДК 539.3  
ББК 22.21

## ВВЕДЕНИЕ

Студент в выданном варианте курсового задания получает схему механической системы (механизма), описание схемы (с указанием номера варианта задания) и общие условия, в которых указывается, что необходимо определить в задании (контрольные вопросы вариантов).

На схеме варианта курсового задания положение механической системы (механизма) указано в момент времени  $t = 1$  с в неподвижной системе координат  $x_1y_1z_1$ . Положение точки  $M$  при  $t = 1$  с студент определяет в подвижной системе координат с помощью закона относительного движения  $M_0M = f(t)$ , где  $M_0, M$  – начальное и текущее положения точки  $M$ . Заданные законы движения механизма справедливы на расчетном отрезке времени, включающем момент времени  $t = 1$  с.

В большинстве вариантов заданий системы совершают движение в плоскости чертежа. В вариантах 7, 27, 28, 30, 31 системы пространственные.

Использование ЭВМ при расчетах курсовых заданий согласуется с преподавателем.

Размерность в законах движений линейных величин  $[S] = \text{м}$ , угловых  $[\varphi] = \text{рад}$ ,  $[t] = \text{с}$ . Размерность соблюдается следующим образом:

1)  $S = a + bt + ct^2 + de^{kt+k_1} + a_1rt^2$ , где  $[S] = [r] = \text{м}$ , тогда  $[a] = [d] = \text{м}$ ,  $[b] = \text{м/с}$ ,  $[c] = \text{м/с}^2$ ,  $[k] = \text{с}^{-1}$ ,  $[k_1] = 0$  (безразмерная величина),  $[a_1] = \text{с}^{-2}$ ;

2)  $\varphi = b_1t + c_1t^2$ , где  $[\varphi] = \text{рад}$ ,  $[b_1] = \text{рад/с}$ ,  $[c_1] = \text{рад/с}^2$ .

**Пример.** Если  $S = 0,1(6t - t^2)$ , то  $b = 0,6 \text{ м/с}$ ,  $c = -0,1 \text{ м/с}^2$ . Если  $\varphi = 4t - t^2$ , то  $b_1 = 4 \text{ рад/с}$ ,  $c_1 = -1 \text{ рад/с}^2$ .

В каждом варианте курсового задания, рассматривая движение точек  $M$  и  $D$  как сложное, студент решает для точки  $M$  «прямую» задачу, а для точки  $D$  – «обратную» задачу (см. примеры).

## 1. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Для момента времени  $t = 1$  с выполнить следующее.

1. Определить:

в вариантах 1–6, 8, 10–12, 16–19, 21–24, 26–29, 32–33 угловые скорость и ускорение звена, несущего на себе точку  $M$ , а также относительное ускорение точки  $D$  (по отношению к звену 2);

в вариантах 7, 14, 20 – абсолютные скорость и ускорение точки  $D$  и ее относительное ускорение по отношению к звену 2;

в вариантах 9, 15, 25, 30, 31, 34 – угловые скорость и ускорение звена 2 и относительное ускорение точки  $D$  по отношению к звену 2;

в варианте 13 – угловые скорость и ускорение звена 2 и относительное ускорение точки (выступа)  $D_{(2)}$  относительно диска 1;

в вариантах 35–40, связав подвижную систему координат, указанную на схеме механизма, с телом 1, – абсолютные, относительные и переносные скорости и ускорения, а также кориолисово ускорение точки  $D_{(i)}$  того тела, номер которого  $i$  указан при точке.

2. Найти по всех вариантах абсолютные скорость и ускорение точки  $M$ .

3. Изобразить на рисунках схем механической системы (механизма) все векторы скоростей и ускорений точек  $M$  и  $D$ . Направление определяемых угловых скоростей и ускорений звеньев указать на схемах круговыми стрелками.

В некоторых вариантах задания при точке  $D$  индексом  $i$  указан номер звена, которому она принадлежит. В ряде вариантов в качестве точки  $D$  рассматривается малое кольцо.

Для решения и «прямой», и «обратной» задач для сложного движения точки используются теоремы сложения скоростей и ускорений

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e \quad \text{и} \quad \vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k,$$

где  $\vec{V}$  и  $\vec{a}$  – абсолютные,  $\vec{V}_r$  и  $\vec{a}_r$  – относительные,  $\vec{V}_e$  и  $\vec{a}_e$  – переносные скорости и ускорения точки. Ускорение Кориолиса  $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$ , где  $\vec{\omega}_e$  – угловая скорость переносного движения.

Методические указания к выполнению курсовой работы и решению задач по теме «Кинематика сложного движения точки» (Дубинин В.В., Гатауллина Г.И., Гушева Г.М. М., 2005) содержат примеры подробного решения разнообразных «прямых» и «обратных» задач и являются основным руководством при выполнении этого курсового задания. Проработав эти методические указания, полезно рассмотреть приведенные ниже примеры решения типовых вариантов данного курсового задания.

## 2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ВАРИАНТОВ КУРСОВОГО ЗАДАНИЯ

**Пример 1.** Диск 1 (рис. 1) катится без скольжения по прямой направляющей, закон вращения его имеет вид  $\varphi = \frac{\pi}{2}(3t - t^2)$ ,  $[t] = \text{с}$ . По пазу 2 на диске движется точка  $M$  по закону  $M_0M = S = R(1 - \cos kt)$ ,  $[t] = \text{с}$ . В точке  $D$  диска закреплена шарнирно втулка 3, связанная со стержнем 4, вращающимся вокруг оси  $O(z_1)$ ,  $[\varphi] = \text{рад}$ ,  $[S] = \text{м}$ .

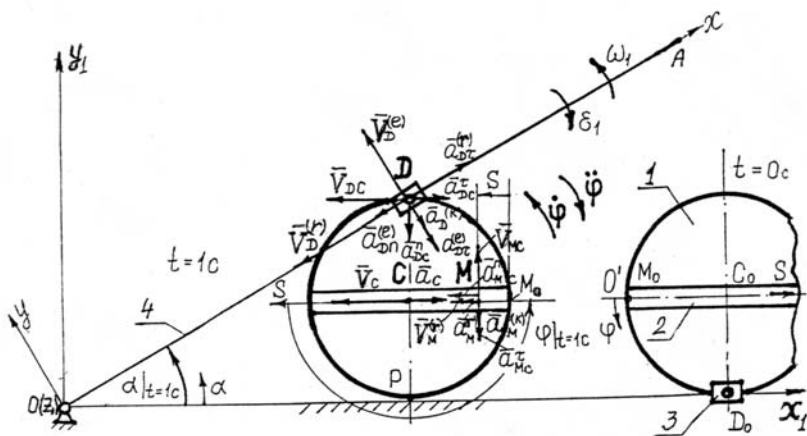


Рис. 1

1. Определить абсолютные скорость и ускорение точки  $M$ , угловую скорость и ускорение стержня и относительное ускорение точки  $D$  при  $t = 1 \text{ с}$ .

2. Составить уравнения для определения величин, указанных в п. 1, в функции времени; провести расчеты на ЭВМ, построить графические зависимости.

3. Проверить уравнения п. 2 с помощью уравнений кинематики точки.

Принять  $R = 0,2$  м,  $k = \frac{\pi}{4}$  рад/с,  $OD_0 = 1,32$  м =  $l$ .

**Решение.**

1. а) Определим положение системы при  $t = 0$  с и  $t = 1$  с. С помощью законов движения  $\varphi = \frac{\pi}{2}(3t - t^2)$ ,  $S = 0,2\left(1 - \cos\frac{\pi}{4}t\right)$  получим при  $t = 0$  с  $\varphi = 0$  рад,  $S = 0$  м, при  $t = 1$  с  $\varphi = \pi$  рад,  $S = 0,0586$  м. Эти два положения изображены на рис. 1. Координаты точки  $D$  равны:

$$x_{1D} = l - R\varphi + R \sin \varphi, \quad y_{1D} = R(1 - \cos \varphi), \quad (1)$$

при  $t = 1$  с  $\varphi = \pi$  рад,  $x_{1D} = l - \pi R = 1,32 - 0,2\pi = 0,692$  м,  $y_{1D} = 0,2(1 - \cos \pi) = 0,4$  м,  $OD = \sqrt{x_{1D}^2 + y_{1D}^2}$ ,  $OD = 0,8$  м,  $\alpha = 30^\circ$ .

б) Будем рассматривать движение точки  $M$  как сложное. неподвижную систему координат  $Ox_1y_1(z_1)$  свяжем с неподвижной направляющей, подвижную систему  $M_0M = S$  – с диском  $l$ . Тогда относительное движение точки  $M$  – прямолинейное движение по пазу, переносное – плоское движение диска (движение подвижной системы  $M_0M = S$  по отношению к неподвижной  $Ox_1y_1(z_1)$ ).

Определим абсолютную скорость точки  $M$  при  $t = 1$  с с помощью формулы сложения скоростей

$$\underline{\underline{\vec{V}_M}} = \underline{\underline{\vec{V}_M^{(e)}}} + \underline{\underline{\vec{V}_M^{(r)}}}. \quad (2)$$

Для переносной скорости

$$\underline{\underline{\vec{V}_M^{(e)}}} = \underline{\underline{\vec{V}_C}} + \underline{\underline{\vec{V}_{MC}}}, \quad (3)$$

$$\underline{\underline{\vec{V}_{MC}}} \perp \underline{\underline{\vec{MC}}}, \quad V_C = CP \cdot \omega, \quad V_{MC} = MC \cdot \omega = (R - S)\omega, \quad \omega = \dot{\varphi},$$

при  $t = 1$  с  $\omega = \dot{\varphi} = \frac{\pi}{2}(3-2t)|_{t=1} \text{ с} = \frac{\pi}{2}$  рад/с  $> 0$ ,  $V_C = 0,2 \frac{\pi}{2} = 0,314$  м/с,  $V_{MC} = (0,2 - 0,0586) \frac{\pi}{2} = 0,222$  м/с.

Для относительной скорости точки  $M$  имеем

$$V_{M\tau}^{(r)} = \dot{S} = R \cdot k \sin kt;$$

$$V_{M\tau}^{(r)}|_{t=1} \text{ с} = 0,2 \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} t|_{t=1} \text{ с} = 0,111 \text{ м/с} > 0.$$

Получим  $\omega = \dot{\varphi} > 0$  и  $\dot{S} > 0$  при  $t = 1$  с, что означает: круговая стрелка  $\omega$  диска и вектор относительной скорости направлены в сторону положительного направления отсчета  $\varphi$  и  $S$ . На рис. 2 построен многоугольник скоростей для точки  $M$  по формуле

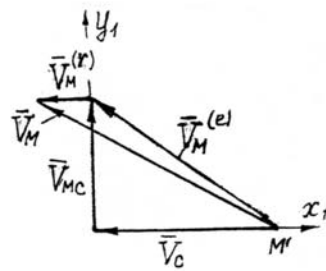


Рис. 2

$$\underline{\underline{V}}_M = \underline{\underline{V}}_C + \underline{\underline{V}}_{MC} + \underline{\underline{V}}_M^{(r)}. \quad (4)$$

Проекции и модуль абсолютной скорости точки  $M$  равны:

$$V_{Mx_1} = -V_C - V_M^{(r)}, \quad V_{Mx_1} = -0,314 - 0,111 = -0,425 \text{ м/с};$$

$$V_{My_1} = V_{MC}, \quad V_{My_1} = 0,222 \text{ м/с}; \quad V_M = \sqrt{V_{Mx_1}^2 + V_{My_1}^2}, \quad V_M = 0,48 \text{ м/с}.$$

Определим абсолютное ускорение точки  $M$ :

$$\underline{\underline{a}}_M = \underline{\underline{a}}_M^{(e)} + \underline{\underline{a}}_M^{(r)} + \underline{\underline{a}}_M^{(K)}, \quad (5)$$

где переносное ускорение точки  $M$

$$\underline{\underline{a}}_M^{(e)} = \underline{\underline{a}}_C + \underline{\underline{a}}_{MC}^n + \underline{\underline{a}}_{MC}^\tau, \quad \underline{\underline{a}}_C = \underline{\underline{a}}_C^n + \underline{\underline{a}}_C^\tau, \quad (6)$$



$\bar{a}_C^n = 0$ , так как точка  $C$  движется прямолинейно,  $a_C^\tau = \frac{dV_{C\tau}}{dt} = R\ddot{\varphi}$ , где  $\varepsilon = \ddot{\varphi}$ ,  $\varepsilon = -\pi \approx -3,14 \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$ , при  $\dot{\varphi} < 0$  проекция на  $S$  касательного ускорения точки  $C$  отрицательна ( $a_C^\tau < 0$ );  $a_{MC}^n = \omega^2 \cdot MC$ ,  $a_{MC}^\tau = \varepsilon \cdot MC$ ,  $MC = R - S$ . Относительное ускорение

$$a_{M\tau}^{(r)} = \ddot{S} = R \cdot k^2 \cdot \cos kt, \quad (7)$$

ускорение Кориолиса

$$\bar{a}_M^{(K)} = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_M^{(r)}),$$

где  $\bar{\omega}_e = \bar{\omega}$ ,  $a_M^{(K)} = 2\omega_e \cdot V_M^{(r)} \cdot \widehat{\sin(\bar{\omega}_e, \bar{V}_M^{(r)})}$ .

При  $t = 1$  с рассчитаем модули векторов ускорений:

$$a_C = a_C^\tau = 0,2 \cdot \pi = 0,628 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{MC}^n = \frac{\pi^2}{4}(0,2 - 0,0586) = 0,349 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{MC}^\tau = \pi(0,2 - 0,0586) = 0,444 \text{ м/с}^2,$$

где вектор  $\bar{a}_{MC}^n$  направлен от точки  $M$  к полюсу  $C$ ,  $\bar{a}_{MC}^\tau \perp \bar{MC}$  и направлен в соответствии с круговой стрелкой  $\varepsilon$  по отношению к точке  $C$ . Для  $\bar{a}_M^{(r)} = \bar{a}_{Mn}^{(r)} + \bar{a}_{M\tau}^{(r)}$  слагаемое  $\bar{a}_{Mn}^{(r)} = 0$ , так как относительное движение точки  $M$  прямолинейное;

$$a_{M\tau}^{(r)} = \dot{S} \Big|_{t=1\text{с}} = 0,2 \frac{\pi^2}{16} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = 0,087 \text{ м/с}^2 > 0,$$

вектор  $\bar{a}_M^{(r)} = \bar{a}_{M\tau}^{(r)}$  и направлен в сторону положительного отсчета  $S$ .

Для  $\bar{a}_M^{(K)}$  имеем

$$a_M^{(K)} = 2 \frac{\pi}{2} \cdot 0,111 \sin 90^\circ = 0,349 \text{ м/с}^2.$$

Направление ускорения  $\bar{a}_M^{(K)}$  получаем по правилу Жуковского поворотом вектора  $\bar{V}_M^{(r)}$  на  $90^\circ$  по круговой стрелке  $\omega_e = \omega$ . На рис. 3 построен векторный многоугольник для абсолютного ускорения точки  $M$  по формуле

$$\bar{a}_M = \bar{a}_C + \bar{a}_{MC}^n + \bar{a}_{MC}^\tau + \bar{a}_M^{(r)} + \bar{a}_M^{(K)}. \quad (8)$$

Проекции и модуль абсолютного ускорения точки  $M$  равны:

$$a_{Mx_1} = a_C - a_{MC}^n - a_M^{(r)},$$

$$a_{Mx_1} = 0,628 - 0,349 - 0,087 = 0,192 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{My_1} = -a_{MC}^\tau - a_M^{(K)}, \quad a_{My_1} = -0,444 - 0,349 = -0,793 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx_1}^2 + a_{My_1}^2}, \quad a_M = 0,816 \text{ м/с}^2.$$

*Замечание.* Переносные скорость и ускорение точки  $M$  равны скорости и ускорению точки  $M'$  диска, с которой в данный момент ( $t = 1$  с) совпадает точка  $M$ , поэтому

$$\bar{V}_{M'} = \bar{V}_M^{(e)}, \quad \bar{a}_{M'} = \bar{a}_M^{(e)}, \quad M'C = MC.$$

в) Будем рассматривать движение точки  $D$  как сложное, чтобы определить угловую скорость и ускорение стержня  $OA$ . Неподвижной будем считать систему  $Ox_1y_1(z_1)$ , подвижную систему координат  $Ox$  скрепим со стержнем  $OA$ .

Абсолютное движение точки  $D$  – движение точки диска, совершающего плоское движение, относительное движение точки  $D$  – прямолинейное движение по стержню, переносное движение ее – вращение стержня 4 вокруг оси  $O(z_1)$ .

Запишем для точки  $D$  формулу сложения скоростей:

$$\bar{V}_D = \bar{V}_D^{(e)} + \bar{V}_D^{(r)}. \quad (9)$$

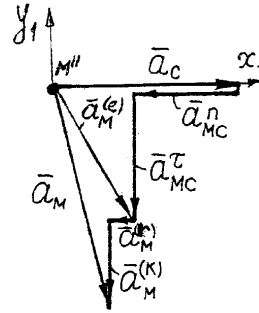


Рис. 3

Абсолютную скорость точки  $D$  определим по формуле плоско-го движения для диска  $I$ :

$$\underline{\underline{\vec{V}_D}} = \underline{\underline{\vec{V}_C}} + \underline{\underline{\vec{V}_{DC}}} \quad (10)$$

и тогда

$$\underline{\underline{\vec{V}_D}} = \underline{\underline{\vec{V}_C}} + \underline{\underline{\vec{V}_{DC}}} = \underline{\underline{\vec{V}_D^{(e)}}} + \underline{\underline{\vec{V}_D^{(r)}}}, \quad (11)$$

$$V_{DC} = \omega \cdot DC, \quad V_{DC} = \frac{\pi}{2} \cdot 0,2 = 0,314 \text{ м/с}, \quad V_C = 0,314 \text{ м/с}.$$

Скорость  $\vec{V}_C$  найдена ранее. Известны направления векторов переносной скорости ( $\vec{V}_D^{(e)} \perp \overline{OD}$ ) и относительной скорости (скорость  $\vec{V}_D^{(r)}$  направлена по  $\overline{OD}$ ) точки  $D$ .

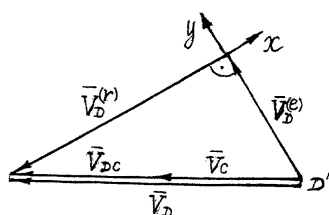


Рис. 4

На рис. 4 построен многоуголь-ник скоростей по формулам (9), (10) и (11).

Проекции членов уравнения (11) на оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно име-ют вид

$$-(V_C + V_{DC}) \cos \alpha = -V_D^{(r)} = V_{Dx}^{(r)},$$

$$V_D^{(r)} = 2 \cdot 0,314 \cdot \cos 30^\circ = 0,544 \text{ м/с};$$

$$(V_C + V_{DC}) \sin \alpha = V_D^{(e)} = V_{Dy}^{(e)},$$

$$V_D^{(e)} = 2 \cdot 0,314 \cdot \sin 30^\circ = 0,314 \text{ м/с}.$$

Угловая скорость стержня 4 равна:

$$\omega_1 = \frac{V_D^{(e)}}{OD}, \quad \omega_1 = \frac{0,314}{0,8} = 0,393 \text{ рад/с}.$$

Направление  $\omega_1$  ( $\oplus$ ) против хода часовой стрелки определено с помощью вектора скорости  $\vec{V}_D^{(e)}$  при повороте стержня 4 вокруг оси  $O(z_1)$ .

Угловое ускорение стержня 4 найдем с помощью теоремы Ко-риолиса для точки  $D$ :

$$\bar{a}_D = \bar{a}_D^{(e)} + \bar{a}_D^{(r)} + \bar{a}_D^{(K)}. \quad (12)$$

Абсолютное ускорение точки  $D$  определим по формуле для плоского движения диска  $I$ :

$$\bar{a}_D = \underline{\underline{\bar{a}_C}} + \underline{\underline{\bar{a}_{DC}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{DC}^\tau}}, \quad \bar{a}_{DC}^n = \omega^2 \cdot DC, \quad \bar{a}_{DC}^\tau = \varepsilon \cdot DC. \quad (13)$$

Ускорение  $\bar{a}_C$  вычислено ранее. Ускорение  $\bar{a}_{DC}^n$  направлено по  $\overline{DC}$ , ускорение  $\bar{a}_{DC}^\tau \perp \overline{DC}$  и направлено в соответствии с круговой стрелкой  $\varepsilon$  по отношению к полюсу  $C$ ; при  $t = 1$  с

$$\bar{a}_{DC}^n = \frac{\pi^2}{4} \cdot 0,2 = 0,493 \text{ м/с}^2; \quad \bar{a}_{DC}^\tau = \pi \cdot 0,2 = 0,628 \text{ м/с}^2.$$

Переносное ускорение

$$\bar{a}_D^{(e)} = \underline{\underline{\bar{a}_{Dn}^{(e)}}} + \underline{\underline{\bar{a}_{D\tau}^{(e)}}}, \quad (14)$$

нормальное переносное ускорение  $\bar{a}_{Dn}^{(e)} = \omega_1^2 \cdot OD$  и направлено по стержню 4 к оси  $O(z_1)$ :

$$\bar{a}_{Dn}^{(e)} \Big|_{t=1 \text{ с}} = 0,393^2 \cdot 0,8 = 0,124 \text{ м/с}^2; \quad \bar{a}_{D\tau}^{(e)} \perp \overline{OD}.$$

Кориолисово ускорение точки  $D$ :

$$\bar{a}_D^{(K)} = 2(\bar{\omega}_{e_1} \times \bar{V}_D^{(r)}),$$

где  $\bar{\omega}_{e_1} = \bar{\omega}_1$ ,

$$\bar{a}_D^{(K)} = 2\omega_1 \cdot V_D^{(r)} \cdot \widehat{\sin(\bar{\omega}_1, \bar{V}_D^{(r)})},$$

$$\bar{a}_D^{(K)} \Big|_{t=1 \text{ с}} = 2 \cdot 0,393 \cdot 0,544 = 0,428 \text{ м/с}^2.$$

Формула (12) с учетом (13) и (14) примет вид

$$\bar{a}_D = \underline{\underline{\bar{a}_C}} + \underline{\underline{\bar{a}_{DC}^n}} + \underline{\underline{\bar{a}_{DC}^\tau}} = \underline{\underline{\bar{a}_{Dn}^{(e)}}} + \underline{\underline{\bar{a}_{D\tau}^{(e)}}} + \underline{\underline{\bar{a}_D^{(r)}}} + \underline{\underline{\bar{a}_D^{(K)}}}. \quad (15)$$

Направление ускорения  $\bar{a}_D^{(K)}$  получаем по правилу Жуковского поворотом вектора  $\bar{V}_D^{(r)}$  на  $90^\circ$  по круговой стрелке  $\omega_{e_1} = \omega_1$ . Вектор относительного ускорения точки  $D$  равен  $\bar{a}_D^{(r)} = \bar{a}_{Dn}^{(r)} + \bar{a}_{D\tau}^{(r)}$ , где  $\bar{a}_{Dn}^{(r)} = 0$ , так как относительное движение точки прямолинейное. Поэтому вектор  $\bar{a}_D^{(r)} = \bar{a}_{D\tau}^{(r)}$  и направлен по стержню 4.

Векторный многоугольник по уравнению (15) построен на рис. 5. Проекции членов уравнения (15) на оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно имеют вид

$$(a_C + a_{DC}^\tau) \cos \alpha - a_{DC}^n \sin \alpha = a_{D\tau}^{(r)} - a_{Dn}^{(e)};$$

$$-(a_C + a_{DC}^\tau) \sin \alpha - a_{DC}^n \cos \alpha = -a_D^{(K)} - a_{D\tau}^{(e)};$$

$$a_{D\tau}^{(r)} = (0,628 + 0,628) \cos 30^\circ - 0,493 \cdot \sin 30^\circ + 0,124 = 0,965 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{D\tau}^{(e)} = (0,628 + 0,628) \sin 30^\circ + 0,493 \cdot \cos 30^\circ - 0,428 = 0,628 \text{ м/с}^2.$$

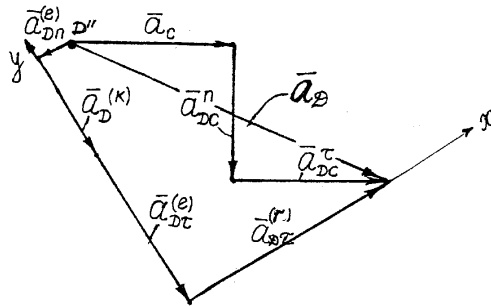


Рис. 5

Угловое ускорение стержня 4

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{D\tau}^{(e)}}{OD}, \quad \varepsilon_1 = \frac{0,628}{0,8} = 0,785 \text{ рад/с}^2.$$



Проекции уравнений (11) и (15) на подвижные оси  $Oxy$  ( $OD = x_D$ ) для точки  $D$ :

$$\begin{aligned} V_{Dx} &= V_{Cx} + V_{DCx} = V_{Dx}^{(e)} + V_{Dx}^{(r)}; \quad V_{Dx}^{(e)} = 0, \\ V_{Dx}^{(r)} &= \dot{x}_D = -R\dot{\varphi} \cos \alpha + R\dot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha); \\ V_{Dy} &= V_{Cy} + V_{DCy} = V_{Dy}^{(e)} + V_{Dy}^{(r)}; \quad V_{Dy}^{(r)} = 0, \\ V_{Dy}^{(e)} &= OD \omega_1 = x_D \dot{\alpha} = R\dot{\varphi} \sin \alpha + R\dot{\varphi} \sin(\varphi - \alpha). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\omega_1 = \dot{\alpha} = \frac{R\dot{\varphi} [\sin \alpha + \sin(\varphi - \alpha)]}{x_D};$$

$$\begin{aligned} a_{Dx} &= a_{Cx} + a_{DCx}^n + a_{DCx}^\tau = (a_{Dn}^{(e)})_x + (a_{D\tau}^{(e)})_x + (a_{D\tau}^{(r)})_x + a_{Dx}^{(K)}; \\ & -R\ddot{\varphi} \cos \alpha + R\ddot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) - R\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \alpha) = -x_D \dot{\alpha}^2 + \ddot{x}_D; \\ (a_{D\tau}^{(r)})_x &= \ddot{x}_D = x_D \dot{\alpha}^2 - R\ddot{\varphi} [\cos \alpha - \cos(\varphi - \alpha)] - R\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \alpha); \\ a_{Dy} &= a_{Cy} + a_{DCy}^n + a_{DCy}^\tau = (a_{Dn}^{(e)})_y + (a_{D\tau}^{(e)})_y + (a_{D\tau}^{(r)})_y + a_{Dy}^{(K)}; \\ & R\ddot{\varphi} \sin \alpha + R\ddot{\varphi} \sin(\varphi - \alpha) + R\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \alpha) = x_D \ddot{\alpha} + 2\dot{x}_D \dot{\alpha}, \end{aligned}$$

откуда

$$\varepsilon_1 = \ddot{\alpha} = \frac{1}{x_D} \left\{ -2\dot{x}_D \dot{\alpha} + R\ddot{\varphi} [\sin \alpha + \sin(\varphi - \alpha)] + R\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \alpha) \right\}.$$

3. Проведем проверку полученных в п. 2 формул с помощью кинематики точки.

Запишем координаты точки  $M$  в неподвижной системе координат  $Ox_1y_1$ :

$$x_{1M} = l - R\varphi - (R - S) \cos \varphi, \quad y_{1M} = R - (R - S) \sin \varphi.$$

Дифференцируя эти выражения, получим

$$V_{Mx_1} = \dot{x}_{1M} = -R\dot{\varphi} + (R - S)\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{S} \cos \varphi;$$

$$V_{M\gamma_1} = \dot{y}_{1M} = -(R-S)\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{S} \sin \varphi.$$

Дифференцируя второй раз, получим

$$\begin{aligned} a_{Mx_1} &= \ddot{x}_{1M} = -R\ddot{\varphi} + (R-S)\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + (R-S)\ddot{\varphi} \sin \varphi - \\ &\quad - \dot{S}\dot{\varphi} \sin \varphi + \ddot{S} \cos \varphi - \dot{S}\dot{\varphi} \sin \varphi = \\ &= -R\ddot{\varphi} + (R-S)\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + (R-S)\ddot{\varphi} \sin \varphi + \ddot{S} \cos \varphi - 2\dot{S}\dot{\varphi} \sin \varphi; \\ a_{My_1} &= \ddot{y}_{1M} = (R-S)\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - (R-S)\ddot{\varphi} \cos \varphi + \dot{S}\dot{\varphi} \cos \varphi + \\ &\quad + \ddot{S} \sin \varphi + \dot{S}\dot{\varphi} \cos \varphi = (R-S)\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - (R-S)\ddot{\varphi} \cos \varphi + \\ &\quad + \ddot{S} \sin \varphi + 2\dot{S}\dot{\varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Эти формулы совпадают с аналогичными формулами п. 2.

Для точки  $D$  запишем уравнения

$$x_{1D} = x_D \cos \alpha, \quad y_{1D} = x_D \sin \alpha. \quad (16)$$

Дифференцируя (16) и (1), получим

$$\dot{x}_{1D} = \dot{x}_D \cos \alpha - x_D \dot{\alpha} \sin \alpha, \quad \dot{y}_{1D} = \dot{x}_D \sin \alpha + x_D \dot{\alpha} \cos \alpha; \quad (17)$$

$$\dot{x}_{1D} = -R\dot{\varphi} + R\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y}_{1D} = R\dot{\varphi} \sin \varphi. \quad (18)$$

Из (17) и (18) найдем

$$\dot{x}_{1D} \cos \alpha + \dot{y}_{1D} \sin \alpha = \dot{x}_D = V_{Dx}^{(r)}; \quad (19)$$

$$V_{Dx}^{(r)} = -R\dot{\varphi} \cos \alpha + R\dot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha);$$

$$-\dot{x}_{1D} \sin \alpha + \dot{y}_{1D} \cos \alpha = x_D \dot{\alpha} = V_{Dy}^{(e)}; \quad (20)$$

$$\dot{\alpha} = \omega_1 = \frac{R\dot{\varphi}[\sin \alpha + \sin(\varphi - \alpha)]}{x_D}.$$

Дифференцируя (19), (20), (18), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_D &= \ddot{x}_{1D} \cos \alpha + \ddot{y}_{1D} \sin \alpha + \dot{\alpha}(-\dot{x}_{1D} \sin \alpha + \dot{y}_{1D} \cos \alpha) = \\ &= \ddot{x}_{1D} \cos \alpha + \ddot{y}_{1D} \sin \alpha + x_D \dot{\alpha}^2; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
x_D \ddot{\alpha} + \dot{x}_D \dot{\alpha} &= -\ddot{x}_{1D} \sin \alpha + \ddot{y}_{1D} \cos \alpha - \dot{\alpha}(\dot{x}_{1D} \cos \alpha + \dot{y}_{1D} \sin \alpha) = \\
&= -\ddot{x}_{1D} \sin \alpha + \ddot{y}_{1D} \cos \alpha - \dot{\alpha} \dot{x}_D; \\
\ddot{x}_{1D} &= -R\ddot{\varphi} + R\dot{\varphi} \cos \varphi - R\dot{\varphi}^2 \sin \varphi; \\
\ddot{y}_{1D} &= R\ddot{\varphi} \sin \varphi + R\dot{\varphi}^2 \cos \varphi.
\end{aligned}$$

Окончательно найдем

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_D &= a_{Dx}^{(r)} = -R\ddot{\varphi} \cos \alpha + R\dot{\varphi} \cos(\varphi - \alpha) - R\dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \alpha) + x_D \dot{\alpha}^2; \\
\ddot{\alpha} &= \varepsilon_1 = \frac{1}{x_D} \{-2\dot{x}_D \dot{\alpha} + R\dot{\varphi}[\sin \alpha + \sin(\varphi - \alpha)] + R\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \alpha)\}.
\end{aligned}$$

Все формулы для точки  $D$  совпадают с полученными ранее. На рис. 7 представлены результаты расчетов на ЭВМ.

**Пример 2.** Кольцо  $D$  (рис. 8) движется по закону  $x_1 = 2t - 1$  м,  $y_1 = 2t^2 - 1$  м в неподвижной системе координат  $Ox_1y_1$ . Оно надето на стержень  $I$ , который вращается вокруг оси  $O_1z_1$ . Кольцо  $D$  считать точкой. С осью  $O_1z_1$  жестко связана квадратная пластинка 2 со стороной  $b$ . На пластинке закреплена часть трубки 3, изогнутой по дуге окружности. Внутри трубки по закону  $M_0M = \frac{\pi}{2}rt^2$  м

движется точка  $M$  ( $M_0$ ,  $M$  – начальное и текущее положения точки  $M$ ). В законах движения  $[t] = c$ ,  $b = 2$  м.

В момент времени  $t = 1$  с определить: 1) угловые скорость и ускорение стержня  $I$ , ускорение кольца  $D$  по отношению к стержню  $I$ ; 2) абсолютные скорость и ускорение точки  $M$ .

**Решение.** Неподвижная система отсчета задана (см. рис. 8). Подвижную систему отсчета  $Oxy$  свяжем со стержнем  $I$ . Абсолютное движение точки  $D$  задано в условии задачи. Уравнение абсолютной траектории точки  $D$  имеет вид

$$y_1 = \frac{(x_1 + 1)^2}{2} - 1, \quad -1 \leq x_1 < \infty;$$

при  $t = 0$   $x_1 = -1$  м,  $y_1 = -1$  м, при  $t = 1$  с  $x_1 = y_1 = 1$  м ( $O_1D = \sqrt{2} = 1,41$  м;  $\alpha = 45^\circ$ ). Относительное движение точки  $D$  (кольца) – прямолинейное движение вдоль стержня  $I$ , переносное движение – вращение стержня  $I$  вокруг оси  $O_1z_1$ .

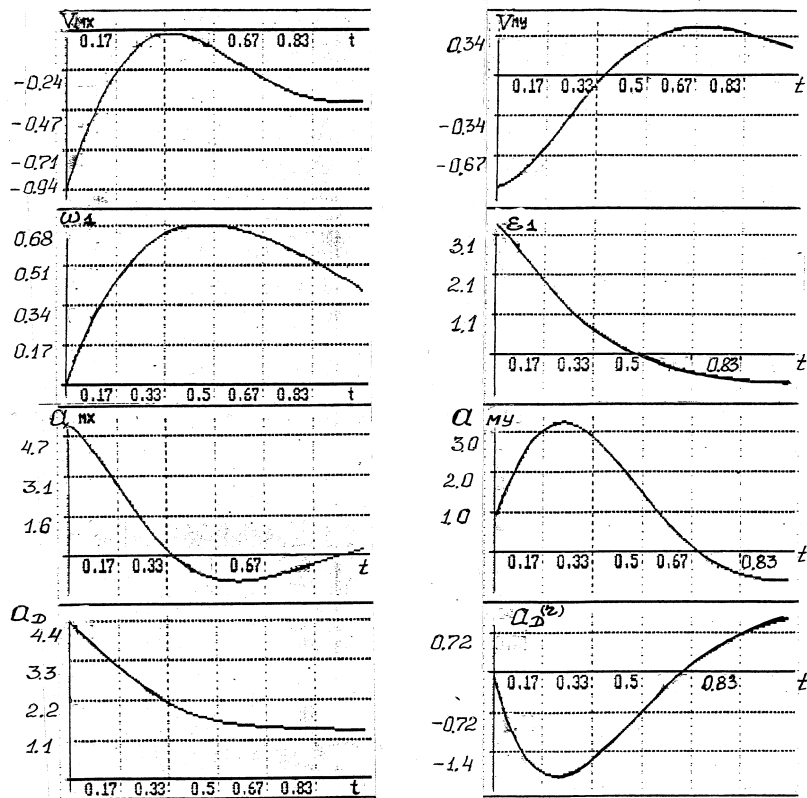


Рис. 7

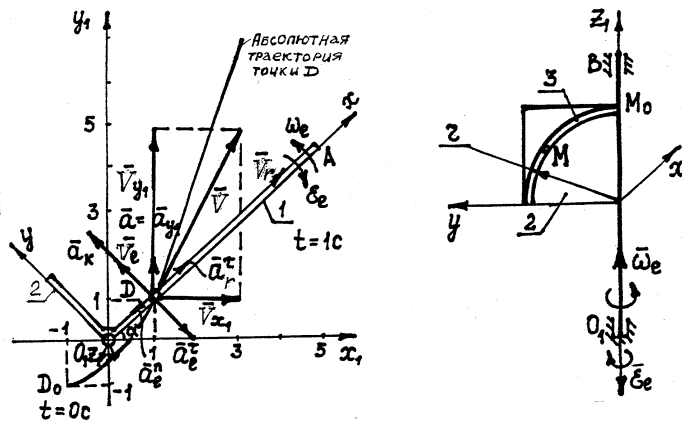


Рис. 8

Формулу сложения скоростей для точки  $D$  запишем (индекс  $D$  опустим) в виде

$$\underline{\underline{\vec{V}}} = \underline{\underline{\vec{V}_{x_1}}} + \underline{\underline{\vec{V}_{y_1}}} = \underline{\underline{\vec{V}_r}} + \underline{\underline{\vec{V}_e}}. \quad (21)$$

Проекции абсолютной скорости точки на неподвижные оси координат

$$V_{x_1} = \dot{x}_1 = 2 \text{ м/с}; \quad V_{y_1} = \dot{y}_1 = 4t,$$

при  $t = 1 \text{ с}$   $V_{x_1} = 2 \text{ м/с}$ ,  $V_{y_1} = 4 \text{ м/с} > 0$ .

Построим многоугольник скоростей (рис. 9). Составим уравнения проекций (21) на подвижные оси координат  $x, y$ :

$$V_{x_1} \cos \alpha + V_{y_1} \sin \alpha = V_r, \quad V_r = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} = 4,24 \text{ м/с};$$

$$-V_{x_1} \sin \alpha + V_{y_1} \cos \alpha = V_e, \quad V_e = -2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ м/с}.$$

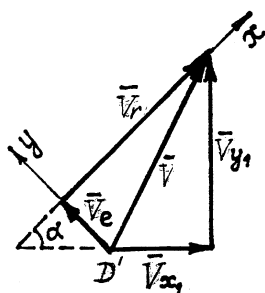


Рис. 9

Найдем угловую скорость стержня  $I$ :

$$\omega_e = \frac{V_e}{O_1 D}; \quad \omega_e = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \text{ рад/с}.$$

Направление круговой стрелки угловой скорости  $\omega_e$  указано на рис. 8 и определено с помощью направления вектора  $\vec{V}_e$  точки  $D$  по отношению к оси вращения  $O_1 z_1$  стержня  $I$  (угловая скорость  $\omega_e$  направлена против хода часовой стрелки  $(\oplus)$ ). Формула сложения

ускорений для точки  $D$  имеет вид

$$\underline{\underline{\vec{a}}} = \underline{\underline{\vec{a}_{x_1}}} + \underline{\underline{\vec{a}_{y_1}}} = \underline{\underline{\vec{a}_r^{\tau}}} + \underline{\underline{\vec{a}_e^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_e^{\tau}}} + \underline{\underline{\vec{a}_K}}. \quad (22)$$

Относительное движение точки  $D$  прямолинейное, поэтому  $\vec{a}_r^n = 0$ .

Проекции абсолютного ускорения точки  $D$  на оси  $x_1, y_1$ :

$$a_{x_1} = \ddot{x}_1 = 0; \quad a_{y_1} = \ddot{y}_1 = 4 \text{ м/с}^2 > 0 \quad (\vec{a} = \vec{a}_{y_1}).$$

Вычислим величину нормальной составляющей переносного ускорения  $a_e^n = \omega_e^2 \cdot O_1D$ ;  $a_e^n = 1^2 \cdot \sqrt{2} = 1,41 \text{ м/с}^2$ . Вектор  $\vec{a}_e^n$  направлен к оси вращения  $O_1z_1$  стержня  $l$  перпендикулярно ей.

Определим ускорение Кориолиса точки  $D$ :

$$\vec{a}_K = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r), \quad a_K = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\vec{\omega}_e, \vec{V}_r}), \quad \vec{\omega}_e \perp \vec{V}_r;$$

$$a_K = 2\omega_e V_r \sin 90^\circ, \quad a_K = 2 \cdot 1 \cdot 4,24 = 8,48 \text{ м/с}^2.$$

Направление вектора  $\vec{a}_K$  точки  $D$  найдем по правилу Жуковского. Вектор  $\vec{\omega}_e$  перпендикулярен плоскости рисунка, в которой лежит вектор  $\vec{V}_r$  для точки  $D$ , поэтому повернем вектор  $\vec{V}_r$  на  $90^\circ$  по круговой стрелке  $\omega_e$ . Построим многоугольник ускорений (рис. 10).

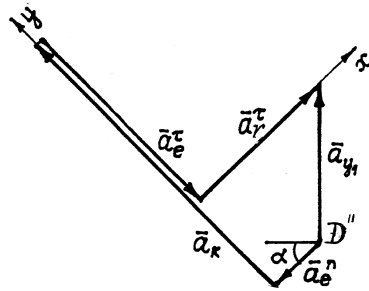


Рис. 10

Определим относительное ускорение точки  $D$  (по отношению к стержню  $l$ )  $\vec{a}_r^\tau$  и угловое ускорение  $\varepsilon_e$  стержня  $l$ .

Составим уравнение проекции (22) на подвижные оси координат  $x, y$ :

$$a_{y_1} \sin \alpha = -a_e^n + a_r^\tau, \quad a_r^\tau = a_{y_1} \sin \alpha + a_e^n, \quad a_r^\tau = 4 \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = 4,24 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{y_1} \cos \alpha = a_K - a_e^\tau, \quad a_e^\tau = a_K - a_{y_1} \cos \alpha, \quad a_e^\tau = 8,48 - 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5,66 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_e = \frac{a_e^\tau}{O_1D}, \quad \varepsilon_e = 4 \text{ рад/с}^2.$$

Направление вектора  $\bar{a}_r^{\tau}$  определено при построении многоугольника ускорений (см. рис. 10); направление круговой стрелки  $\varepsilon_e$  – в соответствии с направлением вектора  $\bar{a}_e^{\tau}$  по отношению к оси вращения стержня  $O_1z_1$  ( $\varepsilon_e$  ( $\curvearrowright$ ), см. рис. 8).

Вычислим абсолютные скорость и ускорение точки  $M$ . Подвижная и неподвижная системы координат те же, что и для точки  $D$ . Относительное движение точки  $M$  – криволинейное ее движение вдоль трубки  $3$ , переносное движение – вращение трубки вместе с пластиной (переносящей и точку  $M$ ) вокруг оси  $O_1z_1$ . Для переносного движения уже известны угловые скорость и ускорение при  $t = 1$  с.

Закон относительного движения точки  $M$  имеет вид  $M_0M = S_r = \frac{\pi}{2}rt^2$ ; он позволяет определить положение точки  $M$  в трубке  $3$  при  $t = 1$  с:

$$M_0M \Big|_{t=1\text{с}} = \frac{\pi}{2}r \cdot 1^2 = \frac{\pi r}{2} \text{ м}, \quad \varphi \Big|_{t=1\text{с}} = \frac{M_0M \Big|_{t=1\text{с}}}{r} = \frac{\pi}{2} \text{ рад.}$$

Абсолютная скорость точки  $M$  равна  $\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_e$  (индекс точки  $M$  опускаем). Относительная скорость  $V_{r\tau} = \dot{S}_r = \pi r t$  при  $t = 1$  с

$$V_{r\tau} \Big|_{t=1\text{с}} = \dot{S}_r = \pi r \cdot 1 \text{ м/с}, \quad r = b = 2 \text{ м}, \quad V_{r\tau} = 6,28 \text{ м/с} > 0.$$

Вектор относительной скорости направлен по касательной к трубке в сторону роста  $S_r$ .

Переносная скорость точки  $M$  равна  $V_e = \omega_e \cdot KM$ ,  $KM = r = b$ ,  $V_e = 1 \cdot 2 = 2$  м/с. Вектор  $\bar{V}_e = \bar{\omega}_e \times \overline{KM}$  ( $\bar{V}_e \perp \overline{KM}$  и направлен по отрицательному направлению оси  $x$ ) (рис. 11).

Определим проекции на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z_1$  абсолютной скорости точки  $M$ :

$$V_x = -V_e, \quad V_y = 0, \quad V_{z_1} = -V_r; \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_{z_1}^2},$$

$$V_x = -2 \text{ м/с}, \quad V_y = 0, \quad V_{z_1} = -6,28 \text{ м/с}, \quad V = 6,6 \text{ м/с}.$$

Абсолютное ускорение точки  $M$ :

$$\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{a}}_r^n + \underline{\underline{a}}_r^\tau + \underline{\underline{a}}_e^n + \underline{\underline{a}}_e^\tau + \underline{\underline{a}}_K.$$

Нормальная и касательная составляющие относительного ускорения точки  $M$ :

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{r}, \quad a_r^\tau = \ddot{S}_r = \pi r,$$

$$a_r^n = \frac{6,28^2}{2} = 19,7 \text{ м/с}^2, \quad a_r^\tau = 6,28 \text{ м/с}^2 > 0.$$

Вектор  $\underline{\underline{a}}_r^n$  направлен к центру кривизны относительной траектории – точке  $K$ , величина ускорения  $a_r^\tau$  положительна, поэтому вектор  $\underline{\underline{a}}_r^\tau$  направлен по касательной к относительной траектории точки  $M$  в сторону роста  $S_r$ .

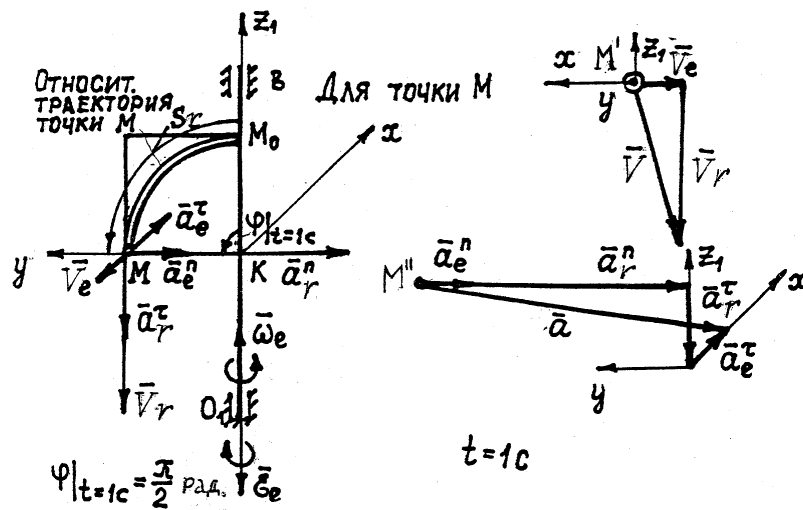


Рис. 11

Нормальная и касательная составляющие переносного ускорения точки  $M$ :

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot KM, \quad a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot KM;$$

$$a_e^n = 1^2 \cdot 2 = 2 \text{ м/с}^2, \quad a_e^\tau = 4 \cdot 2 = 8 \text{ м/с}^2.$$

Вектор  $\bar{a}_e^n$  направлен к оси вращения пластины и трубки  $O_1z_1$  и перпендикулярен ей, вектор  $\bar{a}_e^\tau = \bar{\varepsilon}_e \times \overline{KM}$  (вектор  $\bar{a}_e^\tau \perp \overline{KM}$  и направлен по положительному направлению оси  $x$ ).

Вектор кориолисова ускорения точки  $M$ :

$$\bar{a}_K = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r); \quad a_K = 2\omega_e V_r \sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{V}_r});$$

$$(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{V}_r}) = \pi, \quad \sin(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{V}_r}) = 0, \quad a_K = 0.$$

Определим проекции на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z_1$  абсолютного ускорения точки  $M$ :

$$a_x = a_e^\tau, \quad a_y = -a_e^n - a_r^n, \quad a_{z_1} = -a_r^\tau;$$

$$a_x = 8 \text{ м/с}^2, \quad a_y = -2 - 19,7 = -21,7 \text{ м/с}^2, \quad a_{z_1} = -6,28 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_{z_1}^2}; \quad a = 23,3 \text{ м/с}^2.$$

**Пример 3.** По неподвижной проволочной полуокружности  $I$  (рис. 12) по закону  $S = \frac{\pi R}{6} t^2$  м движется кольцо  $D$ , через которое проходит трубка 2, вращающаяся вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. В трубке 2 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,2t^2$  м.

В положении механизма при  $t = 1$  с, указанном на рис. 13, определить, принимая кольцо  $D$  за точку: 1) угловую скорость и ускорение трубки 2, относительные (по отношению к трубке 2) скорость и ускорение точки  $D$ ; 2) абсолютную скорость и ускорение точки  $M$ . Принять  $R = 0,2$  м,  $OA = 0,8$  м,  $H = 0,2$  м,  $[t] = \text{с}$ .

**Решение.** 1. Связав подвижную систему отсчета  $Oxy$  с трубкой  $OA$ , представим абсолютное движение точки  $D$  по окружности  $I$  как сумму двух движений – прямолинейного относительного по трубке  $OA$  и переносного – вращения трубки  $OA$  (переносящей точку  $D$ ) вокруг оси  $O(z_1)$ . Положение точки  $D$  при  $t = 1$  с:

$S|_{t=1 \text{ с}} = \frac{\pi R}{6}$  м,  $\psi = \frac{\pi}{6}$  рад. Абсолютные скорость и ускорение точки  $D$  (см. рис. 13):

$$V_{D\tau} = \dot{S} = \frac{\pi R}{3} t, \quad V_{D\tau}|_{t=1 \text{ с}} = 0,209 \text{ м/с}; \quad \bar{a}_D = \bar{a}_D^\tau + \bar{a}_D^n;$$

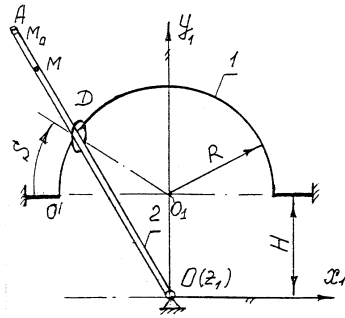


Рис. 12

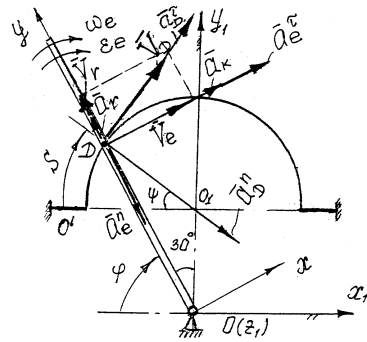


Рис. 13

$$a_D^{\tau} = \dot{V}_{D\tau} = \ddot{S} = \frac{\pi R}{3} = 0,209 \text{ м/с}^2;$$

$$a_D^n = \frac{V_D^2}{R} = \frac{\pi^2 R}{9} t^2;$$

$$a_D^n|_{t=1 \text{ с}} = 0,219 \text{ м/с}^2.$$

Относительную и переносную скорости определим из уравнения  $\underline{\underline{V}}_D = \underline{\underline{V}}_r + \underline{\underline{V}}_e$ , спроецировав его на оси  $x$  и  $y$  (рис. 14):

$$V_r = V_D \cos 60^\circ, V_r = 0,105 \text{ м/с}, V_e = V_D \cos 30^\circ, V_e = 0,181 \text{ м/с}.$$

Тогда при  $t = 1$  с угловая скорость трубки 2  $\omega_e = \frac{V_e}{OD}$ , где  $OD = 2R \cos 30^\circ$ ,  $OD = 0,346$  м,  $\omega_e = 0,52$  рад/с; направление круговой стрелки  $\omega_e$  ( $\curvearrowright$ ) соответствует вращению вектора  $\underline{\underline{V}}_e$  вокруг оси  $O(z_1)$  (см. рис. 13). Ускорение точки  $D$  в сложном движении запишем в виде

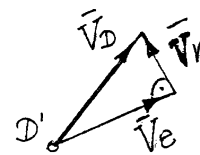


Рис. 14

$$\underline{\underline{a}}_D = \underline{\underline{a}}_r + \underline{\underline{a}}_e^n + \underline{\underline{a}}_e^{\tau} + \underline{\underline{a}}_K, \quad \underline{\underline{a}}_D = \underline{\underline{a}}_D^{\tau} + \underline{\underline{a}}_D^n,$$

где  $a_e^n = \omega_e^2 \cdot OD$ ,  $a_e^n = 0,095 \text{ м/с}^2$ ;  $\underline{\underline{a}}_K = 2(\underline{\underline{\omega}}_e \times \underline{\underline{V}}_r)$ ;



$$\vec{V}_r \perp \vec{\omega}_e, \quad a_K = 2\omega_e V_r \sin 90^\circ, \\ a_K = 0,11 \text{ м/с}^2.$$

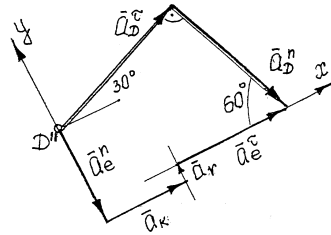


Рис. 15

Относительное  $\bar{a}_r = \bar{a}_r^t (\bar{a}_r^n = 0)$  и переносное касательное  $\bar{a}_e^t$  ускорения определяются методом проекций (рис. 15) на оси  $x$  и  $y$  соответственно:

$$a_D^t \cos 30^\circ + a_D^n \cos 60^\circ = \\ = a_K + a_e^t, \quad a_e^t = 0,185 \text{ м/с}^2;$$

$$a_e^t = \varepsilon_e \cdot OD; \quad \varepsilon_e = \frac{a_e^t}{OD}; \quad \varepsilon_e = 0,52 \text{ рад/с}^2;$$

$$a_D^t \sin 30^\circ - a_D^n \cos 30^\circ = a_r - a_e^n, \quad a_r = 0,01 \text{ м/с}^2;$$

направление круговой стрелки  $\varepsilon_e$  ( $\curvearrowright$ ) соответствует вращению вектора  $\bar{a}_e^t$  (см. рис. 13) вокруг оси  $O(z_1)$ .

Для проверки полученных выше уравнений используем аналитическое описание геометрии механизма (см. рис. 13); имеем

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{S}{2R}, \quad \varphi|_{t=1\text{с}} = 60^\circ, \quad \dot{\varphi} = \omega_e = \frac{\dot{S}}{2R}, \quad \ddot{\varphi} = \varepsilon_e = \frac{\ddot{S}}{2R};$$

при  $t = 1 \text{ с}$   $\omega_e = 0,52 \text{ рад/с}$ ,  $\varepsilon_e = 0,52 \text{ рад/с}^2$ . Для точки  $D$

$$V_{ry} = \dot{S} \cos \varphi, \quad V_{ry}|_{t=1\text{с}} = \frac{\dot{S}}{2}|_{t=1\text{с}} = 0,105 \text{ м/с};$$

$$a_r^t = \dot{V}_{ry} = \ddot{S} \cos \varphi - \dot{S} \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad a_r^t|_{t=1\text{с}} = 0,01 \text{ м/с}^2.$$

Здесь  $\vec{V}_r = \vec{V}_{ry}$ ,  $\bar{a}_r = \bar{a}_r^t = \bar{a}_{ry}$ .

2. Определим абсолютные скорость и ускорение точки  $M$  (см. рис. 12). Относительное движение точки  $M$  – прямолинейное по трубке 2, переносное движение – вращение трубки 2. Для точки  $M$  при  $t = 1 \text{ с}$   $M_0M|_{t=1\text{с}} = 0,2 \text{ м}$ , расстояние  $OM = OA - M_0M = 0,6 \text{ м}$ .

В относительном движении (рис. 16) обозначим  $(V_r)_{S_r} = V_r$ ,  
 $(a_r)_{S_r} = a_r^\tau$ , тогда

$$V_r = \dot{S}_r,$$

где

$$S_r = M_0 M = 0,2t^2, \quad V_r = 0,4t, \quad V_r|_{t=1\text{с}} = 0,4 \text{ м/с};$$

$$a_r^\tau = \ddot{S}_r = 0,4 \text{ м/с}^2 = \text{const} \quad (\bar{a}_e^n = 0), \quad \bar{a}_r = \bar{a}_r^\tau.$$

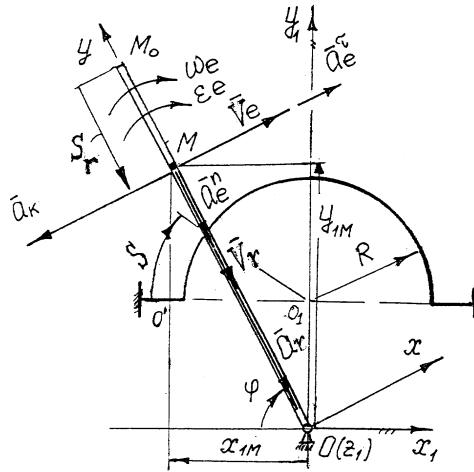


Рис. 16

В переносном движении известны  $\omega_e = 0,52 \text{ рад/с}$ ,  $\varepsilon_e = 0,52 \text{ рад/с}^2$ . Тогда  $V_e = \omega_e \cdot OM$ ,  $V_e = 0,52 \cdot 0,6 = 0,312 \text{ м/с}$ ,  
 $\bar{a}_e = \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau$ ,  $a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM$ ,  $a_e^n = 0,52^2 \cdot 0,6 = 0,162 \text{ м/с}^2$ ,  $a_e^\tau = 0,52 \cdot 0,6 = 0,312 \text{ м/с}^2$ .

Абсолютная скорость точки  $M$  равна  $\bar{V}_M = \bar{V}_r + \bar{V}_e$ . Так как в нашем случае  $\bar{V}_e \perp \bar{V}_r$ , то  $V_M = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$ ,  $V_M = \sqrt{0,312^2 + 0,4^2} = 0,51 \text{ м/с}^2$  (рис. 17).

Абсолютное ускорение точки  $M$  запишем в виде  $\bar{a}_M = \bar{a}_r + \bar{a}_e^n + \bar{a}_e^\tau + \bar{a}_K$ , где  $a_K = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin 90^\circ$ ,  $a_K = 0,416 \text{ м/с}^2$ .

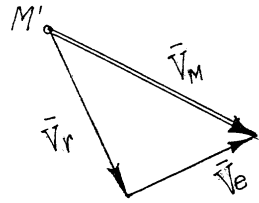


Рис. 17

Вектор абсолютного ускорения построен на рис. 18. Получим его проекции на подвижные оси  $x$  и  $y$  и определим величину:

$$a_{Mx} = a_e^r - a_K, \quad a_{Mx} = -0,038 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{My} = -a_e^n - a_r, \quad a_{My} = -0,562 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2}, \quad a_M = 0,57 \text{ м/с}^2.$$

Проверим расчеты для точки  $M$ . Воспользуемся аналитическими выражениями для координат точки  $M$  в неподвижной системе отсчета  $Ox_1y_1(z_1)$  (см. рис. 16):

$$x_{1M} = -OM \cos \varphi = -(l - S_r) \cos \varphi,$$

где  $l = OA$ ,

$$y_{1M} = OM \sin \varphi = (l - S_r) \sin \varphi.$$

Абсолютную скорость точки  $M$   $V_M = \sqrt{\dot{x}_{1M}^2 + \dot{y}_{1M}^2}$  вычисляем с помощью выражений

$$\dot{x}_{1M} = (l - S_r)\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{S}_r \cos \varphi;$$

$$\dot{y}_{1M} = (l - S_r)\dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{S}_r \sin \varphi,$$

тогда  $V_M = \sqrt{(l - S_r)^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{S}_r^2}$ . Учитывая, что  $\dot{\varphi} = \frac{\dot{S}}{2R}$ , получаем

$$V_M = \sqrt{\left(\frac{l - S_r}{2R}\right)^2 \dot{S}^2 + \dot{S}_r^2}, \quad V_M|_{t=1 \text{ с}} = 0,51 \text{ м/с}.$$

Абсолютное ускорение точки  $M$   $a_M = \sqrt{\dot{x}_{1M}^2 + \dot{y}_{1M}^2}$ , опуская подробные выкладки, записываем в виде

$$a_M = \sqrt{\frac{1}{4R^2} [(l - S_r)\ddot{S} - 2\dot{S}_r\dot{S}]^2 + \left[\frac{l - S_r}{4R^2} \dot{S}^2 + \ddot{S}_r\right]^2},$$

$$a_M|_{t=1 \text{ с}} = 0,57 \text{ м/с}^2.$$

**Пример 4.** В кривошипно-ползунном механизме (рис. 19) кривошип 1 вращается вокруг оси  $O(z_1)$  по закону  $\varphi = \frac{\pi}{4}t^2$  рад.

По шатуну 2 движется шайба  $M$  по закону  $M_0M = 0,1t^2$  м. Для положения механизма при  $t = 1$  с (рис. 20): 1) найти, связав подвижную систему отсчета  $Ox_1y_1$  с кривошипом 1, относительные скорость и ускорение точки  $B$  шатуна 2 ( $B_{(2)}$ ); 2) определить, принимая шайбу  $M$  за точку, ее абсолютные скорость и ускорение. Принять  $OA = AB = l = 0,4$  м,  $[t] = \text{с}$ .

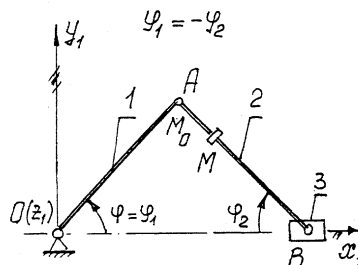


Рис. 19

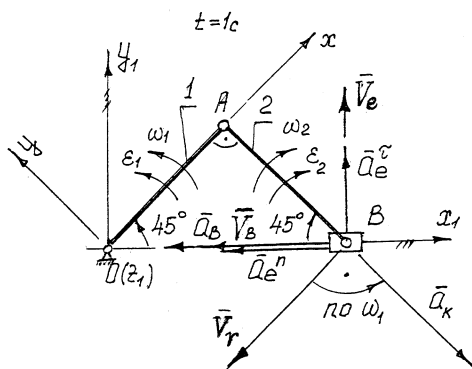


Рис. 20

**Решение.** 1. Найдем для кривошипа 1 угловые скорость и ускорение при  $t = 1$  с, когда  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  рад (см. рис. 20):

$$\omega_1 = \dot{\varphi} = \frac{\pi}{2}t > 0, \quad \omega_1|_{t=1\text{с}} = 1,57 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1 = \ddot{\varphi} = 1,57 \text{ рад/с}^2,$$

где  $\omega_1 > 0$ ,  $\varepsilon_1 > 0$ , поэтому круговые стрелки ( $\oplus$ ) для  $\omega_1$  и  $\varepsilon_1$  (см. рис. 20) направлены в сторону увеличения угла  $\varphi$ .

При  $OA = AB$   $\angle AOB = \angle ABO$ , т. е. если  $\varphi_1 = -\varphi_2$ , то  $\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_2$  или  $|\omega_1| = |\omega_2| = 1,57$  рад/с и  $\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_2$  или  $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 1,57$  рад/с<sup>2</sup>. Таким образом, и для шатуна при  $t = 1$  с известны  $\omega_2$  и  $\varepsilon_2$ .

Определим абсолютные скорость и ускорение точки  $B$  шатуна 2, записав ее координаты в неподвижной системе отсчета  $Ox_1y_1(z_1)$ :

$$x_{1B} = 2l \cos \varphi, \quad y_{1B} = 0; \quad V_{Bx_1} = \dot{x}_{1B} = -2l \sin \varphi \cdot \dot{\varphi};$$

$$V_{Bx_1} \Big|_{t=1\text{с}} = -0,89 \text{ м/с}, \quad |\bar{V}_B| = |V_{Bx_1}| = 0,89 \text{ м/с};$$

$$|\bar{a}_B| = |a_{Bx_1}|, \quad a_{Bx_1} = \ddot{x}_{1B} = -2l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - 2l\ddot{\varphi} \sin \varphi;$$

$$a_{Bx_1} \Big|_{t=1\text{с}} = -2 \cdot 0,4 \left( 1,57^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 1,57 \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2,28 \text{ м/с}^2, \quad |\bar{a}_B| = 2,28 \text{ м/с}^2.$$

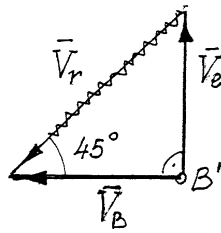


Рис. 21

Найдем относительные (по отношению к кривошипу 1) скорость и ускорение точки  $B$  шатуна 2 ( $B_{(2)}$ ), рассматривая ее движение как сложное.

При этом переносным движением для точки  $B_{(2)}$  будет вращение вокруг оси  $O(z_1)$  кривошипа 1 с угловыми скоростью и ускорением

$$\omega_e = \omega_1 = 1,57 \text{ рад/с}, \quad \varepsilon_e = \varepsilon_1 = 1,57 \text{ рад/с}^2.$$

Тогда  $\underline{\underline{V}}_B = \underline{\underline{V}}_{(B_2)} = \underline{\underline{V}}_r + \underline{\underline{V}}_e$ , где  $V_e = \omega_1 \cdot OB = \omega_1 \cdot 2l \cos \varphi$ ,  $V_e \Big|_{t=1\text{с}} = 0,89$  м/с. Поскольку  $\bar{V}_e \perp \bar{V}_B$ , то  $V_r = \sqrt{V_e^2 + V_B^2} = 1,25$  м/с (рис. 21). Теорема Кориолиса имеет вид  $\underline{\underline{a}}_B = \underline{\underline{a}}_r + \underline{\underline{a}}_e^n + \underline{\underline{a}}_e^\tau + \underline{\underline{a}}_K$ , где переносное и кориолисово ускорения равны

$$a_e^n = \omega_1^2 \cdot OB, \quad a_e^n = 1,57^2 \cdot 0,4 \cdot \sqrt{2} = 1,39 \text{ м/с}^2;$$

$$a_e^\tau = \varepsilon_1 \cdot OB, \quad a_e^\tau = 1,57 \cdot 0,4 \cdot \sqrt{2} = 0,89 \text{ м/с}^2;$$

$$\bar{a}_K = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r), \quad a_K = 2\omega_1 V_r \sin 90^\circ, \quad a_K = 2 \cdot 1,57 \cdot 1,25 = 3,94 \text{ м/с}^2.$$

Получив уравнения проекций абсолютного ускорения  $\bar{a}_B$  на подвижные оси  $x$  и  $y$  (рис. 22), определим  $a_{rx}$  и  $a_{ry}$ :

$$-a_B \cos 45^\circ = a_{rx} - a_e^n \cos 45^\circ + a_e^\tau \cos 45^\circ, \quad a_{rx} = -1,25 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B \cos 45^\circ = a_{ry} + a_e^n \cos 45^\circ + a_e^\tau \cos 45^\circ - a_K, \quad a_{ry} = 3,94 \text{ м/с}^2;$$

$$a_r = \sqrt{a_{rx}^2 + a_{ry}^2} = \sqrt{1,25^2 + 3,94^2} = 4,12 \text{ м/с}^2.$$

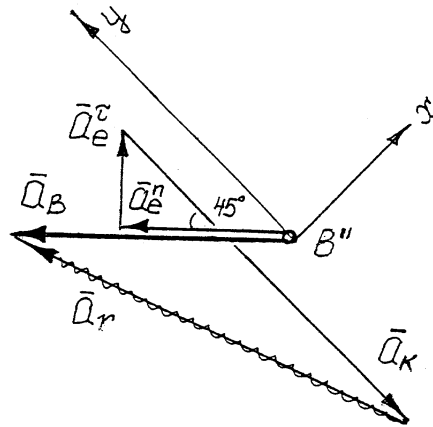


Рис. 22

2. Проверим результаты п. 1. Получим относительные скорость и ускорение точки  $B_{(2)}$ , записав ее координаты в подвижной системе отсчета (рис. 23):

$$x_B = OA + AB \cos 2\varphi = l(1 + \cos 2\varphi), \quad y_B = -AB \sin 2\varphi = -l \sin 2\varphi;$$

$$V_{rx} = \dot{x}_B = -2l\dot{\varphi} \sin 2\varphi, \quad V_{ry} = \dot{y}_B = -2l\dot{\varphi} \cos 2\varphi;$$

$$V_r = \sqrt{(V_{rx})^2 + (V_{ry})^2} = 2l\dot{\varphi}, \quad V_r|_{t=1c} = 2 \cdot 0,4 \cdot 1,57 = 1,25 \text{ м/с};$$

$$a_{rx} = \ddot{x}_B = -4l\dot{\varphi}^2 \cos 2\varphi - 2l\ddot{\varphi} \sin 2\varphi, \quad a_{rx}|_{t=1c} = -1,25 \text{ м/с}^2;$$

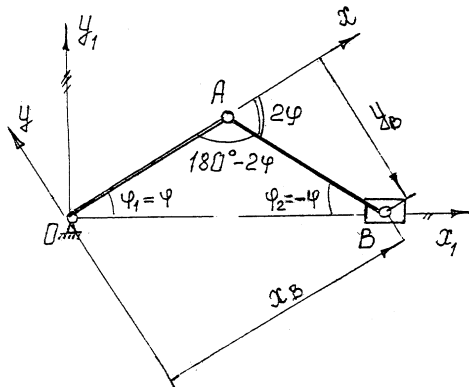


Рис. 23

$$a_{ry} = \ddot{y}_B = 4l\dot{\varphi}^2 \sin 2\varphi - 2l\ddot{\varphi} \cos 2\varphi, \quad a_{ry}|_{t=1\text{ с}} = 3,94 \text{ м/с}^2;$$

$$a_r = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = 2l\sqrt{4\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}, \quad a_r|_{t=1\text{ с}} = 4,12 \text{ м/с}^2.$$

3. Найдем абсолютные скорость и ускорение точки  $M$  (рис. 24). В ее относительном прямолинейном движении по шатуну 2 в заданном положении механизма при  $t = 1$  с  $M_0M|_{t=1\text{ с}} = 0,1$  м, относительная скорость  $(V_r)_{S_r} = \dot{S}_r$ , где  $S_r = M_0M(t) = 0,1t^2$ . Обозначим  $(V_r)_{S_r} = V_r$ , тогда  $V_r = 0,2t$ ,  $V_r|_{t=1\text{ с}} = 0,2$  м/с; относительное ускорение  $a_r^r = \ddot{S}_r = 0,2$  м/с<sup>2</sup>. Векторы  $\vec{V}_r$  и  $\vec{a}_r$  направлены вдоль шатуна 2 (см. рис. 24).

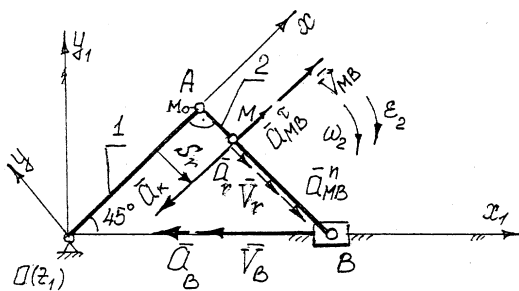


Рис. 24

В переносном движении (плоском движении шатуна 2)  $\omega_e = \omega_2 = \dot{\varphi}_2$ ,  $\omega_2|_{t=1\text{ с}} = 1,57 \text{ рад/с}$ ,  $\varepsilon_e = \varepsilon_2 = \ddot{\varphi}_2$ ,  $\varepsilon_2 = 1,57 \text{ рад/с}^2$  круговые стрелки  $\omega_2$  (↻) и  $\varepsilon_2$  (↻) направлены в сторону увеличения угла  $\varphi_2$  (см. рис. 19, 20).

Определяя переносные скорость и ускорение точки  $M$ , примем за полюс точку  $B$ , скорость  $\underline{\underline{V}}_B$  и ускорение  $\underline{\underline{a}}_B$  которой уже известны:

$$\underline{\underline{V}}_M^{(e)} = \underline{\underline{V}}_B + \underline{\underline{V}}_{MB},$$

где

$$V_{MB} = \omega_2 \cdot MB, \quad MB = l - M_0M|_{t=1\text{ с}} = 0,3 \text{ м}, \quad V_{MB} = 0,47 \text{ м/с}.$$

Переносное ускорение точки  $M$  запишем как  $\underline{\underline{a}}_M^{(e)} = \underline{\underline{a}}_B + \underline{\underline{a}}_{MB}^n + \underline{\underline{a}}_{MB}^\tau$ , при этом

$$a_{MB}^n = \omega_2^2 \cdot MB = 1,57^2 \cdot 0,3 = 0,74 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{MB}^\tau = \varepsilon_2 \cdot MB = 1,57 \cdot 0,3 = 0,47 \text{ м/с}^2.$$

Абсолютную скорость точки  $M$  получим в виде  $\underline{\underline{V}}_M = \underline{\underline{V}}_r + \underline{\underline{V}}_B + \underline{\underline{V}}_{MB}$  и спроецируем на оси  $x_1$  и  $y_1$  (рис. 25):

$$V_{Mx_1} = V_r \cos 45^\circ + V_{MB} \cos 45^\circ - V_B,$$

$$V_{Mx_1} = -0,42 \text{ м/с};$$

$$V_{My_1} = -V_r \cos 45^\circ + V_{MB} \cos 45^\circ,$$

$$V_{My_1} = -0,19 \text{ м/с}, \quad V_M = \sqrt{V_{Mx_1}^2 + V_{My_1}^2} = 0,46 \text{ м/с}.$$

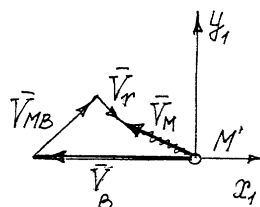


Рис. 25

Абсолютное ускорение точки  $M$  запишем так:  $\underline{\underline{a}}_M = \underline{\underline{a}}_r + \underline{\underline{a}}_e + \underline{\underline{a}}_K$ , где  $\underline{\underline{a}}_K = 2(\underline{\underline{\omega}}_e \times \underline{\underline{V}}_r)$ ,  $a_K = 2\omega_2 \cdot V_r \cdot \sin 90^\circ = 2 \cdot 1,57 \cdot 0,2 = 0,628 \text{ м/с}^2$ . Получим проекции абсолютного ускорения на оси  $x$  и  $y$  (рис. 26):



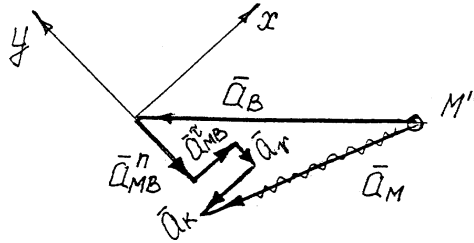


Рис. 26

$$a_{Mx} = -a_B \cos 45^\circ + a_{MB}^t - a_K,$$

$$a_{Mx} = -2,28 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0,47 - 0,63 = -1,77 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{My} = -a_r + a_B \cos 45^\circ - a_{MB}^n,$$

$$a_{My} = -0,2 + 2,28 \frac{\sqrt{2}}{2} - 0,74 = 0,67 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2} = 1,89 \text{ м/с}^2.$$

4. Абсолютные скорость и ускорение точки  $M$  можно проверить аналитическим путем, записав выражения для ее координат в неподвижной системе отсчета, т. е.

$$x_{1M} = (OA + M_0M) \cos \varphi = (l + S_r) \cos \varphi;$$

$$y_{1M} = (AB - M_0M) \sin \varphi = (l - S_r) \sin \varphi.$$

Тогда

$$V_M = \sqrt{\dot{x}_{1M}^2 + \dot{y}_{1M}^2},$$

где

$$\dot{x}_{1M} = -(l + S_r) \cdot \dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{S}_r \cos \varphi, \quad \dot{x}_{1M} \Big|_{t=1 \text{ с}} = -0,42 \text{ м/с};$$

$$\dot{y}_{1M} = (l - S_r) \cdot \dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{S}_r \sin \varphi, \quad \dot{y}_{1M} \Big|_{t=1 \text{ с}} = 0,19 \text{ м/с},$$

поэтому  $V_M = \sqrt{\dot{S}_r^2 - 2\dot{S}_r \dot{\varphi} l \sin 2\varphi + \dot{\varphi}^2 (l^2 + S_r^2 - 2lS_r \cos 2\varphi)}$ .

Для проекций ускорения  $\bar{a}_M$  имеем:

$$a_{Mx_1} = \ddot{x}_{1M} = \left[ \ddot{S}_r - \dot{\varphi}^2 (l + S_r) \right] \cos \varphi - \left[ \ddot{\varphi} (l + S_r) + 2\dot{\varphi} \dot{S}_r \right] \sin \varphi;$$

$$a_{My_1} = \ddot{y}_{1M} = - \left[ \ddot{S}_r + \dot{\varphi}^2 (l - S_r) \right] \sin \varphi + \left[ \ddot{\varphi} (l - S_r) - 2\dot{S}_r \dot{\varphi} \right] \cos \varphi;$$

$$a_{Mx_1} \Big|_{t=1 \text{ с}} = -1,73 \text{ м/с}^2, \quad a_{My_1} \Big|_{t=1 \text{ с}} = -0,775 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M \Big|_{t=1 \text{ с}} = 1,89 \text{ м/с}^2.$$

### 3. УСЛОВИЯ ВАРИАНТОВ КУРСОВОГО ЗАДАНИЯ

**Вариант 1.** В кулиском механизме толкатель  $l$  движется поступательно в направляющих  $N$  и  $N_1$  по закону  $S_B = 0,04(6t - t^2)$  и с помощью шарнирно скрепленного с ним ползуна 3 приводит во вращательное движение вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, трубку 2. В трубке 2 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1t^2$ . Принять  $\alpha = 45^\circ$ ,  $AO = 0,5$  м,  $l = 0,2$  м.

**Вариант 2.** В механизме обращенного эллиптического циркуля стержень 2, изогнутый под прямым углом, вращается вокруг оси  $O_1(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi = t^2 - 3t$ . Кривошип 1 ( $DO = OB$ ), шарнирно связанный со стержнем 2 ползунами 3 и 4, вращается вокруг оси  $O(z'_1)$ , параллельной оси  $O_1(z_1)$ . На кривошипе 1 закреплена трубка 5, вдоль которой движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,2t^2$ . Принять  $BD = 0,8$  м,  $\alpha = 45^\circ$ .

**Вариант 3.** Кривошип 1, вращаясь вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi = \frac{\pi}{4}(3t - 2t^2)$  с помощью шарнирно связанного с ним ползуна 3 сообщает движение стержню 2. Со стержнем 2 жестко скреплена горизонтальная рейка 4, приводящая во вращение вокруг оси  $O_1(z'_1)$ , параллельной оси  $O(z_1)$ , шестерню 5 с закрепленной на ней трубкой 6. По трубке

движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1\pi t^2$ . Принять  $OD = 0,2$  м,  $r = 0,1$  м.

**Вариант 4.** По неподвижному проволочному обручу  $1$  движется кольцо  $D$  по закону  $S_D = 0,1\pi(2t^2 - t^3)$ . Трубка  $2$ , проходящая через кольцо  $D$ , вращается вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости обруча. По трубке  $2$  движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1(5t - 3t^2)$ . Принять  $OO_1 = 0,2\sqrt{3}$  м,  $R = 0,2$  м,  $OA = 0,7$  м.

**Вариант 5.** Толкатель  $1$  движется в направляющих  $N$  и  $N_1$  по закону  $S_A = 0,2\sqrt{3}(3t - t^2)$  и приводит в движение клин  $3$ , на котором в точке  $D$  закреплена ось ползуна  $4$ . Ползун  $4$  скользит по стержню  $2$  и приводит во вращение вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, стержень  $2$  и приваренную к нему под прямым углом трубку  $5$ , внутри которой движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,4t - 0,1t^2$ . Принять  $OD = 0,6$  м,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .

**Вариант 6.** Толкатель  $1$  движется в направляющих  $N$  и  $N_1$  по закону  $S_A = 0,09t^2$  и приводит во вращение вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной рисунку, кулачок  $2$ , на котором закреплена трубка  $3$ . Внутри трубки  $3$  движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1\pi t^2$ . Принять  $r = 0,3$  м,  $h = \frac{\sqrt{3}}{2}r$ .

**Вариант 7.** К валу  $1$  приварен под прямым углом стержень  $2$  ( $OE$ ). На стержень  $2$  и неподвижный обруч  $3$  надето кольцо  $D$ . Вал  $1$  вместе со стержнем  $2$  и жестко связанной с валом трубкой  $4$  вращаются вокруг оси  $O(z_1)$  с постоянной угловой скоростью  $\omega = 1$  рад/с. В трубке  $4$  движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,05\pi t(1 + t)$ . Принять  $\alpha = 90^\circ$ ,  $OO_1 = 0,2$  м,  $R = 0,4$  м,  $r = 0,3$  м.

**Вариант 8.** Валик  $1$ , жестко связанный с двумя стержнями  $2$ , вращается вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi = 3t - t^2$ . Стержни  $2$  ползунами  $3$  и  $4$  связаны с кривошипом  $5$ , выполненным в виде трубки, внутри которой движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1t^2$ . Кривошип  $5$  вращается во-

круг оси  $O_1(z'_1)$ , параллельной оси  $O(z_1)$ . Принять  $2\alpha = 90^\circ$ ,  $OO_1 = 0,4$  м.

**Вариант 9.** Диск 1 катится по горизонтальной направляющей без скольжения по закону  $\varphi = 2t^2$ . На ободе диска в точке  $D$  шарнирно закреплен ползун 3, связанный со стержнем 2, вращающимся вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. С диском жестко связана трубка 4, внутри которой движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1\pi t$ . Принять  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $R = 0,3$  м,  $C_0$  – положение центра катка при  $t = 0$  с.

**Вариант 10.** Ползун  $E$ , двигаясь в горизонтальных направляющих с постоянной скоростью  $\vec{V}_E$ , приводит в движение шарнирно связанные между собой стержни 1 и 3. Стержень-толкатель 3, двигаясь в направляющих  $N$  и  $N_1$ , приводит во вращательное движение вокруг оси  $O_1(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, кулачок 2. Кулачок 2 представляет собой диск с эксцентриситетом  $e$ . В прямолинейном пазе кулачка 2 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,4t - 0,1t^2$ . Принять  $\alpha = 30^\circ$ ,  $V_E = 0,2$  м/с,  $r = 0,2$  м,  $e = 0,5r$ ,  $CE = 2r$ .

**Вариант 11.** По неподвижной проволочной полуокружности 1 движется кольцо  $D$  по закону  $S_D = 0,1t^2$ . Кольцо  $D$ , надетое и на трубку 2, изогнутую в виде окружности, приводит ее во вращательное движение вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. Внутри трубки 2 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \frac{\pi R}{2\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{4} t$ . Принять  $R = 0,4$  м.

**Вариант 12.** Толкатель 1, двигаясь в направляющих  $N$  и  $N_1$  по закону  $S_A = 0,2t^2$ , с помощью шарнирно связанного с ним ползуна 4 приводит во вращательное движение вокруг осей  $O_1(z_1)$  и  $O_2(z'_1)$ , перпендикулярных плоскости рисунка, стержни 2 и 3. Со стержнями связана трубка 5, внутри которой движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1\pi t^2$ . Принять  $\alpha = 30^\circ$ ,  $H = 0,1$  м,  $O_1B = O_2C = 0,5$  м,  $R = 0,1$  м.

**Вариант 13.** Диск 1 катится по горизонтальной направляющей без скольжения и приводит во вращение вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, стержень 2, скользящий по диску точкой (выступом)  $D_{(2)}$ . По прямолинейному пазу 3 на диске 1 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,3t^2$ . Принять при  $t = 1$  с  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $V_C = 0,3$  м/с,  $a_C = 0,6$  м/с<sup>2</sup>,  $OD = 0,7$  м,  $R = 0,3$  м.

**Вариант 14.** Валик 1 с приваренными к нему стержнем и трубкой 2 вращается вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi(t) = t^2$ . По трубке 2 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,3t^2$ . Кольцо  $D$ , надетое на трубку 2, движется по неподвижной проволочной полуокружности 3. Принять  $\alpha = \beta = 60^\circ$ ,  $CB = 0,15$  м,  $R = OC = 0,15$  м.

**Вариант 15.** Мальтийский механизм состоит из диска 1 с поводком  $AD$ , вращающегося вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi = 3t - t^2$ , и креста 2. Крест 2 вращается вокруг оси  $O_1(z'_1)$ , параллельной оси  $O(z_1)$ . По диску 1 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,5\pi t^2$ . Принять  $\alpha = 45^\circ$ ,  $O_1D = AD = r = 0,25$  м.

**Вариант 16.** Толкатель 1 вращается вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi = \frac{\pi}{4}t$  и приводит во вращение вокруг оси  $O_1(z'_1)$ , параллельной оси  $O(z_1)$ , кулачок 2. Толкатель касается кулачка 2 точкой  $D_{(1)}$ . По трубке 3, изогнутой по дуге окружности и жестко закрепленной на кулачке 2, движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \frac{\pi}{3}Rt^2$ . Принять  $O_1O_2 = 0,8$  м,  $r = 0,2$  м,  $R = 0,4$  м.

**Вариант 17.** Кулиса 2 вращается вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi = \frac{\pi}{4}t^2$ . Ползун 1, скользящий по кулисе 2, шарнирно связан с центром  $D$  колеса 3. Колесо 3

катится по горизонтальной плоскости без скольжения, по его ободу движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \frac{\pi}{4} R \cdot t^2$ . Принять  $R = 0,2$  м,  $H = 0,5$  м.

**Вариант 18.** В мальтийском механизме кривошип  $1$  вращается вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi = \frac{\pi}{3} t^2$  и приводит во вращение вокруг оси  $O_1(z'_1)$ , параллельной оси  $O(z_1)$ , крест  $2$ . По пазу  $3$ , расположенному на кресте  $2$ , движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,2\sqrt{2}t^2$ . Принять  $O_1D = 0,1$  м,  $OD = 0,4$  м,  $R = 0,2$  м.

**Вариант 19.** В плоском механизме ползун  $B$ , связанный шарнирно с линейкой  $1$ , имеет в данный момент времени скорость и ускорение  $\vec{V}_B$ ,  $\vec{a}_B$ . Двойным ползуном  $3, 4$  с осью  $D$  линейка  $1$  связана с кулисой  $2$ , ползун  $4$  движется по горизонтальной неподвижной направляющей. Кулиса  $2$  вращается вокруг неподвижной оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. На кулисе жестко закреплена трубка-кольцо  $5$ , внутри которой движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \frac{\pi}{2} rt^2$ . Принять при  $t = 1$  с  $V_B = 0,4$  м/с,  $a_B = 0,2$  м/с<sup>2</sup>,  $\alpha = \beta = 30^\circ$ ,  $BD = 0,4$  м,  $H = 0,2\sqrt{3}$  м,  $OE = r = 0,2$  м.

**Вариант 20.** Кулиса  $2$  и жестко связанная с ней трубка-кольцо  $1$  вращаются вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi = \frac{\pi}{4} t^2$ . По трубке  $1$  движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \pi r t^2$ . Вдоль кулисы  $2$  скользит ползун  $3$ , связанный шарниром  $D$  с ползуном  $4$ , который движется по горизонтальной направляющей  $5$ . Принять  $r = 0,1$  м,  $H = 0,4$  м,  $OC = 0,2$  м.

**Вариант 21.** Колесо  $1$  катится по горизонтальной направляющей по закону  $\varphi = \sqrt{3} \cdot t^2$  без скольжения. В центре колеса имеется выступ  $D$ , который, скользя вдоль вилки на верхнем конце кулисы  $2$ , приводит ее во вращение вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. К нижнему концу кулисы  $2$  под прямым углом приварена трубка  $3$ , вдоль которой движется точка  $M$  по закону

$M_0M = 0,2t^2$ . Принять  $R = 0,1$  м,  $H = 0,3$  м,  $OA = AB = 0,2$  м,  $D_0$  – положение выступа  $D$  при  $t = 0$  с.

**Вариант 22.** Кольцо  $D$ , надетое на неподвижный тонкий стержень  $1$ , движется вдоль него по закону  $S_D = 0,1(3t - t^2)$ . Криволинейная трубка  $2$ , изогнутая по дуге окружности и проходящая через кольцо  $D$ , вращается вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. По трубке  $2$  движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \frac{2}{3}\pi Rt^2$ . Принять  $\alpha = 60^\circ$ ,  $R = 0,2$  м.

**Вариант 23.** Колесо  $1$  катится по горизонтальной плоскости по закону  $\varphi = t^2$  без проскальзывания. На ободе колеса  $1$  в точке  $D$  шарнирно закреплен ползун  $3$ , который скользит по стержню  $2$ , вращающемуся вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. На конце стержня  $2$  приварен диск  $4$ , по которому вдоль криволинейного паза, выполненного по дуге окружности, движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \frac{\pi}{3}Rt^2$ . Принять  $\alpha = 30^\circ$ ,  $H = 0,3$  м,  $OA = 0,5$  м,  $R = 0,1$  м.

**Вариант 24.** В плоском механизме ползуны  $1$  и  $1'$  соединены шарниром  $D$ , ось которого движется по закону  $x_{1D} = 0,2e^{t-1}$ ,  $y_{1D} = 0,4e^{t-1}$ . Ползун  $1'$  скользит вдоль стержня  $2$ , приваренного к диску  $3$  и вращающегося вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. По пазу диска  $3$  движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1\sqrt{3} \cdot t^2$ . Принять  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $DO = 0,6$  м,  $r = 0,2$  м.

**Вариант 25.** В плоском механизме диск  $1$  катится без скольжения по горизонтальной плоскости. По пазу диска  $1$  движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \frac{\pi}{2}Rt^2$ . На диске  $1$  в точке  $D$  шарнирно закреплен ползун  $3$ , который скользит по стержню  $2$  и приводит его во вращательное движение вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. Принять при  $t = 1$  с  $V_C = 0,3$  м/с,  $a_C = 0,15$  м/с<sup>2</sup>,  $OD = H = 0,6$  м,  $R = 0,3$  м.

**Вариант 26.** В плоском механизме ползуны 1 и 3, шарнирно связанные линейкой 4, движутся вдоль взаимно перпендикулярных направляющих. Ползун 3', связанный с ползуном 3 шарниром  $D$ , скользит по трубке 2, вращающейся вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. В трубке 2 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1(3t - t^2)$ . Принять  $\alpha = \beta = 30^\circ$ ,  $BD = 0,3$  м, при  $t = 1$  с  $V_B = 0,3$  м/с,  $a_B = 0,2$  м/с<sup>2</sup>.

**Вариант 27.** В предельном кулисном механизме вращение с вала  $Oz'_1$  передается с помощью двуплечего рычага 1 на параллельный вал  $O_1z_1$ . Кулиса 2 выполнена в виде диска с двумя перпендикулярными пазами, по которым скользят ползуны 3 и 4, шарнирно связанные с рычагом 1 в точках  $D$  и  $C$ . Угловая скорость  $\omega$  рычага 1 постоянна. На валу  $O_1z_1$  закреплена пластина 5, по которой по дуге окружности радиуса  $r$  движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \frac{\pi}{3}rt^2$ . Принять  $R = 0,2$  м,  $OD = OC = \frac{R}{2}$ ,  $\omega = 1$  рад/с,  $\beta = 45^\circ$ ,  $r = 0,1$  м.

**Вариант 28.** Кулиса 2, вращаясь вокруг оси  $O_1z_1$  по закону  $\varphi = \frac{\pi}{6}t^2$ , с помощью ползуна 1, скользящего вдоль нее, приводит в движение рейку 3, находящуюся в зацеплении с шестерней 4. Шестерня 4 и пластинка 5 вращаются вокруг оси  $Oz'_1$ . По прямолинейному пазу на пластинке 5 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1t^2$ . Принять  $r = 0,1$  м,  $h = 0,14$  м,  $l = 0,1\sqrt{3}$  м.

**Вариант 29.** В плоском механизме ползуны 1 и 1' связаны шарниром  $D$ . Ползун 1 движется по криволинейной направляющей. Шарнир  $D$  движется по закону  $x_{1D} = 2 - t^2$ ,  $y_{1D} = t$ . Ползун 1' скользит по стержню 2, к которому под прямым углом приварена трубка 3. Стержень 2 с трубкой 3 вращаются вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. В трубке 3 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,5t^2$ .



**Вариант 30.** Вал 6 вращается вокруг оси  $O_1z_1$  по закону  $\varphi = 3t - t^2$ . На валу 6 находятся шестерня 4 и пластина 5 с закрепленной на ней трубкой, изогнутой по дуге окружности. В трубке движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1\pi t^2$ . Шестерня 4 приводит в движение рейку 3 с приваренным к ней горизонтальным стержнем. На концах этого стержня в точках  $D$  и  $E$  шарнирно закреплены два ползуна, которые скользят по стержням 1 и 2, вращающимся вокруг оси  $Oz'_1$ , параллельной оси  $O_1z_1$ . Принять  $\alpha = 30^\circ$ ,  $r = 0,1$  м,  $R = 0,4$  м,  $2l = 0,2$  м.

**Вариант 31.** В тангенсном механизме шестерня 1 находится в зацеплении с рейкой 3, на которой закреплен шарнирно в точке  $D$  ползун 4, скользящий по кулисе 2. На валу  $O_1z_1$  шестерни 1 жестко закреплена трубка 5, изогнутая по параболе  $z_1 = y^2$ ; в трубке 5 движется точка  $M$ , координата  $z_1$  которой изменяется по закону  $z_1 = t^2$ . Шестерня 1 и трубка 5 вращаются по закону  $\varphi = 5t - t^2$ . Кулиса 2 вращается вокруг оси  $O(z'_1)$ , перпендикулярной рисунку, ее начальное положение горизонтальное. Принять  $r = 0,1$  м,  $l = 0,3$  м.

**Вариант 32.** В кулисном механизме толкатель 1 движется по закону  $S = 0,1 \cdot t$  и приводит в движение кулису 2 со скользящими вдоль нее ползунами 3 и 4. Кулиса 2 и кривошип 5 вращаются вокруг осей  $O_1(z_1)$  и  $O(z'_1)$ , перпендикулярных плоскости рисунка,  $OO_1 = 0,1\sqrt{2}$  м. По кривошипу 5 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1t^2$ . Принять  $O_1B = 0,4$  м,  $\varphi = \beta = 45^\circ$ .

**Вариант 33.** В плоском механизме кривошип 1 вращается вокруг оси  $O(z'_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi = \frac{\pi}{3}t^2$ . Вдоль шатуна 2 скользит ползун 3, шарнирно связанный со стержнем 4, вращающимся вокруг оси  $O_1(z_1)$ , параллельной оси  $O(z'_1)$ . По стержню 4 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1t^2$ . Принять  $\alpha = 30^\circ$ ,  $AD = DB$ ,  $OA = AB = 0,4$  м.

**Вариант 34.** В плоском механизме ползуны  $I$  и  $I'$ , шарнирно связанные линейкой  $4$ , движутся по взаимно перпендикулярным направляющим. По линейке  $4$  движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,2t^2$ . В точке  $D$  к линейке  $4$  шарнирно прикреплена муфта  $3$ , через которую проходит стержень  $2$ , вращающийся вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка. Принять  $\alpha = 30^\circ$ ,  $V_A = 0,6$  м/с,  $a_A = 0,3$  м/с<sup>2</sup>,  $AB = 0,6$  м,  $AD = DB$ ,  $l = 0,2$  м.

**Вариант 35.** В зубчатой передаче находятся в зацеплении шестерни  $1$  и  $2$ . Шестерня  $1$  вращается вокруг оси  $O_1(z_1)$  по закону  $\varphi = 4t - t^2$ . На шестерне  $2$  по пазу  $3$ , выполненному в виде дуги окружности, движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \frac{2}{3}\pi r t^2$ . Принять  $R = 2r = 0,2$  м.

**Вариант 36.** В планетарном механизме кривошип  $1$  вращается вокруг оси  $O_1(z_1)$  по закону  $\varphi = t^2$  и приводит в движение шестерню  $2$ , которая катится по неподвижной шестерне  $3$ . По пазу  $4$  на шестерне  $2$  движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1\sqrt{2}t^2$ . Принять  $R = 2r = 0,2$  м.

**Вариант 37.** В механизме шестерня  $1$  вращается вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi = 3t - t^2$  и приводит в движение толкатель  $2$ , который острием  $D$  упирается в клин  $3$ , скользящий вдоль вертикальной опоры. На шестерне  $1$  по пазу  $4$ , выполненному в виде дуги окружности, движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \frac{2}{3}\pi r t^2$ . Принять  $r = 0,1$  м,  $l = 0,4$  м.

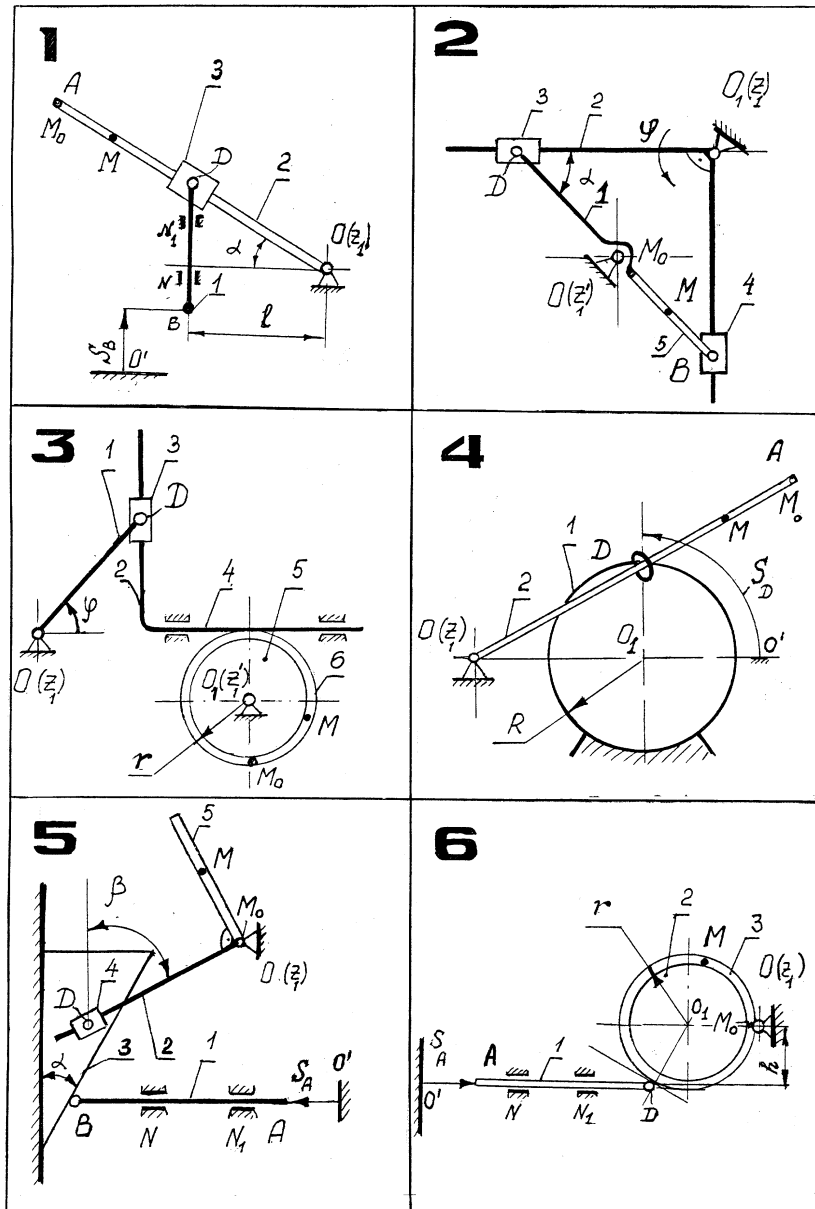
**Вариант 38.** В кривошипно-ползунном механизме кривошип  $1$  вращается вокруг оси  $O(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону  $\varphi = \frac{\pi}{3}t^2$ . На шатуне  $2$  закреплена трубка, вдоль которой движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1t^2$ . Принять  $OA = 0,1$  м,  $AD = 0,4$  м,  $AM_0 = M_0D$ .

**Вариант 39.** В механизме кривошип  $1$  вращается вокруг оси  $O_1(z_1)$ , перпендикулярной плоскости рисунка, по закону

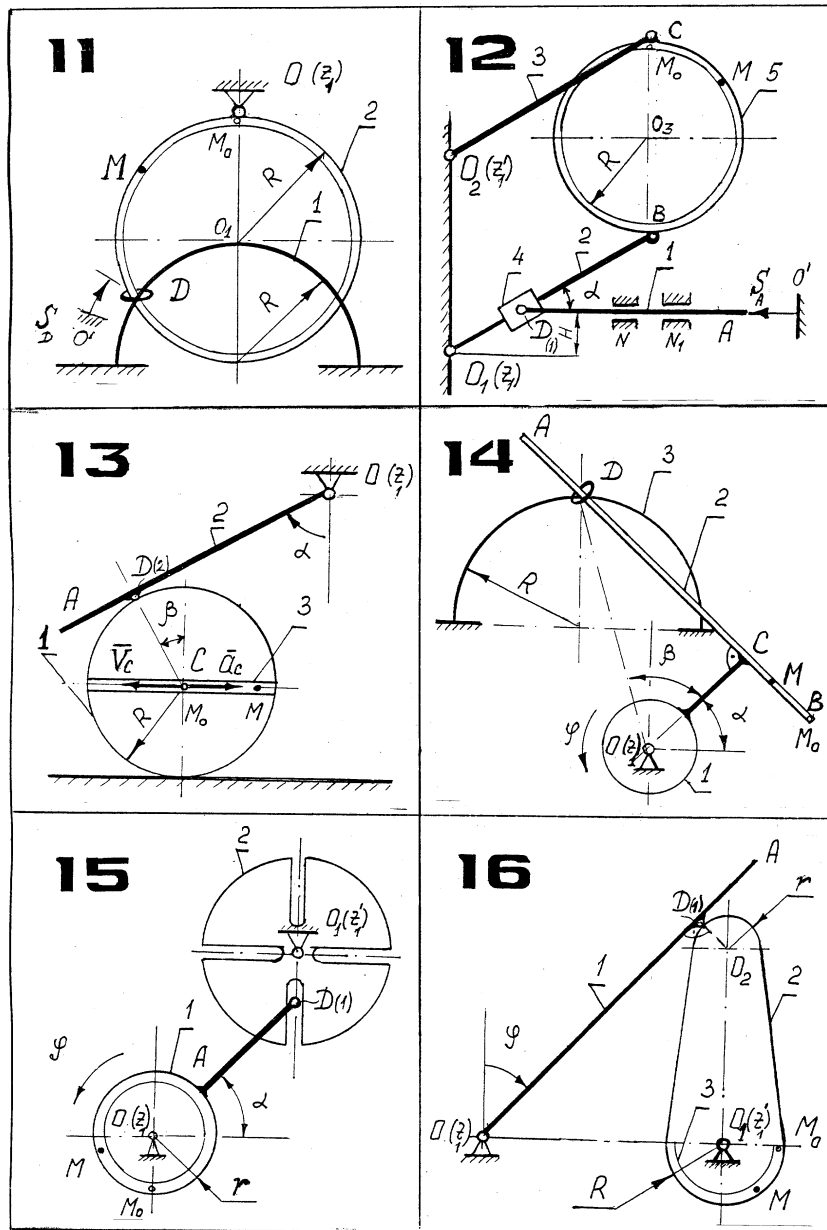
$\varphi = \frac{\pi}{2}t^2$ , а кривошип 2 – вокруг оси  $O(z_1)$ , параллельной оси  $O_1(z_1)$ . Кривошипы 1 и 2 шарнирно связаны с трубкой 3, по которой движется точка  $M$  по закону  $M_0M = 0,1(3t - t^2)$ . Принять  $OA = 0,2$  м,  $OO_1 = OD = 0,4$  м.

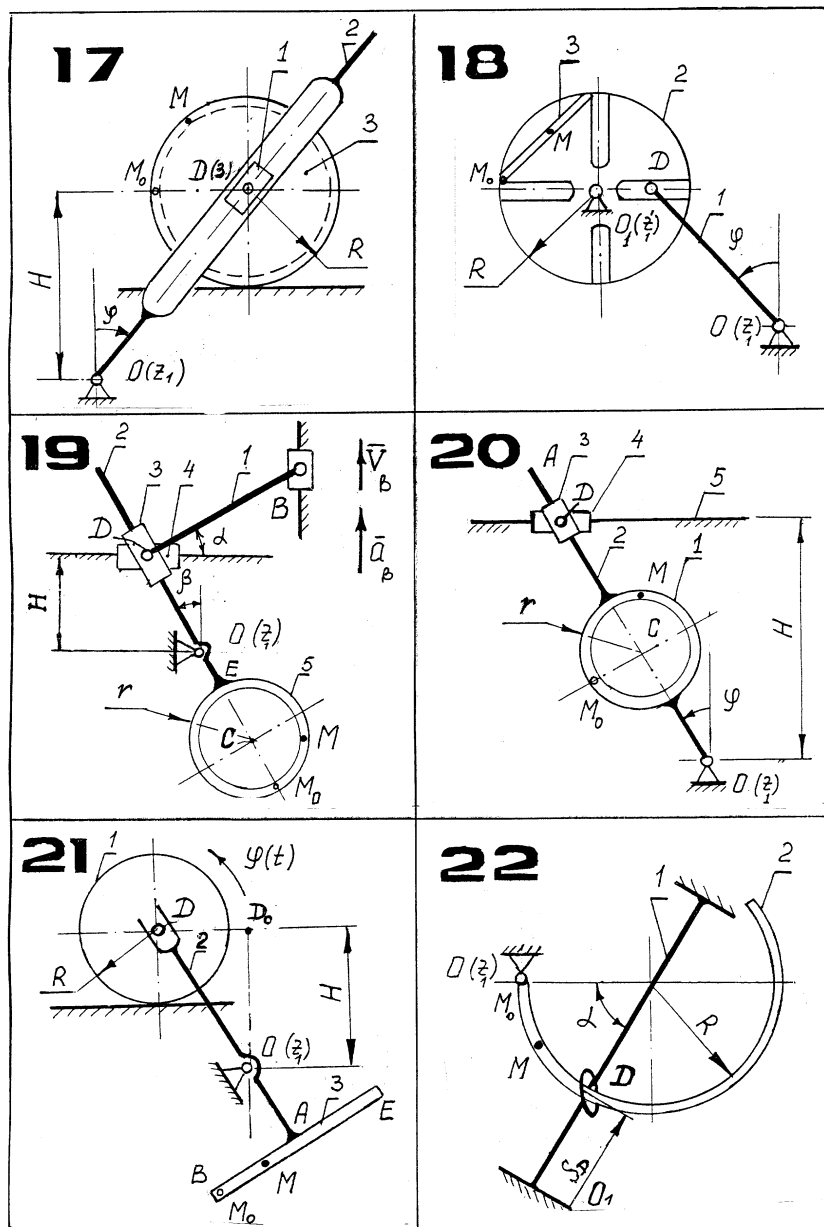
**Вариант 40.** Колесо 1 катится по горизонтальной направляющей по закону  $\varphi = 4t - t^2$  без скольжения. По ободу колеса 1 движется точка  $M$  по закону  $M_0M = \frac{\pi R}{6}t^2$ . Стержень 2, шарнирно связанный с центром колеса  $C$ , сообщает движение ползуну 3 по вертикальной направляющей. Принять  $R = 0,2$  м,  $CD = 0,6$  м.

#### 4. СХЕМЫ К ВАРИАНТАМ КУРСОВОГО ЗАДАНИЯ

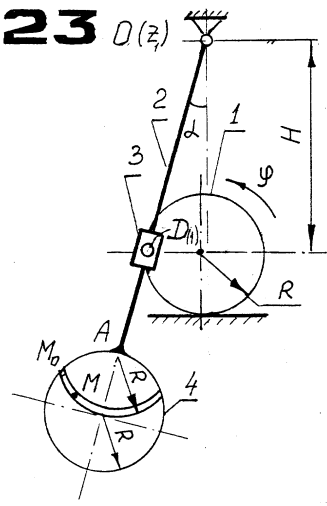




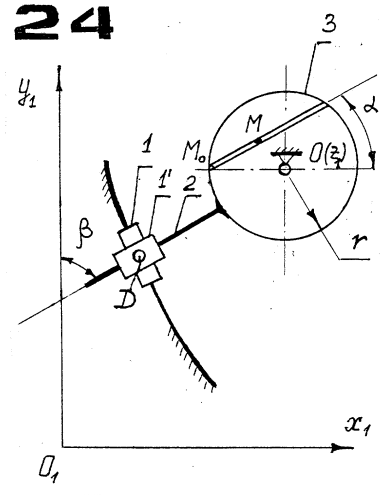




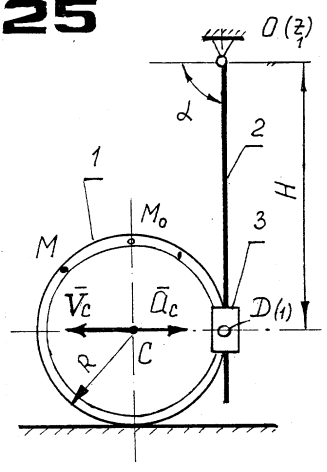
**23**



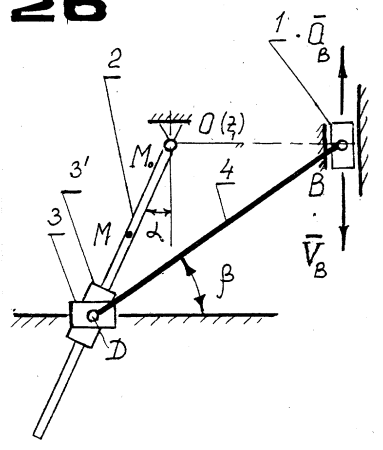
**24**



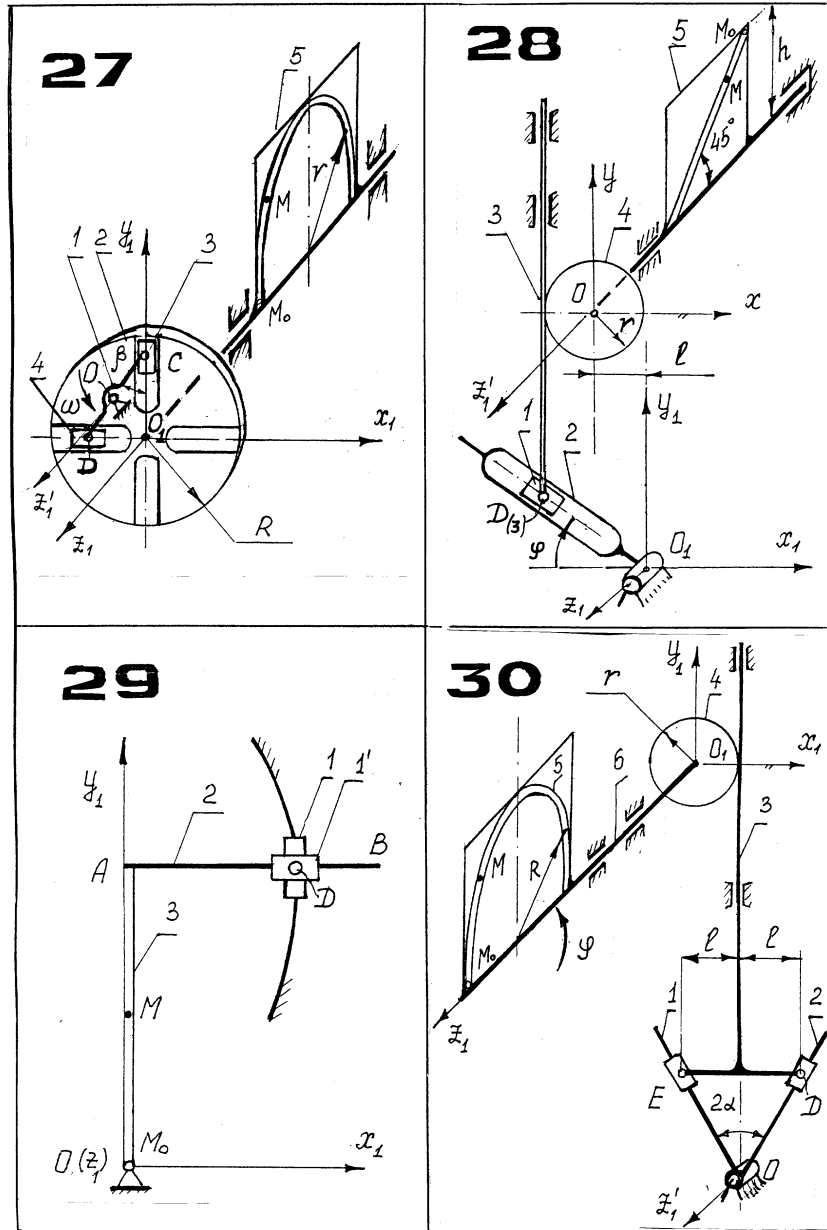
**25**

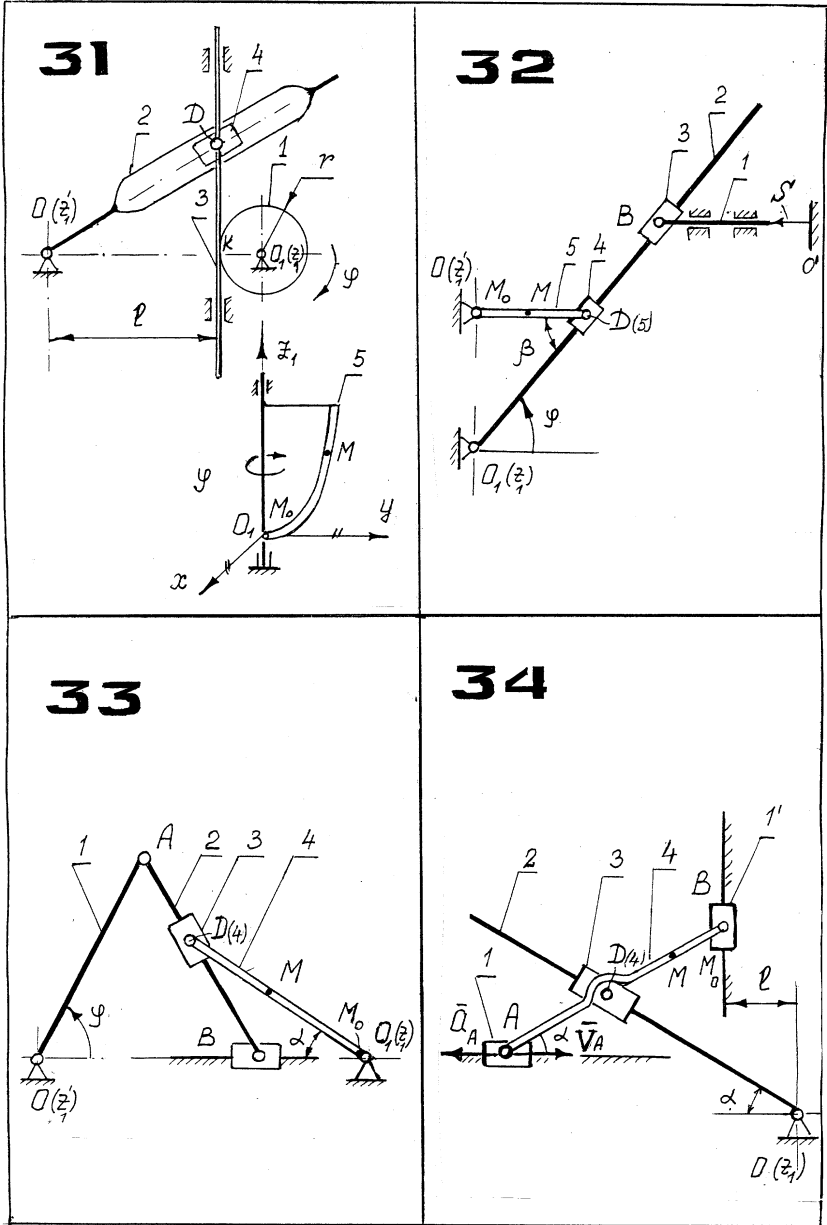


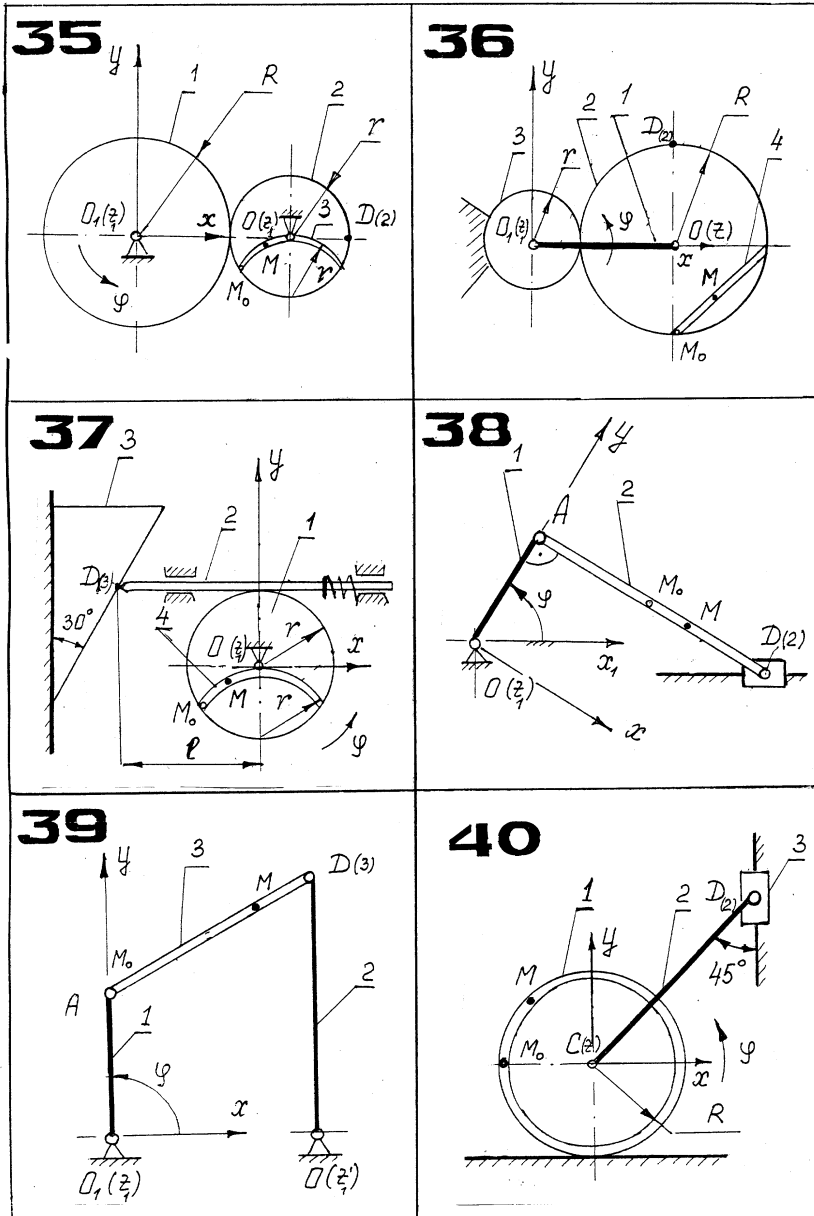
**26**











## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
1. Контрольные вопросы .....	4
2. Примеры решения типовых вариантов курсового задания.....	5
3. Условия вариантов курсового задания .....	33
4. Схемы к вариантам курсового задания.....	43

*Методическое издание*

**Владимир Валентинович Дубинин  
Галина Михайловна Тушева  
Галина Ивановна Гатауллина  
Александр Викторович Ремизов**

**Кинематика сложного движения точки**

Редактор *О.М. Королева*  
Корректор *Г.С. Беляева*  
Компьютерная верстка *О.В. Беляевой*

Подписано в печать 28.05.2007. Формат 60×84/16. Бумага офсетная  
Печ. л. 3,25. Усл. печ. л. 3,03. Уч.-изд. л. 2,85. Тираж 1000 экз.  
Изд. № 42. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана  
105005, Москва, 2-я Бауманская, 5