

СТАТИКА

1. Основные понятия и определения статики

Статика - это раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил.

Под равновесием тела в статике понимается состояние его покоя по отношению к другим телам, которые принимаются за неподвижные.

Материальным телом называется некоторое количество вещества, которое заполняет какой-нибудь объем в пространстве. Возможны случаи, когда тело в тех или иных направлениях имеет весьма малые размеры по сравнению с размерами в других направлениях.

Материальной точкой называется простейшая модель материального тела любой формы, размеры которого достаточно малы, и которое можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Механическим воздействием одного тела на другое называется такое воздействие, при котором пренебрегают изменениями в химической структуре тела и его физическом состоянии. Если тело испытывает механическое воздействие со стороны других материальных тел, то оно может изменять свое движение в пространстве или оставаться в покое. Механическое воздействие может происходить как при соприкосновении тел, так и на расстоянии (притяжение, отталкивание).

Механической системой называется любая совокупность материальных точек.

Абсолютно твердым телом (или **неизменяемой механической системой**) называется материальное тело, геометрическая форма которого и размеры не изменяются ни при каких механических воздействиях со стороны других тел, а расстояние между любыми двумя его точками остается постоянным.

Сила это основная количественная мера механического воздействия одного тела на другое, которая характеризует его интенсивность и направление.

Природа силы может быть различной. Это могут быть гравитационные, электромагнитные, упругие силы или силы давления. Теоретическая механика не интересуется природой сил.

Сила определяется точкой приложения, числовым значением и направлением действия, т.е. **является векторной величиной**.

Модуль силы находят путем ее сравнения с силой, принятой за единицу. Для статического измерения силы служат приборы, называемые **динамометрами**.

Силу как величину векторную обозначают какой-либо буквой со знаком вектора (например, \vec{F} или \vec{P}). Для выражения числового значения силы или ее модуля используется знак модуля от вектора или те же буквы, но без знака вектора (например, $|\vec{F}|$ и $|\vec{P}|$ или F и P).

Системой сил называется группа сил, которые действуют на рассматриваемое тело или (в общем случае) на точки механической системы.

Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, то система сил называется **плоской**, а если эти линии действия не лежат в одной плоскости, то система сил называется **пространственной**.

Системой сил эквивалентной нулю (или **уравновешенной системой сил**) называется такая система сил, действие которой на твердое тело или материальную точку, находящиеся в покое или движущиеся по инерции, не приводит к изменению состояния покоя или движения по инерции этого тела или материальной точки.

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n) \text{ эквивалентна } 0$$

Две системы сил называются эквивалентными, если их действие по отдельности на одно и то же твердое тело или материальную точку одинаково при прочих равных условиях.

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n) \text{ эквивалентна } (\overline{F}'_1, \overline{F}'_2, \dots, \overline{F}'_k)$$

Равнодействующей силой рассматриваемой системы сил называется сила, действие которой на твердое тело или материальную точку эквивалентно действию этой системы сил. Равнодействующую силу обозначают обычно \overline{R}

$$(\overline{R}) \text{ эквивалентна } (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n)$$

Уравновешивающей силой рассматриваемой системы сил называется сила, добавление которой к заданной системе сил дает новую систему, эквивалентную нулю.

Уравновешивающая сила равна по модулю равнодействующей и противоположна ей по направлению.

Сила, приложенная к телу в одной его точке, называется **сосредоточенной**. Силы, действующие на все точки данного объема, данной части поверхности тела или данной части кривой, называются **распределенными**.

Понятие о сосредоточенной силе является условным. Силы, которые в механике рассматриваются как сосредоточенные, представляют собой равнодействующие некоторых систем распределенных сил.

2. Аксиомы и простейшие теоремы статики

Аксиома о равновесии двух сил. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по величине и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны (рис. 1).

Аксиома о добавлении (отбрасывании) уравновешенной системы сил. Если на твердое тело действует система сил, то к ней можно добавить (отбросить) уравновешенную систему сил. Полученная после добавления (отбрасывания) новая система сил эквивалентна первоначальной.

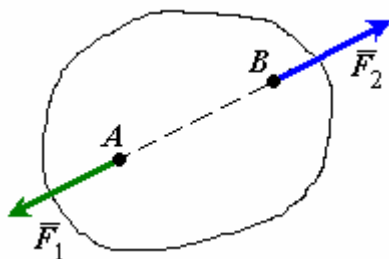


Рис. 1

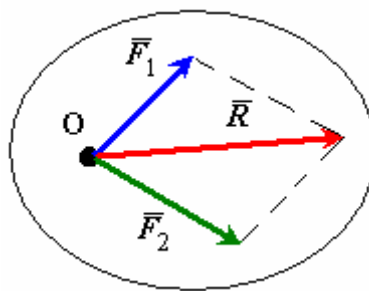


Рис. 2

Аксиома параллелограмма сил. Две силы, приложенные к телу в одной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и равную по величине и направлению диагонали параллелограмма, построенного на этих силах, как на сторонах (рис. 2).

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2)}.$$

Эта аксиома допускает и обратное утверждение:

Силу можно разложить бесчисленным множеством способов на две силы, приложенные в любой точке линии действия данной силы.

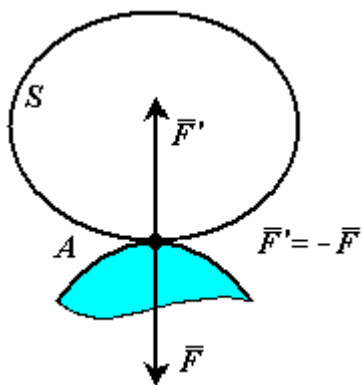


Рис. 3

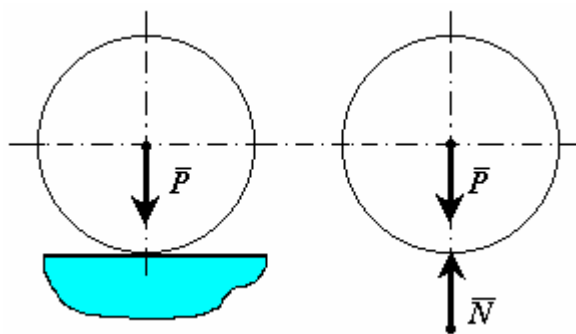


Рис. 4

Аксиома о равенстве действия и противодействия. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие (рис. 3).

Если к данному телу приложена сила воздействия \vec{F} от другого тела, то от данного тела к другому телу будет приложена сила \vec{F}' , равная и прямо противоположная силе \vec{F} . Силы приложены в одной геометрической точке, но к разным телам.

Свободным твердым телом называется тело, имеющее возможность получать любое движение из данного положения, для чего необходимо приложить соответствующую силу.

При решении большинства задач механики приходится иметь дело с телами **несвободными**, т.е. лишенными возможности перемещаться в направлении действия приложенных к ним активных сил. Тела, ограничивающие движение рассматриваемого тела, называются **связями**. Сила, с которой связь действует на тело, препятствуя его перемещению в том,

или ином направлении называется **силой реакции** (противодействия) этой **связи** или просто **реакцией связи**.

Аксиома о связях. Эффект от действия связей такой же, как от действия определенных, дополнительных сил, которые могут быть приложены к свободному телу вместо связей.

Аксиому о связях называют также принципом освобождаемости от связей. Согласно этой аксиоме, не изменяя равновесия тела, каждую связь можно отбросить, заменив ее реакцией связи.

Силы, которые могут сообщать свободному телу движение, называются **активными силами**. Приложив к телу, кроме активных сил, реакции связей, можно рассматривать тело как свободное. Активные силы и силы реакции называются внешними силами.

Пусть, например, на гладкой неподвижной горизонтальной плоскости покоится шар (рис. 4). Плоскость, ограничивающая движение шара, является для него связью. Если мысленно освободить шар от связи, то для удержания его в покое к нему в точке касания с плоскостью нужно приложить силу \bar{N} , равную по модулю весу шара \bar{P} и противоположную ему по направлению. Сила \bar{N} и есть реакция плоскости (реакция связи). Шар, освобожденный от связи, будет свободным телом, на которое действует задаваемая (активная) сила \bar{P} и реакция плоскости \bar{N} .

Аксиома отвердевания. Равновесие механической системы не нарушается от наложения новых связей; в частности, равновесие механической системы не нарушится, если все части системы связать между собой неизменно, жестко.

Теорема о переносе силы вдоль линии действия. Действие силы на твердое тело не изменится от переноса силы вдоль своей линии действия.

Теорема о трех силах. Если твердое тело под действием трех сил, две из которых пересекаются в одной точке, находится в равновесии, то линии действия таких трех сил пересекаются в одной точке и лежат в одной плоскости.

3. Соединение тел между собой

Отдельное тело может быть связано с другими телами различными способами.

3.1. Контакт тела с поверхностью

Если соприкасаются абсолютно гладкие тела, то силы взаимодействия между ними направлены по общей нормали к их поверхностям в точке соприкосновения (рис. 5).

3.2. Связь с помощью нитей (нить, цепь, трос)

Предполагается, что нить невесомая, нерастяжимая и абсолютно гибкая. Связь, осуществляемая в виде нити, не дает телу удаляться от точки подвеса

нити вдоль нити. Поэтому реакция натянутой нити направлена вдоль нити, к точке ее подвеса (рис. 6).

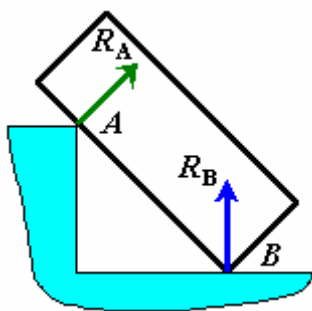


Рис. 5

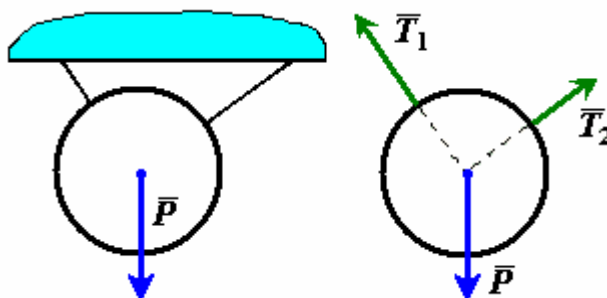


Рис. 6

3.3. Соединение тел с помощью шарниров.

Шарниром называется устройство, связывающее тела и позволяющее совершать вращение одного тела относительно другого.

Цилиндрический шарнир допускает вращение тел вокруг одной оси (рис. 7).

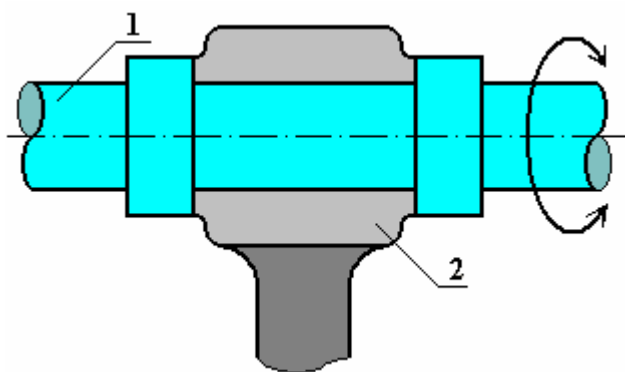


Рис. 7

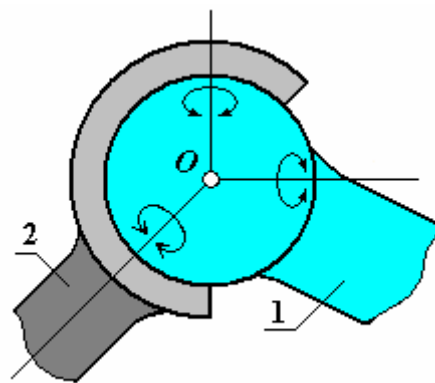


Рис. 8

Шаровым шарниром называется устройство, позволяющее сочлененным телам, имеющим общую точку сочленения, совершать вращение в пространстве относительно друг друга вокруг общей точки. Шаровой шарнир состоит из сферической чаши, находящейся на одном теле, и сферического выступа того же диаметра на другом. Реакция в шаровом шарнире может иметь любое направление в пространстве (рис. 8).

Шарнирно-неподвижная опора это цилиндрический или шаровой шарнир, у которого одно из сочлененных тел неподвижно. Шарнирно-неподвижная опора препятствует любому поступательному движению, но дает возможность свободно вращаться вокруг оси или общей точки шарнира.

Реакция \bar{R} шарнирно-неподвижной опоры проходит через ось шарнира и лежит в плоскости перпендикулярной к этой оси или через центр шарнира O . Модуль и направление реакции \bar{R} неизвестны.

Шарнирно-подвижная опора (шарнирно-неподвижная опора поставленная на катки) не препятствует перемещению параллельно опорной поверхности. Если не учитывать трения катков, то линия действия реакции такой опоры проходит через ось или центр шарнира перпендикулярно опорной поверхности. Неизвестен только модуль этой реакции.

На рис. 9 и рис. 10 показаны условные обозначения шарнирно-неподвижной и шарнирно-подвижной опор соответственно в случае плоской системы сил.



Рис. 9

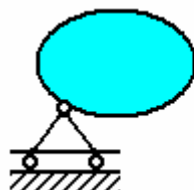
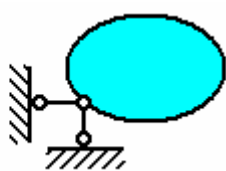


Рис. 10



Пример 1. На невесомую трехшарнирную арку (рис. 11а) действует горизонтальная сила \bar{F} . Определить линию действия реакции \bar{R}_A (реакции связи в точке А).

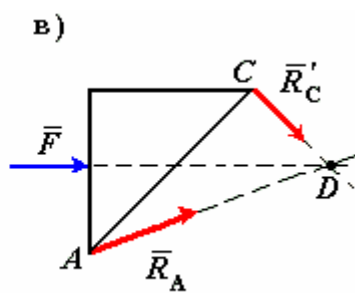
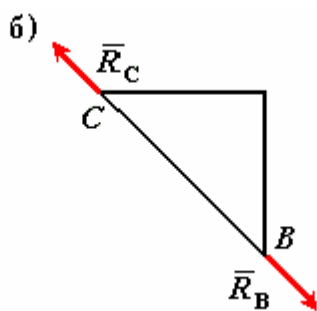
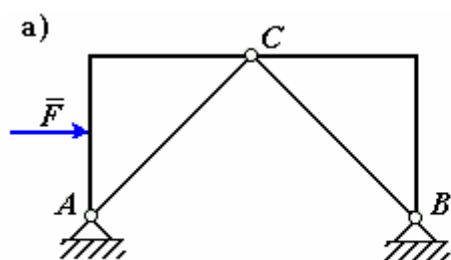


Рис. 11

Решение: Рассмотрим правую часть арки отдельно (рис. 11б). В точках B и C приложим силы реакции связей \bar{R}_B и \bar{R}_C . Тело под действием двух сил находится в равновесии. Согласно аксиоме о равновесии двух сил, силы \bar{R}_B и \bar{R}_C равны по величине и действуют вдоль одной прямой в противоположные стороны. Таким образом, направление силы \bar{R}_C нам известно (вдоль линии BC).

Рассмотрим левую часть арки отдельно (рис. 11в). В точках A и C приложим силы реакции связей \bar{R}_A и \bar{R}_C' . Сила $\bar{R}_C' = -\bar{R}_C$, действие равно противодействию. На тело действуют три силы, направления двух сил (\bar{F} и \bar{R}_C') известно. Согласно теореме о трех силах линии действия всех трех сил пересекаются в одной точке. Следовательно, сила \bar{R}_A направлена вдоль линии AD .

4. Система сходящихся сил. Условия равновесия.

4.1. Определение

Системой сходящихся сил (или пучком сил) называется такая система сил, линии действия которой пересекаются в одной точке – центре пучка.

Равнодействующая системы сходящихся сил равна векторной сумме слагаемых сил и определяется замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на слагаемых силах как на составляющих. Точка приложения равнодействующей силы совпадает с точкой пересечения линий действия сил. (рис. 12)

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_3 = \sum_i \vec{F}_i$$

Проекции равнодействующей силы на оси координат равны алгебраической сумме проекций составляющих сил на эти оси.

$$R_x = \sum F_{xi} \quad R_y = \sum F_{yi} \quad R_z = \sum F_{zi}$$

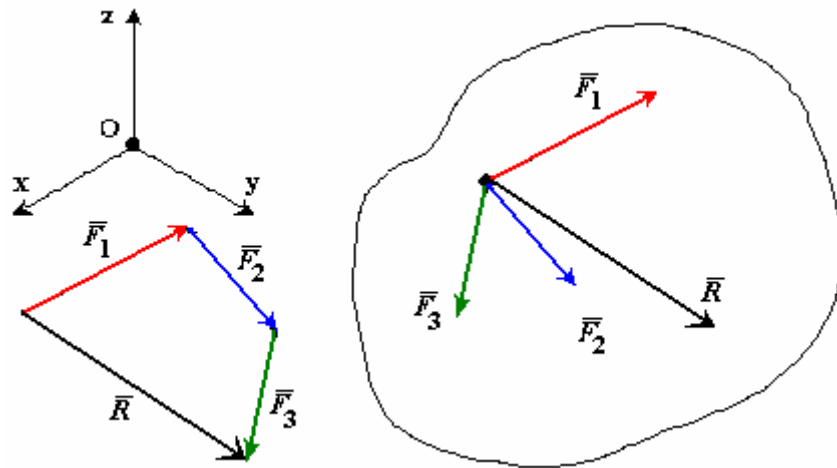


Рис. 12

4.2. Условия равновесия.

Условия равновесия системы сходящихся сил в векторной форме

Для равновесия сходящейся системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая сила была равна нулю.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

Условия равновесия системы сходящихся сил в алгебраической форме

Для равновесия пространственной системы сходящихся сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех прямоугольных осей координат были равны нулю.

$$\sum F_{xi} = 0, \quad \sum F_{yi} = 0, \quad \sum F_{zi} = 0.$$

5. Момент силы относительно точки

Если под действием приложенной силы твердое тело может совершать вращение вокруг некоторой точки, то для того, чтобы охарактеризовать вращательный эффект силы, необходимо ввести новое понятие - момент силы относительно точки.

Рассмотрим силу \vec{F} , приложенную к телу в точке A . Из некоторой точки O опустим перпендикуляр на линию действия силы \vec{F} (рис. 13).

Плечом h силы \vec{F} относительно точки O называется кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы.

Через силу \vec{F} и точку O можно провести плоскость. Сила \vec{F} пытается вращать тело вокруг оси, которая проходит через точку O и перпендикулярна плоскости в которой лежит сила. Точка O называется моментной точкой.

Моментом силы \vec{F} относительно точки O называется вектор $\vec{M}_0(\vec{F})$, приложенный в этой точке и равный векторному произведению радиус-вектора \vec{r} , соединяющего эту точку с точкой приложения силы, на вектор силы \vec{F} ,

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Модуль вектора $\vec{M}_0(\vec{F})$ равен произведению модуля силы F на ее плечо h .

$$M_0(\vec{F}) = F \cdot r \cdot \sin(\alpha) = F \cdot h.$$

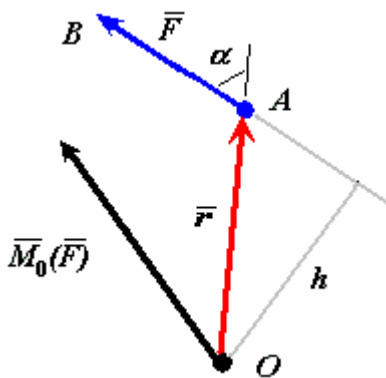


Рис. 13

Момент силы \vec{F} относительно точки O направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила и моментная точка (радиус-вектор), в том направлении откуда видно стремление силы вращать тело против движения часовой стрелки.

Момент силы относительно точки не меняется от переноса силы вдоль линии ее действия.

Момент силы равен нулю, если линия действия силы проходит через моментную точку.

Если сила \vec{F} задана своими проекциями F_x , F_y , F_z на оси координат и даны координаты x , y , z точки приложения этой силы, то момент силы относительно начала координат вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= (y \cdot F_z - z \cdot F_y) \cdot \vec{i} + (z \cdot F_x - x \cdot F_z) \cdot \vec{j} + (x \cdot F_y - y \cdot F_x) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Проекции момента на оси координат равны:

$$M_{0x}(\vec{F}) = (y \cdot F_z - z \cdot F_y), \quad M_{0y}(\vec{F}) = (z \cdot F_x - x \cdot F_z),$$

$$M_{0z}(\vec{F}) = (x \cdot F_y - y \cdot F_x).$$

6. Момент силы относительно оси

6.1. Определение

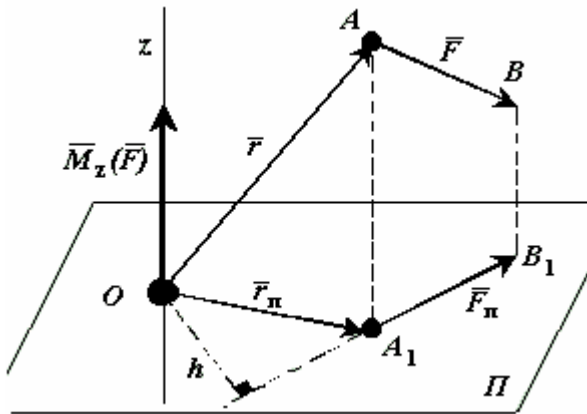


Рис. 14

К твердому телу в точке A приложена сила \vec{F} . Проведем в пространстве ось (z) . На оси z произвольно выберем точку O . Соединим точку O с точкой A радиус-вектором. Через точку O проведем плоскость Π перпендикулярную оси z . Спроектируем векторы \vec{F} и \vec{r} на плоскость Π (рис. 14).

Моментом силы \vec{F} относительно оси z называется вектор, равный моменту проекции силы \vec{F} на плоскость Π относительно точки O пересечения оси z с плоскостью Π .

$$\overline{M_z(\vec{F})} = \overline{M_0(\vec{F}_\Pi)} = \overline{r_\Pi} \times \overline{F_\Pi},$$

$$M_z(\vec{F}) = F_\Pi \cdot r_\Pi \cdot \sin(\overline{r_\Pi}, \overline{F_\Pi}) = F_\Pi \cdot h.$$

Свойства момента силы относительно оси:

1. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила параллельна оси. В этом случае равна нулю проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси.
2. Момент силы относительно оси равен нулю, если линия действия силы пересекается с осью. В этом случае равно нулю плечо силы.

6.2. Связь момента силы относительно оси с моментом силы относительно точки.

Проведем через точку O , где задан момент силы относительно точки $\overline{M_0(\vec{F})}$ декартовы оси координат x, y, z . Момент силы относительно точки можно представить в виде суммы трех векторов

$\overline{M}_0(\overline{F}) = \overline{M}_x(\overline{F}) + \overline{M}_y(\overline{F}) + \overline{M}_z(\overline{F})$. Эти вектора являются моментами силы относительно осей x, y, z соответственно:

$$\overline{M}_x(\overline{F}) = M_{0x}(\overline{F}) \cdot \vec{i}, \quad \overline{M}_y(\overline{F}) = M_{0y}(\overline{F}) \cdot \vec{j}, \quad \overline{M}_z(\overline{F}) = M_{0z}(\overline{F}) \cdot \vec{k}.$$

Момент силы относительно оси равен проекции на эту ось момента силы относительно любой точки на оси:

$$M_z(\overline{F}) = M_0(\overline{F}) \cdot \cos(\angle Oz, \overline{M}_0(\overline{F})).$$

6.3. Формулы для моментов силы относительно осей координат.

Если сила \overline{F} задана своими проекциями F_x, F_y, F_z на оси координат и даны координаты x, y, z точки приложения этой силы, относительно осей координат, то моменты силы относительно осей координат вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x(\overline{F}) &= M_{0x}(\overline{F}) = (y \cdot F_z - z \cdot F_y), \\ M_y(\overline{F}) &= M_{0y}(\overline{F}) = (z \cdot F_x - x \cdot F_z), \\ M_z(\overline{F}) &= M_{0z}(\overline{F}) = (x \cdot F_y - y \cdot F_x). \end{aligned}$$

7. Пара сил

7.1. Определение пары сил

Парой сил называется система двух равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 15).

Плоскостью действия пары сил называется плоскость в которой расположены эти силы.

Плечом пары сил d называется кратчайшее расстояние между линиями действия сил пары.

Моментом пары сил называется вектор \overline{M} , модуль которого равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо и который направлен перпендикулярно плоскости действия сил пары в ту сторону, откуда пара видна, стремящейся повернуть тело против хода часовой стрелки. $M = F_1 \cdot d$.

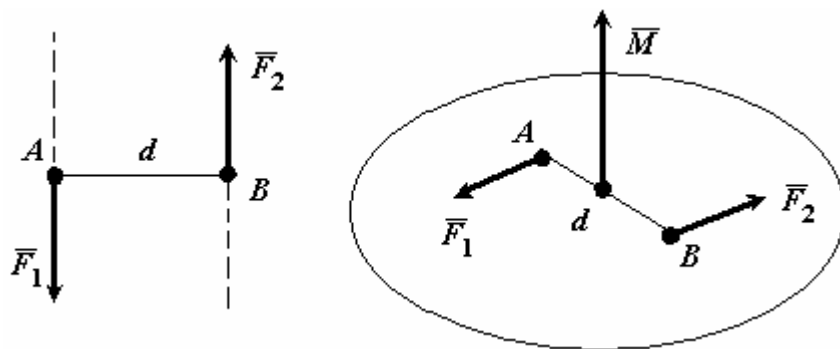


Рис. 15

7.2. Свойства пары сил

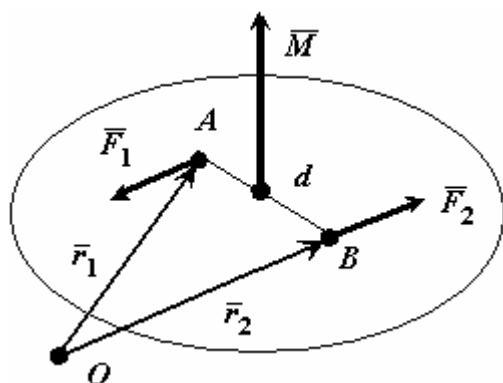


Рис. 16

Теорема о сумме моментов пары сил. Сумма моментов сил, входящих в состав пары, относительно любой точки не зависит от выбора этой точки и равна моменту этой пары сил (рис. 16).

$$\overline{M}_0(\overline{F}_1) + \overline{M}_0(\overline{F}_2) = \overline{M}(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$$

Две пары сил называются эквивалентными, если их действие на твердое тело одинаково при прочих равных условиях.

Теорема об эквивалентности пар сил. Пару сил, действующую на твердое тело, можно заменить другой парой сил, расположенной в той же плоскости действия и имеющей одинаковый с первой парой момент.

Выводы:

1. Пару сил как жесткую фигуру можно как угодно поворачивать и переносить в ее плоскости действия.
2. У пары сил можно изменять плечо и силы, сохраняя при этом момент пары и плоскость действия.

Теорема о переносе пары сил в параллельную плоскость. Действие пары сил на твердое тело не изменится от переноса этой пары в параллельную плоскость.

Следствие: Момент пары сил, действующий на твердое тело, есть свободный вектор.

Две пары сил, действующих на одно и то же твердое тело, эквивалентны, если они имеют одинаковые по модулю и направлению моменты.

Теорема о сложении пар сил. Две пары сил, действующих на одно и то же твердое тело, и лежащие в пересекающихся плоскостях, можно заменить одной эквивалентной парой сил, момент которой равен сумме моментов заданных пар сил. $\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$.

7.3. Условия равновесия пар сил.

Если на твердое тело действует несколько пар сил, как угодно расположенных в пространстве, то последовательно применяя правило параллелограмма к каждому двум моментам пар сил, можно любое количество пар сил заменить одной эквивалентной парой сил, момент которой равен сумме моментов заданных пар сил.

$$\overline{M} = \sum \overline{M}_i$$

Теорема. Для равновесия пар сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы момент эквивалентной пары сил равнялся нулю.

$$\overline{M} = 0$$

Теорема. Для равновесия пар сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций моментов пар сил на каждую из трех координатных осей была равна нулю.

$$M_x = \sum M_{ix} = 0; \quad M_y = \sum M_{iy} = 0; \quad M_z = \sum M_{iz} = 0.$$

8. Приведение силы к заданному центру. Условия равновесия

8.1. Приведение силы к заданному центру.

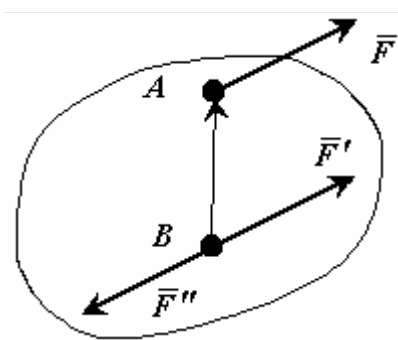


Рис. 17

Равнодействующая системы сходящихся сил непосредственно находится с помощью сложения сил по правилу параллелограмма. Очевидно, что аналогичную задачу можно будет решить и для произвольной системы сил, если найти для них метод, позволяющий перенести все силы в одну точку.

Теорема о параллельном переносе силы. Силу, приложенную к абсолютно твердому телу, можно, не изменяя оказываемого ею действия, переносить из данной точки в любую другую точку тела, прибавляя при этом пару с моментом, равным моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится (рис. 17).

Пусть сила \overline{F} приложена в точке A. Действие этой силы не изменяется, если в точке B приложить две уравновешенные силы. Полученная система трех сил представляет собой силу \overline{F}' равную \overline{F} , но приложенную в точке B и пару $(\overline{F}, \overline{F}'')$ с моментом $\overline{M} = \overline{BA} \times \overline{F}$. Процесс замены силы \overline{F} силой \overline{F}' и парой сил $(\overline{F}, \overline{F}'')$ называется приведением силы \overline{F} к заданному центру B.

8.2. Приведение системы сил к заданному центру.

Основная теорема статики (Пуансо).

Любую произвольную систему сил, действующую на твердое тело, можно в общем случае привести к силе и паре сил. Этот процесс замены системы сил одной силой и одной парой сил называется **приведением системы сил к заданному центру**.

Главным вектором системы сил называется вектор, равный векторной сумме этих сил:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i .$$

Главным моментом системы сил относительно точки O тела, называется вектор, равный векторной сумме моментов всех сил системы относительно этой точки.

$$\bar{L}_0 = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_i) .$$

Формулы для вычисления главного вектора и главного момента

$$\begin{aligned} R_x &= \sum F_{ix} , & R_y &= \sum F_{iy} , & R_z &= \sum F_{iz} , \\ L_{0x} = L_x &= \sum M_x(\bar{F}_i) = \sum (y_i \cdot F_{iz} - z_i \cdot F_{iy}) , \\ L_{0y} = L_y &= \sum M_y(\bar{F}_i) = \sum (z_i \cdot F_{ix} - x_i \cdot F_{iz}) , \\ L_{0z} = L_z &= \sum M_z(\bar{F}_i) = \sum (x_i \cdot F_{iy} - y_i \cdot F_{ix}) . \end{aligned}$$

8.3. Условия равновесия системы сил.

Векторная форма .

Для равновесия произвольной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы главный вектор системы сил был равен нулю и главный момент системы сил относительно любого центра приведения также был равен нулю.

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_i = 0 , \quad \bar{L}_0 = \sum \bar{M}_0(\bar{F}_i) = 0 .$$

Алгебраическая форма.

Для равновесия произвольной системы сил, приложенных к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы три суммы проекций всех сил на оси декартовых координат были равны нулю и три суммы моментов всех сил относительно трех осей координат также были равны нулю.

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= 0 , & \sum F_{iy} &= 0 , & \sum F_{iz} &= 0 , \\ \sum M_x(\bar{F}_i) &= 0 , & \sum M_y(\bar{F}_i) &= 0 , & \sum M_z(\bar{F}_i) &= 0 . \end{aligned}$$

8.4. Условия равновесия пространственной системы параллельных сил.

На тело действует система параллельных сил. Ось Oz расположена параллельно силам.

Для равновесия пространственной системы параллельных сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил на ось Oz была равна нулю и суммы моментов этих сил относительно двух координатных осей, перпендикулярных силам, также были равны нулю.

$$\sum F_{iz} = \sum F_i = 0 , \quad \sum M_x(\bar{F}_i) = 0 , \quad \sum M_y(\bar{F}_i) = 0 .$$

F_i - проекция силы на ось Oz .

8.5. Условия равновесия плоской системы сил.

На тело действует плоская система сил. Расположим оси Ox и Oy в плоскости действия сил.

Для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из двух прямоугольных осей координат, расположенных в плоскости действия сил, были равны нулю и сумма моментов этих сил относительно любой точки, находящейся в плоскости действия сил также была равна нулю.

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \sum F_{iy} = 0 \quad \sum M_o(\vec{F}_i) = 0$$

Теорема о трех моментах.

Для равновесия плоской системы сил, действующих на твердое тело, необходимо и достаточно, чтобы суммы моментов этих сил системы относительно трех любых точек, расположенных в плоскости действия сил и не лежащих на одной прямой, были равны нулю.

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad \sum M_C(\vec{F}_i) = 0.$$

8.6. Реакция жесткой заделки.

Рассмотрим балку один конец которой AB заделан в стену. Такое крепление конца балки AB называется **жесткой заделкой в точке B** (рис. 18). Пусть на балку действует плоская система сил. Определим силы, которые надо приложить к точке B балки, если часть балки AB отбросить. К сечению балки (B) приложены распределенные силы реакции. Если эти силы заменить элементарными сосредоточенными силами и затем привести их к точке B , то в точке B получим силу \vec{R}_B (главный вектор сил реакции) и пару сил с моментом M (главный вектор сил реакции относительно точки B). Момент M называют **моментом заделки** или **реактивным моментом**. Силу реакции \vec{R}_B можно заменить двумя составляющими \vec{R}_x и \vec{R}_y , параллельными осям координат.

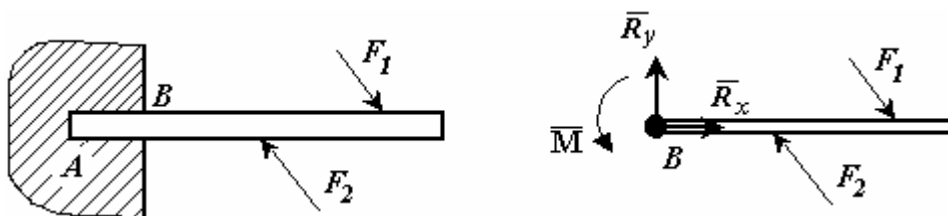


Рис. 18

Жесткая заделка в отличие от шарнира создает не только неизвестную по величине и направлению реакцию \vec{R}_B , но еще и пару сил с неизвестным моментом M в заделке.

9. Центр параллельных сил. Центр тяжести.

9.1. Центр параллельных сил.

Для системы параллельных сил введем понятие **центра параллельных сил**.

На тело действует система параллельных сил \vec{F}_i , приложенных в точках $A_i(x_i, y_i, z_i)$. Выберем оси координат так, чтобы ось Oz была параллельна силам (рис. 19).

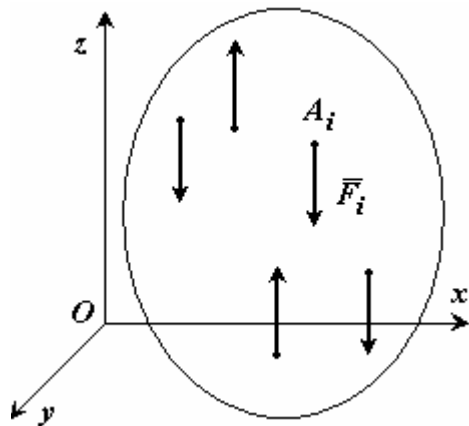


Рис. 19

$$F_{ix} \equiv 0, \quad F_{iy} \equiv 0, \quad F_{iz} = F_i.$$

F_i - проекция силы на ось Oz .

$$x_C = \frac{\sum x_i \cdot F_i}{\sum F_i},$$

$$y_C = \frac{\sum y_i \cdot F_i}{\sum F_i},$$

$$z_C = \frac{\sum z_i \cdot F_i}{\sum F_i}.$$

Точка C с координатами (x_C, y_C, z_C) называется **центром параллельных сил**. F_i - проекция силы на ось Oz .

Свойства центра параллельных сил:

1. Сумма моментов всех сил \vec{F}_i относительно точки C равна нулю $\sum M_C(\vec{F}_i) = 0$.
2. Если все силы повернуть на некоторый угол α , не меняя точек приложения сил, то центр новой системы параллельных сил будет той же точкой C .

9.2. Центр тяжести.

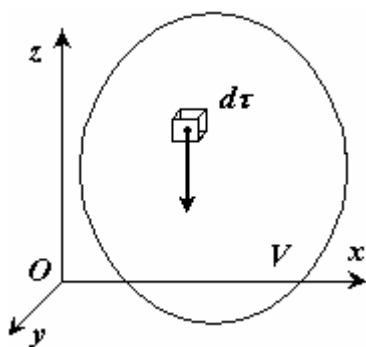


Рис. 20

Центром тяжести тела называется геометрическая точка, жестко связанная с этим телом, и являющаяся центром параллельных сил тяжести, приложенных к отдельным элементарным частицам тела.

Координаты центра тяжести **неоднородного твердого тела** в выбранной системе отсчета определяются следующим образом (рис. 20):

$$x_C = \frac{\int_V x \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau}, \quad y_C = \frac{\int_V y \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau}, \quad z_C = \frac{\int_V z \cdot \gamma_T(x, y, z) d\tau}{\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau},$$

где $\gamma_T(x, y, z)$ - вес единицы объема тела (удельный вес тела).

$\int_V \gamma_T(x, y, z) d\tau$ - вес всего тела.

Для **однородного твердого тела** $\gamma_T(x, y, z) = \text{const}$ и формулы получают вид:

$$x_C = \frac{\int_V x d\tau}{\int_V d\tau}, \quad y_C = \frac{\int_V y d\tau}{\int_V d\tau}, \quad z_C = \frac{\int_V z d\tau}{\int_V d\tau},$$

$V = \int_V d\tau$ - объем всего тела.

Если твердое тело представляет собой **однородную поверхность**, то координаты центра тяжести в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:

$$x_C = \frac{\int_S x d\sigma}{\int_S d\sigma}, \quad y_C = \frac{\int_S y d\sigma}{\int_S d\sigma}, \quad z_C = \frac{\int_S z d\sigma}{\int_S d\sigma},$$

$S = \int_S d\sigma$ - площадь поверхности.

Если твердое тело представляет собой **однородную линию**, то координаты центра тяжести в выбранной системе отсчета определяются следующим образом:

$$x_C = \frac{\int_L x dl}{\int_L dl}, \quad y_C = \frac{\int_L y dl}{\int_L dl}, \quad z_C = \frac{\int_L z dl}{\int_L dl},$$

$L = \int_L dl$ - длина линии.

9.3. Способы определения координат центра тяжести.

Исходя из полученных выше общих формул, можно указать конкретные способы определения координат центров тяжести тел.

9.3.1. Симметрия. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр тяжести лежит соответственно в плоскости симметрии, оси симметрии или в центре симметрии (рис. 21).

9.3.2. Разбиение. Тело разбивается на конечное число частей, для каждой из которых положение центра тяжести и площадь известны (рис. 22).

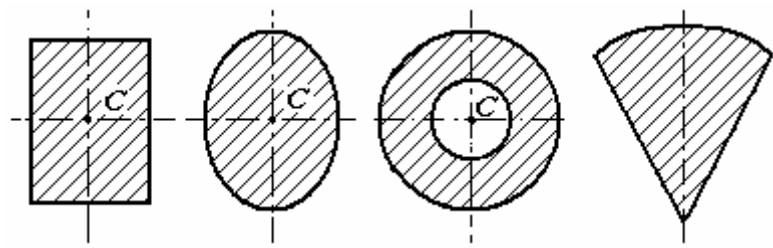


Рис. 21

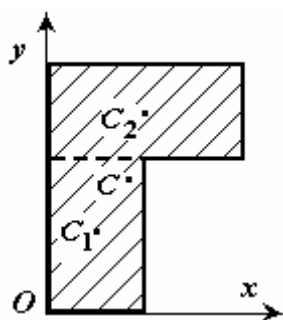


Рис. 22

$$C_1(x_1, y_1), S_1, C_2(x_2, y_2), S_2,$$

$$x_c = \frac{x_1 \cdot S_1 + x_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2},$$

$$y_c = \frac{y_1 \cdot S_1 + y_2 \cdot S_2}{S_1 + S_2},$$

$$S = S_1 + S_2.$$

9.3.3. Дополнение. Частный случай способа разбиения. Он применяется к телам имеющим вырезы, если центры тяжести тела без выреза и вырезанной части известны.

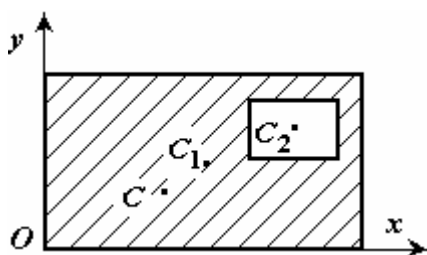


Рис. 23

$$C_1(x_1, y_1), S_1, C_2(x_2, y_2), S_2, S = S_1 - S_2.$$

$$x_c = \frac{x_1 \cdot S_1 - x_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2},$$

$$y_c = \frac{y_1 \cdot S_1 - y_2 \cdot S_2}{S_1 - S_2},$$

10. Трение

10.1. Трение скольжения

Если твердое тело находится на абсолютно гладкой поверхности другого тела в равновесии, то реакция связи направлена по нормали к поверхности.

В действительности абсолютно гладких поверхностей не бывает. Все поверхности тел в той или иной степени шероховаты. Поэтому сила реакции \bar{R} шероховатой поверхности при равновесии тела зависит от активных сил не только по числовой величине, но и по направлению.

Разложим силу реакции \bar{R} шероховатой поверхности на составляющие: одну из которых \bar{N} направим по общей нормали к поверхности

соприкосновения, а другую \vec{F} направим в касательной плоскости к этим поверхностям (рис. 24).

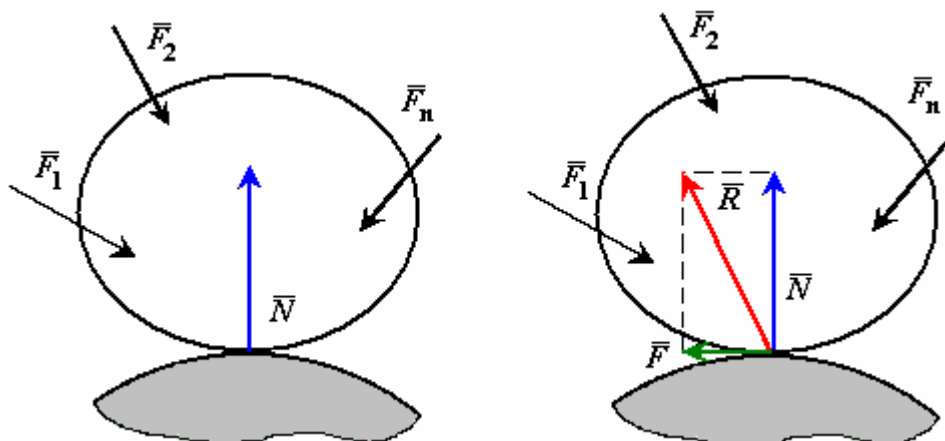


Рис. 24

Силой трения скольжения (или просто силой трения) называется составляющая силы реакции связи, которая лежит в касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел.

Силой нормальной реакции связи называется составляющая силы реакции связи, которая направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел.

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}.$$

Природа силы трения очень сложная и мы ее не касаемся. В теоретической механике предполагается, что между поверхностями соприкасающихся тел нет смазывающего вещества.

Сухим трением называется трение, когда между поверхностями соприкасающихся тел нет смазывающего вещества.

Будем рассматривать два случая: трения при покое или равновесии тела и трение скольжения при движении одного тела по поверхности другого с некоторой относительной скоростью.

При покое сила трения зависит только от активных сил. При выбранном направлении касательной в точке соприкосновения поверхностей тел сила трения вычисляется по формуле:

$$\vec{F} = -\sum \vec{F}_{\tau i}$$

Аналогично при выбранном направлении нормали нормальная реакция выражается через заданные силы:

$$N = -\sum F_{ni}$$

При движении одного тела по поверхности другого сила трения является постоянной величиной.

В инженерных расчетах обычно исходят из ряда установленных опытным путем закономерностей, которые с достаточной для практики точностью отражают основные особенности явления сухого трения. Эти закономерности называются законами трения скольжения или законами Кулона.

Законы Кулона

1. Сила трения скольжения находится в общей касательной плоскости соприкасающихся поверхностей тел и направлена в сторону, противоположную направлению возможного скольжения тела под действием активных сил. Сила трения зависит от активных сил, и её модуль заключён между нулём и максимальным значением, которое достигается в момент выхода тела из положения равновесия, то есть:

$$0 < F < F_{\max},$$

F_{\max} - называется **предельной силой трения**.

2. Предельная сила трения скольжения при прочих равных условиях не зависит от площади соприкосновения трущихся поверхностей. Из этого закона следует, что для того чтобы сдвинуть, например кирпич, надо приложить одну и ту же, силу, независимо, от того, какой гранью он положен на поверхность, широкой или узкой.
3. Предельная сила трения скольжения пропорциональна нормальной реакции (нормальному давлению), то есть $F_{\max} = f \cdot N$, где безразмерный коэффициент f называют коэффициентом трения скольжения; он не зависит от нормальной реакции.
4. Коэффициент трения скольжения зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей, то есть от величины и характера шероховатости, влажности, температуры и других условий. Коэффициент трения определяется экспериментально.

Считается, что коэффициент трения не зависит от скорости движения.

Угол трения

Многие задачи на равновесие тела на шероховатой поверхности, т.е. при наличии трения, удобно решать геометрически. Для этого введем понятие угла и конуса трения.

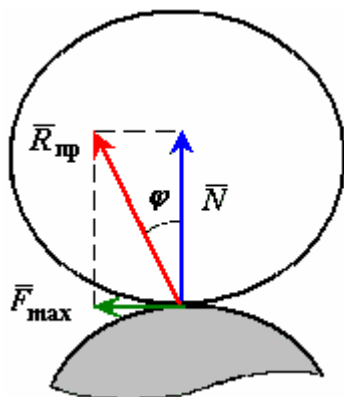


Рис. 25

Реакция реальной (шероховатой) связи \bar{R} складывается из двух составляющих: нормальной реакции \bar{N} и перпендикулярной ей силы трения \bar{F} . Следовательно, реакция связи \bar{R} отклоняется от нормали к поверхности на некоторый угол. При изменении силы трения от нуля до максимальной, сила реакции \bar{R} меняется от нуля до \bar{R}_{np} , а её угол с нормалью растёт от нуля до некоторого предельного значения φ (рис. 25).

Углом трения называется наибольший угол φ между предельной силой реакции шероховатой связи \bar{R}_{np} и нормальной реакцией \bar{N} .

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\max}}{N}; \quad F_{\max} = f \cdot N \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = f.$$

Угол трения φ зависит от коэффициента трения.

Конусом трения называют конус, описанный предельной силой реакции шероховатой связи \bar{R}_{np} вокруг направления нормальной реакции.

10.2. Условие равновесия при наличии сил трения

Для равновесия твёрдого тела на шероховатой поверхности необходимо и достаточно, чтобы линия действия равнодействующей активных сил, действующих на твёрдое тело, проходила внутри конуса трения или по его образующей через его вершину.

Тело нельзя вывести из равновесия любой по модулю активной силой, если её линия действия проходит внутри конуса трения.

10.3. Трение качения

Трением качения называется сопротивление, возникающее при качении одного тела по поверхности другого.

Рассмотрим цилиндрический каток радиуса r на горизонтальной плоскости (рис. 26). Под действием активных сил каток может катиться по плоскости. Из-за деформации поверхностей между катком и плоскостью в месте их соприкосновения могут возникнуть силы реакции, препятствующие действию активных сил.

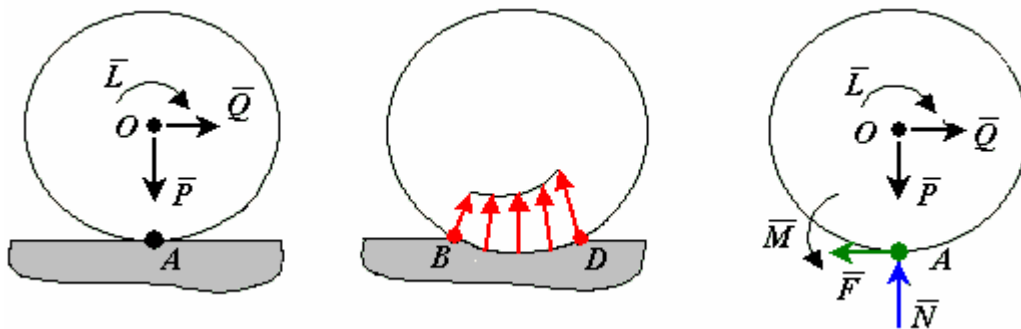


Рис. 26

Активные силы, действующие на катки в виде колес, обычно состоят из силы тяжести \bar{P} , горизонтальной силы \bar{Q} , приложенной к центру катка, и пары сил с моментом \bar{L} , стремящейся катить колесо. Колесо в этом случае называется **ведомо-ведущим**. Если $\bar{L} = 0$, а $\bar{Q} \neq 0$, то колесо называется **ведомым**. Если $\bar{L} \neq 0$, а $\bar{Q} = 0$, то колесо называется **ведущим**.

Соприкосновение катка с неподвижной плоскостью из-за деформации катка и плоскости происходит не в точке, а по некоторой линии BD . По этой линии на каток действуют распределенные силы реакции. Если привести силы реакции к точке A , то в этой точке получим главный вектор \bar{R} этих

распределенных сил с составляющими \overline{N} (нормальная реакция) и \overline{F} (сила трения скольжения), а также пару сил с моментом \overline{M} .

Момент \overline{M} называется моментом трения качения. Наибольшее значение M достигается в момент начала качения катка по плоскости.

Экспериментально установлены следующие приближенные законы для наибольшего момента пары сил, препятствующих качению:

1. Наибольший момент пары сил, препятствующих качению, в довольно широких пределах не зависит от радиуса катка.
2. Предельное значение момента M_{max} пропорционально нормальной реакции N .
$$M_{max} = k \cdot N.$$

Коэффициент пропорциональности k называют коэффициентом трения качения. Размерность k - это размерность длины.

3. Коэффициент трения качения k зависит от материала катка, плоскости и физического состояния их поверхностей. Коэффициент трения качения при качении в первом приближении можно считать не зависящим от угловой скорости качения катка и его скорости скольжения по плоскости.

КИНЕМАТИКА

11. Кинематики точки

11.1. Введение в кинематику точки

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучаются движения материальных объектов, таких как точка и твердое тело, без рассмотрения причин, вызывающих или изменяющих это движение.

Такое изучение движения материальных объектов не требует учета инерционных характеристик этих объектов: массы и моментов инерции.

В курсе теоретической механики кинематика делится на кинематику точки и кинематику твердого тела.

В кинематике точки рассматриваются характеристики движения точки, такие, как скорость и ускорение и методы их определения при различных способах задания движения.

Траекторией точки называется геометрическое место ее последовательных положений в пространстве с течением времени относительно рассматриваемой системы отсчета.

Форма траектории может быть прямолинейной или криволинейной и зависит от выбранной системы координат.

Пример 2.

С горизонтально летящего относительно Земли самолета сброшен груз. Сопротивление воздуха отсутствует.

Траекторией центра масс груза относительно системы отсчета Oxy , жестко связанной с Землей, будет парабола. (рис. 27а).

Траекторией центра масс груза относительно системы отсчета $O_1x_1y_1$, жестко связанной с летящим самолетом, будет прямая линия. (рис. 27б).

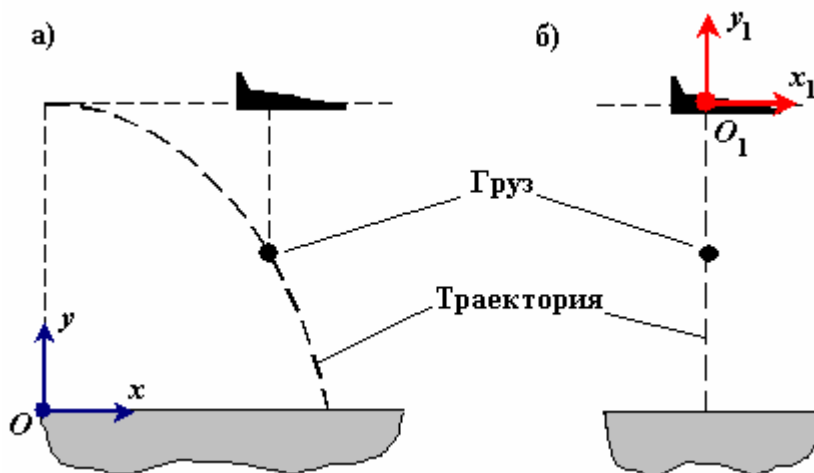


Рис. 27

11.2. Способы задания движения точки.

Движение точки можно изучать, используя любую систему координат. Существует три способа задания движения: векторный, координатный и естественный.

Векторный способ задания движения.

Рассматриваем случай декартовой прямоугольной системы координат.

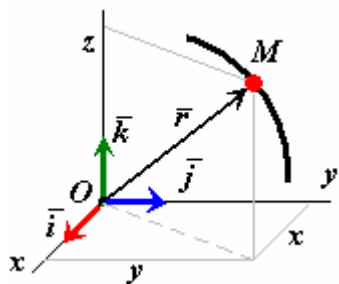


Рис. 28

Движение точки относительно рассматриваемой системы отсчета задано векторным способом, если известен радиус-вектор \vec{r} этой точки как функция времени (рис. 28), т.е.

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Векторный способ обычно применяется для теоретического изложения механики.

Координатный способ задания движения.

Движение точки задано координатным способом, если известны координаты точки, как непрерывные, дважды дифференцируемые функции времени, т.е.

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Уравнения движения есть также уравнения траектории точки в **параметрической форме**. Параметром является время t .

Векторный и координатный способы задания движения связаны следующим образом (рис. 2):

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}.$$

Пример 3.

Движение точки задано векторным уравнением $\vec{r}(t) = (t-1) \cdot \vec{i} + (t^2+1) \cdot \vec{j} + \sin(t) \cdot \vec{k}$. Это векторный способ задания движения.

Движение точки задано уравнениями $x = a \cdot \sin(k \cdot t)$, $y = b \cdot \sin(k \cdot t)$ (a, b , и k - постоянные величины). Это координатный способ задания движения.

Естественный способ задания движения.

При естественном способе задания движения задаются траектория точки и закон движения точки по траектории.

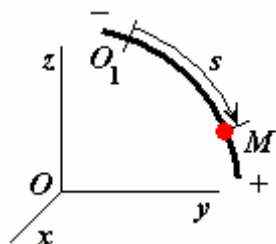


Рис. 29

Движение точки рассматривается относительно фиксированной системы отсчета.

Для задания закона движения точки по траектории необходимо выбрать на траектории точку O_1 , принимаемую за начало отсчета и указать направление положительного отсчета (рис. 29).

$s = f(t)$ - закон движения точки по траектории. Величина s является расстоянием от начала отсчета до текущего положения точки, ее еще называют дуговой или криволинейной координатой.

Функция $s = f(t)$ должна быть непрерывной и дважды дифференцируемой.

Пример 4.

Точка движется по окружности радиуса R в соответствии с законом $s = t^2 - 4$, (s - в метрах t - в секундах). Это естественный способ задания движения.

От задания движения в декартовых координатах можно перейти к его заданию естественным способом. Пусть движение задано координатным способом: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Дифференциал расстояния s выражается через декартовы координаты следующим образом:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

и после интегрирования по времени получаем

$$s = \int_0^t \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 + f_3'(t)^2} dt.$$

11.3 Скорость точки

Одной из основных характеристик движения точки является ее скорость относительно выбранной системы отсчета.

Положение движущейся точки M относительно системы отсчета в момент времени t определяется радиус-вектором \vec{r} .

Скорость точки при векторном способе задания движения

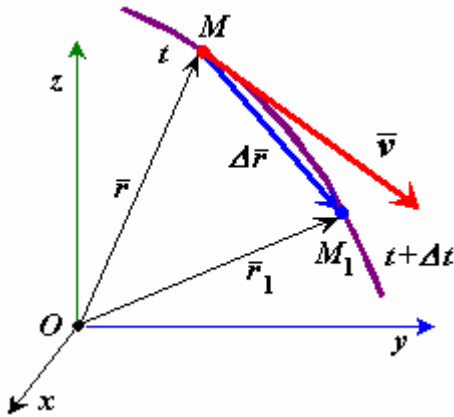


Рис. 30

В другой момент времени $t_1 = t + \Delta t$ точка займет положение M_1 с радиус-вектором \bar{r}_1 (рис. 30). За время Δt радиус-вектор движущейся точки изменится на $\Delta \bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}$.

Средней скоростью \bar{v}_{cp} называется отношение изменения радиус-вектора $\Delta \bar{r}$ к изменению времени Δt ,

$$\bar{v}_{cp} = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}.$$

Скорость точки равна первой производной по времени от ее радиус-вектора,

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}.$$

Скорость точки при координатном способе задания движения

Скорость точки раскладывается на составляющие, параллельные осям координат:

$$\bar{v}(t) = v_x(t) \cdot \bar{i} + v_y(t) \cdot \bar{j} + v_z(t) \cdot \bar{k}.$$

Проекции скорости на оси координат определяются так:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t), \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t), \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t).$$

Проекция скорости точки на какую-либо координатную ось равна первой производной по времени от соответствующей координаты этой точки.

Модуль скорости и направляющие косинусы равны:

$$v = |\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2},$$

$$\cos(\bar{v}, x) = \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{v}, \quad \cos(\bar{v}, y) = \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{v}, \quad \cos(\bar{v}, z) = \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{v}.$$

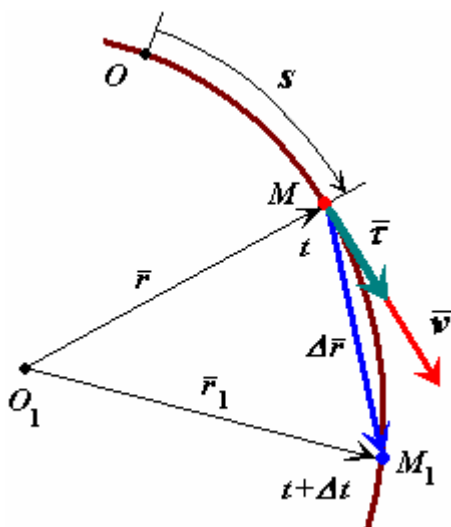
Скорость точки при естественном способе задания движения.

Скорость точки задана естественным способом, т.е. заданы траектория точки и закон ее движения по траектории $s = f(t)$ (рис. 31).

Скорость точки определяется следующим образом:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \dot{s},$$

$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$ - единичный вектор, направленный по касательной к траектории в сторону возрастающих расстояний.



$$\bar{v} = \dot{s} \cdot \bar{\tau}$$

При $ds > 0$ направления векторов $\bar{\tau}$ и $d\bar{r}$ совпадают. Если точка движется в сторону убывающих расстояний, то $ds < 0$ и направления векторов $\bar{\tau}$ и $d\bar{r}$ противоположны.

При $\dot{s} > 0$ вектор скорости направлен по $\bar{\tau}$, т.е. в сторону возрастающих расстояний; при $\dot{s} < 0$ он имеет направление, противоположное $\bar{\tau}$, т.е. в сторону убывающих расстояний.

Рис. 31

$\dot{s} = v_\tau$ - алгебраическая скорость точки, проекция скорости \bar{v} на положительное направление касательной к траектории.

Естественное задание движения точки полностью определяет скорость по величине и направлению.

11.4. Геометрические понятия

Кривизна и радиус кривизны кривой

Траектория точки является некоторой кривой линией в пространстве. В точке M кривой линии проведем касательную $M\tau$. В точке M_1 построим касательную $M_1\tau_1$. Между точками M и M_1 расстояние Δs , измеренное вдоль дуги.

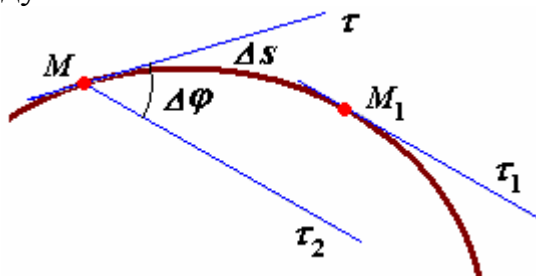


Рис. 32

В общем случае пространственной кривой касательные $M\tau$ и $M_1\tau_1$ будут скрещиваться. Проведем через точку M прямую линию $M\tau_2$, параллельную $M_1\tau_1$. Угол $\Delta\phi$ между линиями $M\tau$ и $M\tau_2$ называется **углом смежности** (рис. 32).

Кривизной кривой (обычно обозначается буквой k) в точке M называется предел отношения угла смежности к расстоянию Δs , при Δs стремящемся к нулю, т.е.

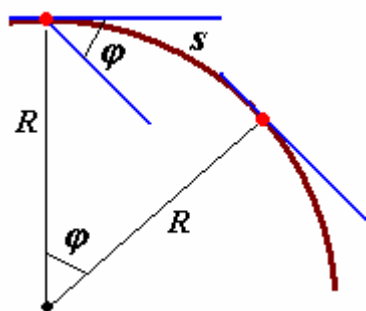


Рис. 33

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds}.$$

Радиусом кривизны кривой (обычно обозначается буквой ρ) в точке M называется величина, обратная кривизне кривой в этой точке, т.е.

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\phi}.$$

Радиус кривизны дуги окружности радиуса R равен R . Дуга окружности длиной s , опирается на центральный угол φ и равна $s = R \cdot \varphi$, следовательно $\rho = \frac{ds}{d\varphi} = R$ (рис. 33).

Оси естественного трехгранника

С кривой линией в точке M можно связать три оси - **естественные** оси этой кривой.

Первой естественной осью является касательная $M\tau$. Ее положительное направление совпадает с направлением единичного вектора $\bar{\tau}$.

Через пересекающиеся прямые $M\tau$ и $M\tau_2$ можно провести плоскость. Предельное положение этой плоскости при совпадении в пределе точек M и M_1 называется **соприкасающейся плоскостью кривой** в точке M .

В случае плоской кривой соприкасающаяся плоскость для всех точек кривой является сама плоскость, в которой расположена эта кривая.

Перпендикулярно касательной $M\tau$ располагается **нормальная плоскость** кривой. Нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости называется **главной нормалью**. По главной нормали Mn внутрь вогнутости кривой направим единичный вектор \bar{n} . Он определяет положительное направление второй оси. Нормаль, перпендикулярная главной нормали называется **бинормалью**. Положительное направление бинормали определяется единичным вектором $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$

Три взаимно перпендикулярные оси $M\tau$, Mn и Mb называются **естественными осями** кривой. Эти оси образуют в точке M **естественный трехгранник**.

11.5. Ускорение точки

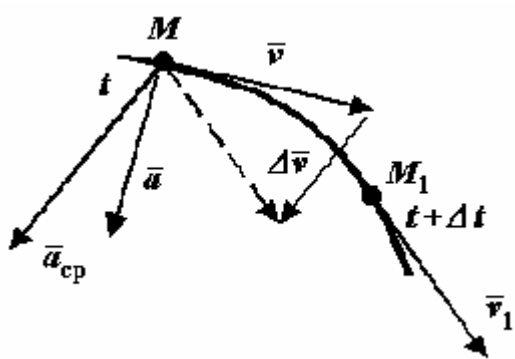


Рис. 34

Движущаяся точка M в момент времени t имеет скорость \bar{v} . В другой момент времени $t_1 = t + \Delta t$ эта точка будет занимать положение M_1 и иметь скорость \bar{v}_1 (рис. 34).

Чтобы изобразить приращение скорости $\Delta \bar{v}$ за время Δt , перенесем вектор \bar{v}_1 параллельно самому себе в точку M .

Средним ускорением точки \bar{a}_{cp} за время Δt называется отношение вектора приращения скорости $\Delta \bar{v}$ к изменению времени Δt ,

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}.$$

Ускорением точки \bar{a} в момент времени t называется предел к которому стремится среднее ускорение при Δt , стремящемся к нулю.

Ускорение точки равно первой производной по времени от скорости точки или второй производной по времени от радиус-вектора,

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overline{a_{cp}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}.$$

Ускорение точки в декартовых координатах

Ускорение точки раскладывается на составляющие, параллельные осям декартовой системы координат:

$$\bar{a}(t) = a_x(t) \cdot \bar{i} + a_y(t) \cdot \bar{j} + a_z(t) \cdot \bar{k}.$$

Проекции ускорения на оси координат определяются так:

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t), \quad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = \dot{v}_y(t) = \ddot{y}(t),$$

$$a_z(t) = \frac{dv_z(t)}{dt} = \dot{v}_z(t) = \ddot{z}(t)$$

Проекция ускорения точки на какую-либо координатную ось равна второй производной по времени от соответствующей координаты этой точки.

Модуль ускорения и направляющие косинусы равны:

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(\ddot{x})^2 + (\ddot{y})^2 + (\ddot{z})^2},$$

$$\cos(a, x) = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a}, \quad \cos(a, y) = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a}, \quad \cos(a, z) = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{a}.$$

Ускорение точки при естественном способе задания движения.

Ускорение точки раскладывается по осям естественного трехгранника (рис. 35):

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n,$$

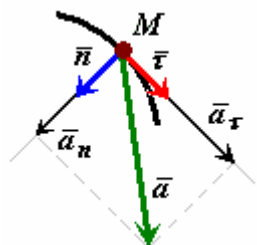


Рис. 35

Первое слагаемое $\bar{a}_\tau = \ddot{s} \cdot \bar{\tau}$ называется **касательным** (тангенциальным) ускорением.

Второе слагаемое $\bar{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n}$ называется **нормальным** (центростремительным) ускорением.

Нормальное ускорение всегда направлено внутрь вогнутости траектории, т.е. в сторону положительного направления единичного вектора главной нормали \bar{n} .

Формулы для проекции ускорения на естественные оси:

$$a_\tau = \ddot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a_\tau}{a_n}.$$

Касательная составляющая \bar{a}_τ , при $\ddot{s} > 0$ направлена по направлению вектора $\bar{\tau}$, при $\ddot{s} < 0$ противоположно $\bar{\tau}$.

Равномерным движением точки по траектории любой формы называется движение, при котором модуль скорости $v = \text{const}$.

Равнопеременным движением точки по траектории любой формы называется такое движение, при котором касательное ускорение постоянно, т.е. $a_\tau = \text{const}$. Движение называется **равноускоренным**, если алгебраическая скорость v_τ и касательное ускорение a_τ имеют одинаковые знаки. Если v_τ и a_τ имеют разные знаки, то движение называется **равнозамедленным**.

12. Степени свободы твердого тела

Число степеней свободы твердого тела называется число независимых параметров, которые однозначно определяют положение тела в пространстве относительно рассматриваемой системы отсчета.

Движение твердого тела во многом зависит от числа его степеней свободы.

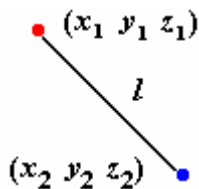


Рис. 36

Свободная материальная точка в пространстве имеет три степени свободы (рис. 36): например декартовы координаты x , y и z . Координаты точки могут определяться также в цилиндрической (r, φ, z) и сферической (r, φ, θ) системах отсчета, но число параметров, однозначно определяющих положение точки в пространстве всегда три.

Материальная точка на плоскости имеет две степени свободы. Если в плоскости выбрать систему координат xOy , то координаты x и y определяют положение точки на плоскости, а координата z тождественно равна нулю.

Свободная материальная точка на поверхности любого вида имеет две степени свободы. Например: положение точки на поверхности Земли определяется двумя параметрами: широтой и долготой.

Материальная точка на кривой любого вида имеет одну степень свободы. Параметром, определяющим положение точки на кривой, может быть, например, расстояние вдоль кривой от начала отсчета.

Рассмотрим две материальные точки в пространстве, соединенные жестким стержнем длины l (рис. 36). Положение каждой точки определяется тремя параметрами, но на них наложена связь.

Уравнение $l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ является уравнением связи. Из этого уравнения любая одна координата может быть выражена через остальные пять координат (пять независимых параметров). Поэтому эти две точки имеют $(2 \cdot 3 - 1 = 5)$ пять степеней свободы.

Рассмотрим три материальные точки в пространстве, не лежащие на одной прямой, соединенные тремя жесткими стержнями. Число степеней свободы этих точек равно $(3 \cdot 3 - 3 = 6)$ шести.

Свободное твёрдое тело в общем случае имеет 6 степеней свободы. Действительно, положение тела в пространстве относительно какой-либо системы отсчета, определяется заданием трех его точек, не лежащих на одной прямой, и расстояния между точками в твердом теле остаются неизменными при любых его движениях. Согласно выше сказанному, число степеней свободы должно быть равно шести.

13. Поступательное и вращательное движение твердого тела.

13.1. Поступательное движение твердого тела.

Поступательным движением твёрдого тела называется такое его движение, при котором любая прямая, жёстко скреплённая с телом, остаётся параллельной своему первоначальному положению в каждый момент времени.

Траектории точек у поступательно движущегося твердого тела могут быть не только прямыми, но и кривыми, в том числе окружностями.

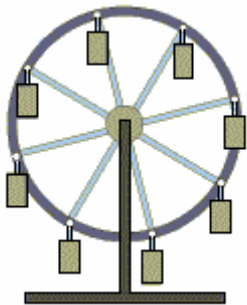


Рис. 37

Поступательно движутся педали велосипеда относительно его рамы во время движения, поршни в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания относительно цилиндров, кабины колеса обозрения в парках относительно Земли (рис. 37).

Траектории точек у поступательно движущегося твердого тела могут быть не только прямыми, но и кривыми, в том числе окружностями.

Теорема. При поступательном движении твёрдого тела траектории, скорости и ускорения всех точек твердого тела одинаковы.

Поступательное движение твёрдого тела полностью характеризуется движением одной любой его точки.

Твёрдое тело при поступательном движении имеет три степени свободы.

Для задания движения твердого тела в декартовой системе координат достаточно знать координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ любой его точки.

Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ называются **уравнениями поступательного движения твердого тела**.

13.2. Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращением твёрдого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором две точки тела остаются неподвижными в течение всего времени движения. При этом также остаются неподвижными все точки тела, расположенные на прямой, проходящей через его неподвижные точки. Эта прямая называется **осью вращения тела**.

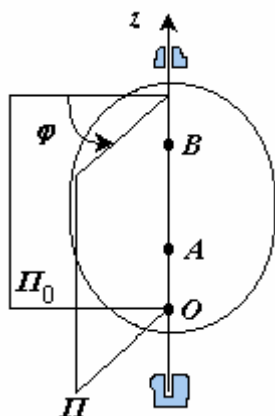


Рис. 38

Положение твердого тела определяется двугранным углом между плоскостями Π и Π_0 (рис. 38). Π_0 - неподвижная плоскость, проходящая через ось вращения тела, Π - подвижная плоскость, проходящая через ось вращения тела и жестко скреплённая с ним (при $t = 0$, $\Pi \rightarrow \Pi_0$).

Двугранный угол (φ) называется **углом поворота тела**. Положение тела относительно выбранной системы отсчета однозначно определяется в любой момент времени, если задано уравнение $\varphi = f(t)$, где $f(t)$ - любая дважды дифференцируемая функция времени.

Это уравнение называется **уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси**.

У тела, совершающего вращение вокруг неподвижной оси, одна степень свободы, так как его положение определяется заданием только одного параметра – угла поворота φ .

Угол φ считается положительным, если он откладывается против часовой стрелки, и отрицательным – в противоположном направлении. Траектории точек тела при его вращении вокруг неподвижной оси являются окружностями, расположенными в плоскостях перпендикулярных к оси вращения.

Для характеристики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси вводятся понятия угловой скорости и углового ускорения.

Алгебраической угловой скоростью тела в какой-либо момент времени называется первая производная по времени от угла поворота в этот момент, то

есть
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Угловая скорость является положительной величиной при вращении тела против часовой стрелки, так как угол поворота возрастает с течением времени, и отрицательной – при вращении тела по часовой стрелке, потому что угол поворота при этом убывает.

Размерность угловой скорости по определению:

$$[\omega] = \frac{\text{угол}}{\text{время}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}.$$

Алгебраическим угловым ускорением тела называется первая производная по времени от угловой скорости или вторая производная от угла поворота т.е. $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Размерность углового ускорения по определению:

$$[\varepsilon] = \frac{\text{угол}}{\text{время}^2} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}.$$

Введем понятия векторов угловой скорости и углового ускорения тела. $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$ и $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k}$, где \vec{k} - единичный вектор оси вращения. Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ можно изображать в любых точках оси вращения, они являются скользящими векторами.

Алгебраическая угловая скорость это проекция вектора угловой скорости на ось вращения. Алгебраическое угловое ускорение это проекция вектора углового ускорения скорости на ось вращения.

Угловую скорость и угловое ускорение на рисунках изображают дуговыми стрелками вокруг оси вращения (если нельзя изобразить вектора) (рис. 4-6). Дуговая стрелка для угловой скорости указывает направление вращения тела, а дуговая стрелка для углового ускорения – направление, в котором увеличивается алгебраическая угловая скорость. Для ускоренного вращения дуговые стрелки для угловой скорости и углового ускорения имеют одинаковые направления, для замедленного их направления противоположные.

Вращение называется **равномерным**, если его угловая скорость постоянна, т.е. $\omega = \text{const}$.

Вращение называется **равнопеременным**, если его угловое ускорение постоянно, т.е. $\varepsilon = \text{const}$.

Вращение называется **равноускоренным**, если его угловая скорость и угловое ускорение имеют одинаковый знак, т.е. $\omega \cdot \varepsilon > 0$.

Вращение называется **равнозамедленным**, его угловая скорость и угловое ускорение имеют разные знаки, т.е. $\omega \cdot \varepsilon < 0$.

13.3. Скорости и ускорения точек тела при вращении.

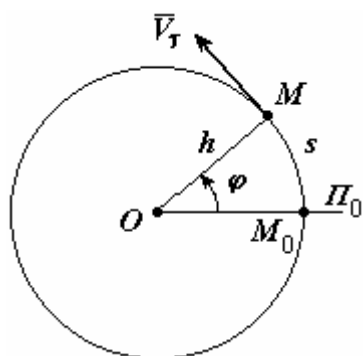


Рис. 39

Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси. Уравнение вращения имеет вид $\varphi(t)$.

Траектория точки M твердого тела окружность радиуса h , лежащая в плоскости, которая перпендикулярна оси вращения, а центр окружности O лежит на самой оси (рис. 39). Скорость точки M , находящейся на расстоянии h от оси вращения равна $\vec{v} = v_\tau \cdot \vec{\tau}$. $v_\tau = h \cdot \omega$ - алгебраическая скорость.

Скорость \vec{v} в отличие от угловой скорости тела называют **линейной** или **окружной скоростью**.

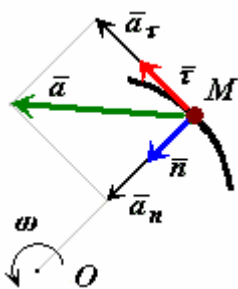


Рис. 40

Величины скоростей точек тела, при его вращении вокруг неподвижной оси, пропорциональны кратчайшим расстояниям от этих точек до оси. Коэффициентом пропорциональности является угловая скорость ω . Скорости точек направлены по касательным к траекториям и, следовательно, перпендикулярны радиусам вращения.

Ускорение точки раскладывается на касательную и нормальную составляющие (рис. 40):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Касательное и нормальное ускорения вычисляются по формулам

$$a_\tau = \ddot{s} = h \cdot \ddot{\varphi} = h \cdot \varepsilon, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{h^2 \cdot \omega^2}{h} = h \cdot \omega^2.$$

Таким образом $a_\tau = h \cdot \varepsilon$, $a_n = h \cdot \omega^2$ и модуль ускорения вычисляется по формуле $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$.

Касательные, нормальные и полные ускорения точек тела, при его вращении вокруг неподвижной оси, как и скорости, так же пропорциональны кратчайшим расстояниям от этих точек до оси. Нормальное ускорение направлено по радиусу окружности к оси вращения. Направление касательного ускорения зависит от знака углового ускорения.

14. Плоское движение твердого тела

14.1. Основные понятия

Плоским движением твердого тела называется такое его движение, при котором каждая его точка все время движется в одной и той же плоскости.

Плоскости, в которых движутся отдельные точки тела, параллельны между собой и параллельны одной и той же неподвижной плоскости. Плоское движение твердого тела часто называют плоскопараллельным. Траектории точек тела при плоском движении являются плоскими кривыми.

Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси является частным случаем плоского движения твердого тела.

При изучении плоского движения, как и любого другого, необходимо рассмотреть способы задания этого движения, а также приемы вычисления скоростей и ускорений точек тела.

При плоском движении твердого тела достаточно рассмотреть движение одного из сечений тела. Сечение твердого тела называется плоской фигурой.

14.2. Уравнения плоского движения твердого тела

Положение фигуры на ее плоскости полностью определяется положением отрезка прямой линии, жестко скрепленной с этой плоской фигурой. Для

задания положения плоской фигуры на плоскости относительно системы координат $O_1x_1y_1$, лежащей в плоскости фигуры, достаточно задать на этой плоскости положение отрезка AB , скрепленного с фигурой.

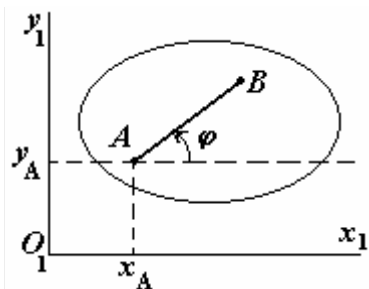


Рис. 41

Положение отрезка AB , относительно системы координат $O_1x_1y_1$ определяется заданием координат какой-нибудь точки этого отрезка и его направления (рис. 41). Например, координаты точки $A(x_A, y_A)$ и направление, заданное углом φ .

Уравнения движения плоской фигуры относительно системы координат $O_1x_1y_1$ имеют вид: $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$, $\varphi = \varphi(t)$.

Твердое тело при плоском движении имеет три степени свободы.

Функции $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ называются **уравнениями плоского движения твердого тела**.

Первые два уравнения определяют то движение, которое фигура совершала бы при $\varphi = const$ - это поступательное движение, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A .

Третье уравнение определяет движение, которое фигура совершала бы при $x_A = const$, $y_A = const$, т.е. когда полюс A неподвижен; это будет вращение вокруг полюса A .

Теорема. Движение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как складывающееся из поступательного движения, при котором все точки фигуры движутся так же, как полюс A , и из вращательного движения вокруг оси, перпендикулярной плоскости фигуры и проходящей через полюс A .

Основными кинематическими характеристиками рассматриваемого движения являются скорость и ускорение поступательного движения (\bar{v}_A , \bar{a}_A), а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращательного движения вокруг подвижной оси, проходящей через выбранный полюс.

Если угол поворота вокруг подвижной оси, проходящей через полюс, обозначить φ , то $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, а $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Можно также ввести понятие угловой скорости $\bar{\omega}$ и углового ускорения $\bar{\varepsilon}$. $\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{k}$ и $\bar{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \bar{k}$, где \bar{k} - единичный вектор, направленный по оси вращения.

Векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ можно изображать в любых точках подвижной оси вращения, т.е. они являются свободными векторами.

При изучении плоского движения в качестве полюса можно выбирать любую точку фигуры.

14.3. Уравнения движения отдельной точки твердого тела

Положение любой точки M плоской фигуры относительно подвижной системы отсчета Oxy , скрепленной с этой движущейся фигурой и лежащей в ее плоскости, полностью определяется заданием координат x и y точки M и уравнениями движения плоской фигуры (рис. 42).

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_0 + x \cdot \cos(\varphi) - y \cdot \sin(\varphi) \\ y_1 &= y_0 + x \cdot \sin(\varphi) + y \cdot \cos(\varphi) \end{aligned} \right\},$$

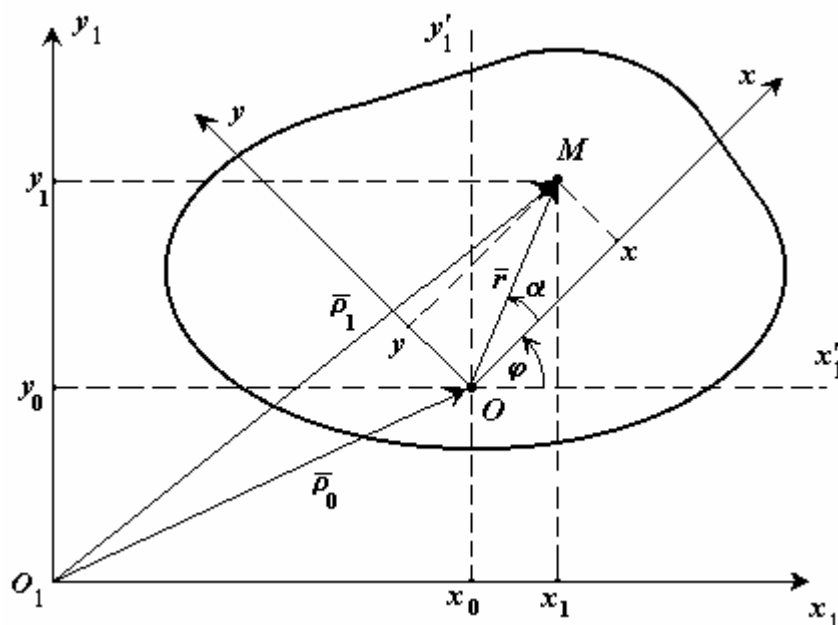


Рис. 42

Формулы являются уравнениями движения точки M плоской фигуры относительно координат $O_1x_1y_1$. Эти формулы позволяют определить координаты любой точки плоской фигуры по заданным уравнениям движения этой фигуры и координатам этой точки относительно подвижной системы отсчета, скрепленной с движущейся фигурой.

14.4. Скорости точек тела при плоском движении

Теорема. Скорость какой-либо точки фигуры при ее плоском движении равна векторной сумме скорости полюса и относительной скорости этой точки от вращения фигуры вокруг полюса.

$$\overline{v_B} = \overline{v_{Be}} + \overline{v_{Br}},$$

где $\overline{v_B}$ - абсолютная скорость точки B плоской фигуры; $\overline{v_{Be}}$ - переносная скорость точки B равная скорости поступательного движения плоской фигуры вместе, например, с точкой A этой фигуры; $\overline{v_{Br}}$ - скорость точки B в

относительном движении, которым является вращение плоской фигуры вокруг точки A с угловой скоростью ω (рис. 43).

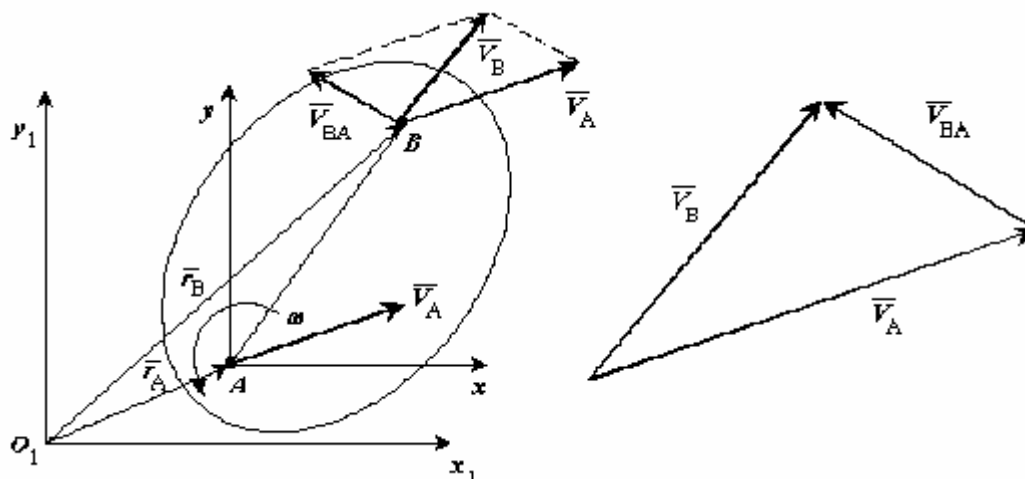


Рис. 43

Скорость относительного движения, в случае когда оно является вращательным движением, равна $v_{Br} = \omega \cdot AB$

Скорость $\overline{v_{Br}}$ расположена в плоскости движущейся фигуры и направлена перпендикулярно отрезку AB , соединяющему точку B с полюсом A .

14.5. Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Теорема. В каждый момент времени при плоском движении фигуры в ее плоскости при $\omega \neq 0$ (непоступательное движение), имеется один единственный центр скоростей.

Мгновенный центр скоростей это единственная точка плоской фигуры для данного момента времени. В другой момент времени мгновенным центром скоростей будет уже другая точка.

Скорости точек плоской фигуры определяются в данный момент так, как если бы движение фигуры было вращением вокруг мгновенного центра скоростей.

Скорости точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра скоростей.

Способы нахождения положения мгновенного центра скоростей

1). Известен вектор скорости $\overline{v_A}$ какой-либо точки A плоской фигуры и ее угловая скорость $\omega \neq 0$ (рис. 44).

МЦС (точка P) находится на перпендикуляре к вектору $\overline{v_A}$, проведенном через точку A . Расстояние $PA = \frac{v_A}{\omega}$ и откладывается в сторону, которую

указывает вектор \vec{v}_A после поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ в направлении дуговой стрелки ω . При этом получается, что скорость

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA} = \vec{v}_A - \vec{v}_A = 0, \quad (v_{PA} = \omega \cdot PA = v_A).$$

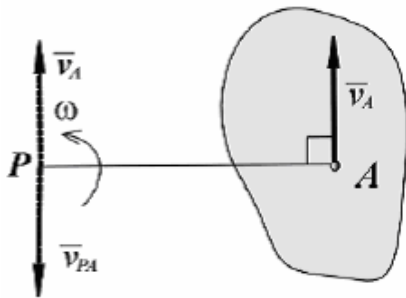


Рис. 44

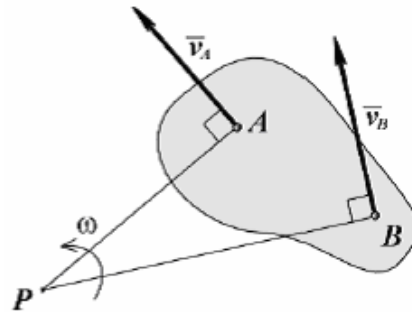


Рис. 45

2). Известны не параллельные друг другу скорости \vec{v}_A и \vec{v}_B двух точек плоской фигуры (рис. 45).

МЦС (точка P) находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных через точки A и B к скоростям этих точек. Угловая скорость плоской фигуры равна $\omega = v_A / PA = v_B / PB$. Отметим, что для нахождения только положения МЦС достаточно знать лишь направления скоростей двух точек.

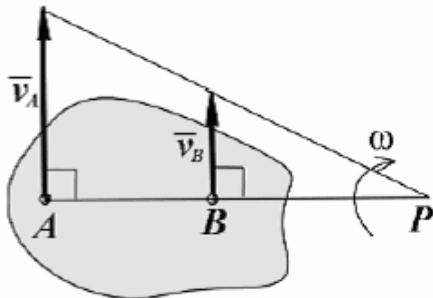


Рис. 46

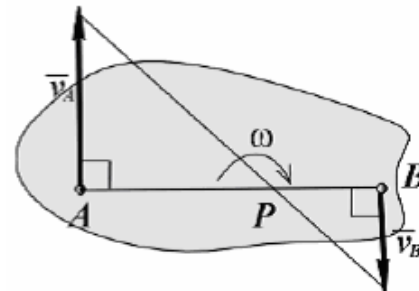


Рис. 47

3). Известны параллельные друг другу скорости \vec{v}_A и \vec{v}_B точек A и B плоской фигуры, перпендикулярные отрезку AB , направленные в одну сторону и не равные по модулю ($v_A \neq v_B$) (рис. 46).

МЦС (точка P) находится в точке пересечения продолжения отрезка AB и прямой, проведенной через концы векторов \vec{v}_A и \vec{v}_B . При заданной длине отрезка AB расстояния от МЦС до точек A и B определяются из пропорции $v_A : v_B = PA : PB$.

$$PB = \frac{v_B \cdot PA}{v_A - v_B}.$$

Угловая скорость фигуры $\omega = v_A / PA = v_B / PB$.

Случай равенства ($\vec{v}_A = \vec{v}_B$) см. п. 6

4). Известны параллельные друг другу скорости \vec{v}_A и \vec{v}_B точек A и B плоской фигуры, перпендикулярные отрезку AB , направленные в разные стороны (рис. 47).

МЦС (точка P) находится в точке пересечения отрезка AB и прямой, проведенной через концы векторов \vec{v}_A и \vec{v}_B . При заданной длине отрезка AB расстояния от МЦС до точек A и B определяются из пропорции: $v_A : v_B = PA : PB$.

$$PB = \frac{v_B \cdot AB}{v_A + v_B}.$$

Угловая скорость фигуры $\omega = v_A / PA = v_B / PB$.

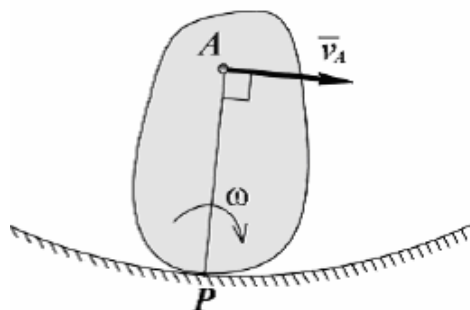


Рис. 48

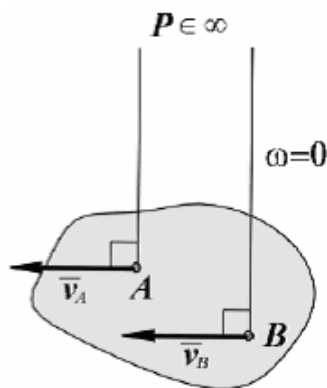


Рис. 49

5). Плоская фигура катится без скольжения по неподвижной кривой.

МЦС (точка P) находится в точке соприкосновения фигуры с кривой, так как скорости точек фигуры и неподвижной кривой, находящиеся в соприкосновении, равны между собой и, следовательно, равны нулю (рис. 48). Если известна скорость какой-либо точки A фигуры, то угловая скорость $\omega = v_A / PA$.

6). Известно, что скорости \vec{v}_A и \vec{v}_B двух точек плоской фигуры параллельны друг другу и не перпендикулярны отрезку AB (рис. 49).

МЦС в данный момент времени не существует или, другими словами, находится в бесконечности. Угловая скорость плоской фигуры в данный момент равна нулю. Движение фигуры называется мгновенно-поступательным. Скорости всех точек фигуры равны $\vec{v}_A = \vec{v}_B$. Аналогичный результат показан в п. 4.

14.6. Ускорения точек тела при плоском движении

Теорема. Ускорение какой-либо точки плоской фигуры при плоском движении равно векторной сумме ускорения полюса и ускорения этой точки от вращательного движения плоской фигуры вокруг полюса.

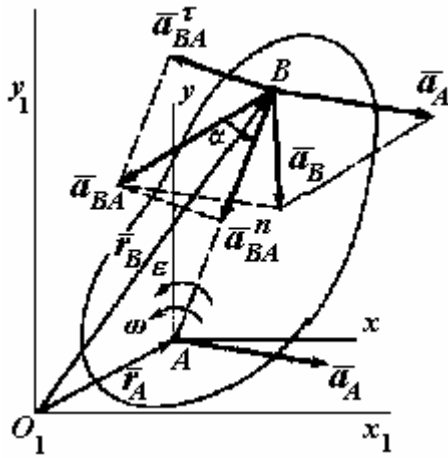


Рис. 50

$$\overline{a_B} = \overline{a_{Be}} + \overline{a_{Br}}.$$

Относительное ускорение $\overline{a_{Br}}$ точки B от вращения вокруг полюса A обозначим $\overline{a_{BA}}$

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}}$$

Ускорение от относительного вращательного движения вокруг полюса, как и в случае вращения тела вокруг неподвижной оси, состоит из касательной и нормальной составляющих $\overline{a_{BA}^\tau}$ и $\overline{a_{BA}^n}$:

$$\overline{a_{BA}} = \overline{a_{BA}^\tau} + \overline{a_{BA}^n}$$

причем

$$a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot AB, \quad a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB$$

и

$$a_{BA} = \sqrt{(a_{BA}^\tau)^2 + (a_{BA}^n)^2} = AB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Касательное относительное ускорение $\overline{a_{BA}^\tau}$ направлено по перпендикуляру к отрезку AB в сторону дуговой стрелки углового ускорения ε . Нормальное относительное ускорение $\overline{a_{BA}^n}$ соответственно направлено по линии AB от точки B к полюсу A . Наконец, полное относительное ускорение $\overline{a_{BA}}$ составляет с отрезком AB угол α , тангенс которого можно определить по формуле

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\overline{a_{BA}^\tau}}{\overline{a_{BA}^n}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Угол α для всех точек плоской фигуры одинаков. При $\ddot{\varphi} > 0$ угол α от ускорения $\overline{a_{BA}}$ к отрезку BA надо откладывать против часовой стрелки. При $\ddot{\varphi} < 0$ его надо откладывать по часовой стрелке, т. е. во всех случаях, независимо от направления вращения фигуры, угол α всегда надо откладывать в направлении дуговой стрелки углового ускорения. В соответствии с полученными формулами можно построить в выбранном масштабе многоугольник ускорений для точки B .

14.7. Мгновенный центр ускорений

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.

Теорема. В каждый момент времени при плоском движении фигуры в ее плоскости, если ω и ε не равны нулю одновременно, имеется единственная точка этой фигуры, ускорение которой равно нулю.

15. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки.

Вращением твердого тела вокруг неподвижной точки называют такое движение, при котором одна точка тела остается все время неподвижной.

Это движение часто называют сферическим движением твердого тела потому, что траектории всех точек тела при таком движении располагаются на поверхностях сфер.

Тело имеет три степени свободы, т.к. закрепление одной точки тела уменьшает число степеней свободы на три единицы ($6 - 3 = 3$).

15.1. Углы Эйлера

Положение подвижной системы координат относительно неподвижной определяется тремя углами (рис. 51). Угол прецессии ψ (пси), угол нутации θ (тета) и угол собственного вращения φ (фи).

Линия пересечения подвижной плоскости xOy с неподвижной x_1Oy_1 называется **линией узлов**. Угол прецессии ψ определяет положение линии узлов на неподвижной плоскости x_1Oy_1 .

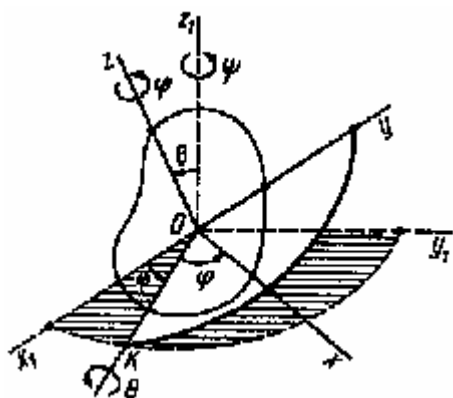


Рис. 51

Для изменения этого угла тело должно вращаться вокруг оси Oz_1 , которую называют **осью прецессии**. Угол нутации θ - это угол между осями Oz_1 и Oz . При изменении угла θ происходит поворот тела вокруг линии узлов, которую также называют **осью нутации**.

Угол собственного вращения φ - это угол между линией узлов и подвижной осью Ox . При изменении угла φ тело вращается вокруг оси Oz (оси собственного вращения).

Для определения положения тела с одной неподвижной точкой в любой момент времени необходимо задать углы Эйлера как однозначные функции времени, т.е.

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Эти **уравнения** называются уравнениями **вращения твердого тела вокруг неподвижной точки**.

Твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, можно из одного положения перевести путем поворота в другое, бесконечно близкое первому. Поворот осуществляется вокруг оси, которую называют мгновенной осью вращения (или мгновенной осью) для данного момента времени.

15.2. Угловая скорость и угловое ускорение тела

Так как движение тела, имеющего одну неподвижную точку, в каждый момент времени можно считать вращением вокруг мгновенной оси, то в качестве величин, характеризующих это движение, вводятся понятия: мгновенная угловая скорость и мгновенное угловое ускорение вращения

твердого тела вокруг неподвижной точки. Вводимая угловая скорость является векторной величиной, направленной в каждый момент времени по соответствующей мгновенной оси, и при использовании правой системы координат вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по мгновенной оси так, что с направления этого вектора видно вращение тела вокруг мгновенной оси против часовой стрелки. Модуль вектора угловой скорости выражается через элементарный угол поворота $\Delta\varphi$ вокруг мгновенной оси за время Δt :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta\varphi|}{\Delta t}.$$

Элементарный угол поворота $\Delta\varphi$, аналогично случаю вращения тела вокруг неподвижной оси, следует рассматривать как угол между двумя положениями в моменты t и $t + \Delta t$ подвижной плоскости, скрепленной с телом и проходящей через мгновенную ось в момент времени t .

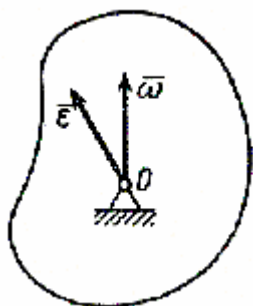


Рис. 52

Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ характеризует угловую скорость вращения вокруг мгновенной оси, направление мгновенной оси и направление вращения тела вокруг этой оси. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ можно прикладывать в любой точке мгновенной оси (рис. 52).

За вектор углового ускорения $\vec{\epsilon}$ при вращении тела вокруг неподвижной точки принимают вектор, который

характеризует изменение угловой скорости $\vec{\omega}$ в данный момент как по числовой величине, так и по направлению. Такой характеристикой является производная по времени от вектора угловой скорости $\vec{\omega}$, угловое ускорение $\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. Так как угловая скорость может изменяться по модулю и направлению, то в общем случае угловое ускорение не направлено по мгновенной оси, а имеет направление как производная по времени от вектора $\vec{\omega}$.

16. Движение свободного твердого тела

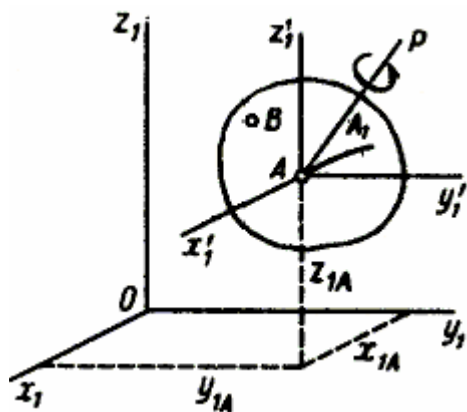


Рис. 53

Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы и может перемещаться как угодно по отношению к неподвижной системе отсчета $x_1 O y_1$. Движение свободного твердого тела можно представить состоящим из поступательного движения вместе с какой-либо точкой тела A (полюсом) и вращательного движения вокруг этой точки A .

Поступательное движение задается уравнениями: $x_A(t)$, $y_A(t)$, $z_A(t)$.

Для определения вращательного движения вокруг этой точки A необходимо задать углы Эйлера как однозначные функции времени:

$$\psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Уравнения движения свободного твердого тела имеют вид:

$$x_A(t), \quad y_A(t), \quad z_A(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

Геометрическая картина движения свободного твердого тела показана на рис. 54.

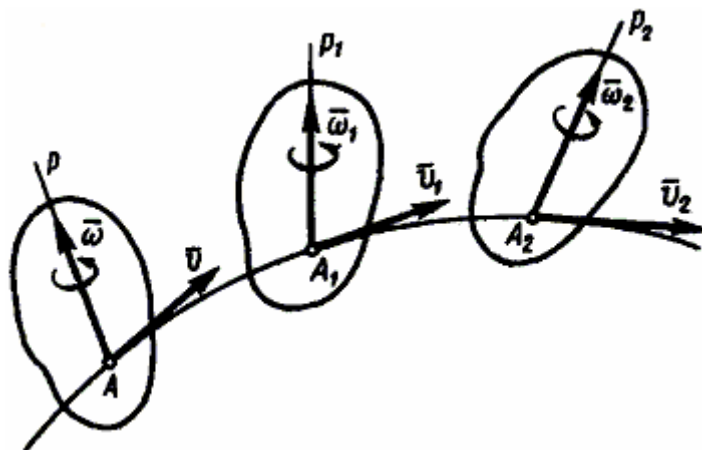


Рис 54

17. Сложное движение точки

17.1. Основные понятия

Во многих задачах движение точки приходится рассматривать относительно двух (и более) систем отсчета, движущихся друг относительно друга.

Движение точки одновременно по отношению к двум системам отсчета, из которых одна считается основной (абсолютной) и условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой, называется составным или **сложным** (рис. 55).

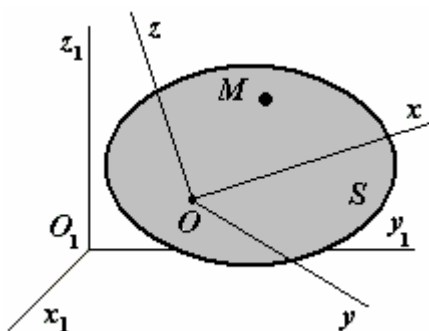


Рис. 55

Движение точки относительно подвижной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$ называется **относительным**. Кинематические характеристики этого движения, такие как: траектория, скорость и ускорение, называются **относительными**. Их обозначают нижним индексом r .

Любая система отсчета (в том числе и подвижная) обычно связывается с некоторым твердым телом, носителем этой системы отсчета.

Движение точки относительно основной (неподвижной) системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ называется **абсолютным**. Траектория, скорость и ускорение этого движения называются **абсолютными**. Их обозначают без индекса.

Переносным движением точки называется движение, которое она совершает вместе с подвижной системой отсчета, как точка, жестко

скрепленная с этой системой в рассматриваемый момент времени. Вследствие относительного движения движущаяся точка в различные моменты времени совпадает с различными точками тела S , с которым скреплена подвижная система отсчета. **Переносной** скоростью и **переносным** ускорением являются скорость и ускорение той точки тела S , с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. **Переносные** скорость и ускорение обозначают нижним индексом e .

Пример. 5

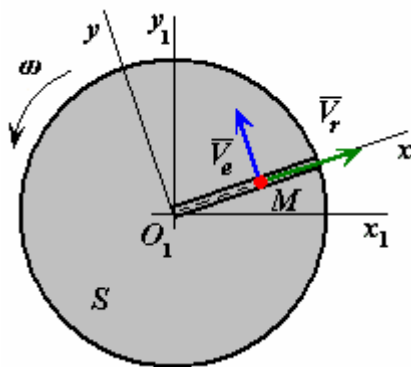


Рис. 56

Имеется круглый диск, который вращается с постоянной угловой скоростью вокруг оси перпендикулярной плоскости диска. На диске имеется канавка, направленная вдоль радиуса диска (рис. 56). Вдоль канавки перемещается материальная точка. Материальная точка совершает сложное движение. Движение точки относительно неподвижной системы отсчета является абсолютным.

Подвижную систему отсчета жестко свяжем с вращающимся диском (S), одну из осей (например, x) направим вдоль канавки. Движение точки вдоль оси x будет относительным, движение точки вместе с подвижной системой отсчета (вместе с диском) будет переносным движением.

17.2. Теоремы о сложении скоростей и ускорений

Теорема о сложении скоростей

При сложном движении **абсолютная скорость** точки равна векторной сумме ее **переносной** и **относительной** скоростей:

$$\overline{v} = \overline{v_e} + \overline{v_r},$$

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2 \cdot v_e \cdot v_r \cdot \cos(\overline{v_e}, \overline{v_r})}$$

Теорема о сложении ускорений

(Кинематическая теорема Кориолиса)

При сложном движении **абсолютное ускорение** точки равно векторной сумме трех ускорений: **переносного**, **относительного** и **кориолисова** (Гюстав Кориолис) или поворотного:

$$\overline{a} = \overline{a_e} + \overline{a_r} + \overline{a_{кор}}.$$

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости (угловой скорости подвижной системы отсчета) на относительную скорость точки:

$$\overline{a_{кор}} = 2 \cdot \overline{\omega} \times \overline{v_r}.$$

Случай поступательного переносного движения. В этом случае $\overline{\omega} = 0$ и, следовательно, $\overline{a}_{кор} = 0$.

При поступательном переносном движении **абсолютное ускорение** точки равно векторной сумме **переносного и относительного** ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r.$$

Случай параллельности вектора переносной угловой скорости и вектора относительной скорости точки. В этом случае $\overline{\omega} \times \overline{v}_r = 0$ и, следовательно, $\overline{a}_{кор} = 0$.

При параллельности вектора переносной угловой скорости и вектора относительной скорости точки **абсолютное ускорение** точки равно векторной сумме **переносного и относительного** ускорений:

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r. \quad a_{кор} = 2 \cdot |\omega| \cdot |v_r| \cdot \sin(\alpha)$$

Вычисление кориолисова ускорения (рис. 57):

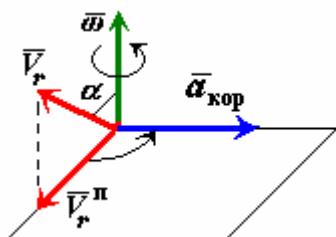


Рис. 57

Модуль кориолисова ускорения равен

$$a_{кор} = 2 \cdot |\omega| \cdot |v_r| \cdot \sin(\alpha).$$

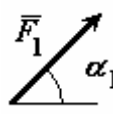

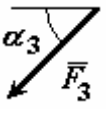
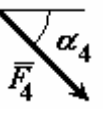
Направление определяется поворотом вектора \overline{v}_r^n на 90 градусов в сторону переносного вращения.

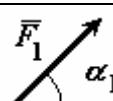
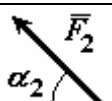
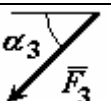
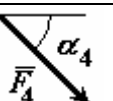
Контрольная работа №1

Задача С1. Определение опорных реакций.

Жесткая рама, показанная на Рис. С1.1 - С1.6, закреплена в точке А шарнирно-неподвижно, а в точке В шарнирно-подвижно. На раму действует пара сил с моментом $M = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}$ и две силы \vec{F}_i и \vec{F}_j (номер, величина, направление и точка приложения приведены в таблице С1). $a = 0.5 \text{ м}$.
Определить реакции связей (опорные реакции) в точках А и В.

Таблица С1.

Номер варианта	Сила								Номер рисунка
									
	$F_1=10\text{ H}$		$F_2=20\text{ H}$		$F_3=30\text{ H}$		$F_4=40\text{ H}$		
	Точка приложения	α_1°	Точка приложения	α_2°	Точка приложения	α_3°	Точка приложения	α_4°	
1	-	-	D	60	E	45	-	-	C1.1
2	K	30	-	-	-	-	H	60	C1.1
3	-	-	H	45	K	30	-	-	C1.1
4	D	60	-	-	-	-	E	30	C1.1
5	-	-	K	30	E	60	-	-	C1.1
6	H	60	-	-	D	30	-	-	C1.2
7	-	-	E	30	-	-	K	45	C1.2
8	D	45	-	-	H	60	-	-	C1.2
9	-	-	H	60	-	-	D	30	C1.2
10	E	30	-	-	-	-	K	60	C1.2
11	-	-	D	60	E	45	-	-	C1.3
12	K	30	-	-	-	-	H	60	C1.3
13	-	-	H	45	K	30	-	-	C1.3
14	D	60	-	-	-	-	E	30	C1.3
15	-	-	K	30	E	60	-	-	C1.3
16	H	60	-	-	D	30	-	-	C1.4
17	-	-	E	30	-	-	K	45	C1.4
18	D	45	-	-	H	60	-	-	C1.4
19	-	-	H	60	-	-	D	30	C1.4
20	E	30	-	-	-	-	K	60	C1.4
21	-	-	D	60	E	45	-	-	C1.5
22	K	30	-	-	-	-	H	60	C1.5

Номер варианта	Сила								Номер рисунка
									
	$F_1=10\ H$		$F_2=20\ H$		$F_3=30\ H$		$F_4=40\ H$		
	Точка приложения	α_1°	Точка приложения	α_2°	Точка приложения	α_3°	Точка приложения	α_4°	
23	-	-	H	45	K	30	-	-	C1.5
24	D	60	-	-	-	-	E	30	C1.5
25	-	-	K	30	E	60	-	-	C1.5
26	H	60	-	-	D	30	-	-	C1.6
27	-	-	E	30	-	-	K	45	C1.6
28	D	45	-	-	H	60	-	-	C1.6
29	-	-	H	60	-	-	D	30	C1.6
30	E	30	-	-	-	-	K	60	C1.6

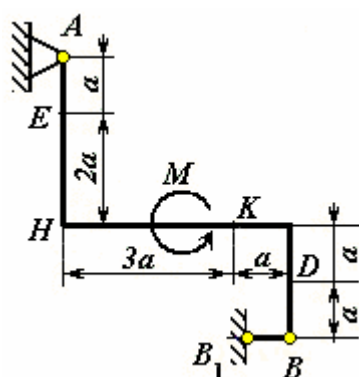


Рис. С1.1

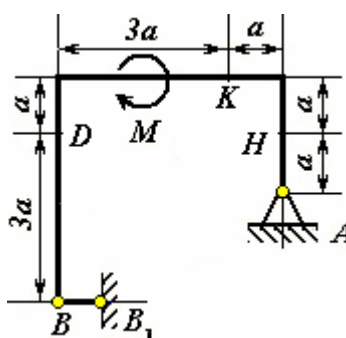


Рис. С1.2

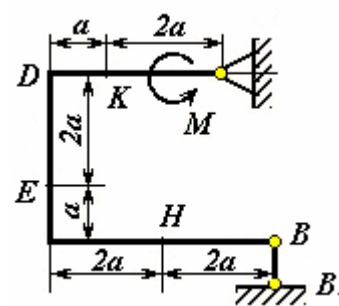


Рис. С1.3

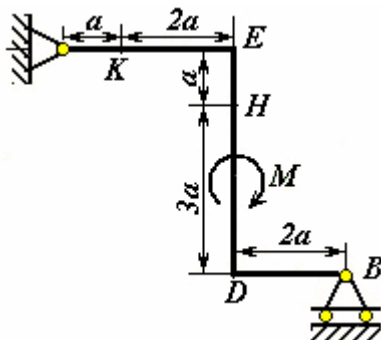


Рис. С1.4

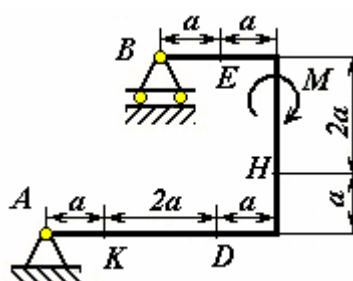


Рис. С1.5

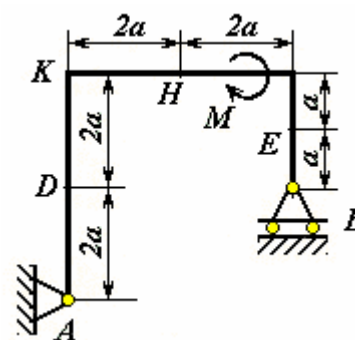


Рис. С1.6

Указания. Задача С1 – на равновесие тела под действием плоской системы сил. На исходном рисунке изображаем заданные для Вашего варианта

силы. Изображаем оси координат xOy . Согласно аксиоме о связях в точках А и В вместо связей изображаем силы реакции связей. Неизвестную силу реакции связи \overline{R}_A раскладываем на составляющие, параллельные осям координат. Неизвестную силу реакции связи \overline{R}_B направляем по нормали к опорной поверхности или вдоль отрезка BB_1 . Записываем условия равновесия для плоской системы сил. Составляя уравнения равновесия, учесть, что уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей (в данном случае относительно точки А). При вычислении момента силы \overline{F} часто удобно разложить ее на составляющие \overline{F}' и \overline{F}'' , для которых плечи легко вычисляются, в частности, на составляющие, параллельные координатным осям, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $M_o(\overline{F}) = M_o(\overline{F}') + M_o(\overline{F}'')$.

Пример С1. Жесткая рама, показанная на рис. С1.7, закреплена в точке А шарнирно-неподвижно, а в точке В шарнирно-подвижно. На раму действует пара сил с моментом М и две силы (\overline{F}_1 и \overline{F}_4) в точках Н и К.

$M = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}$; $F_1 = 10 \text{ Н}$; $F_4 = 40 \text{ Н}$; $\alpha_1 = 30^\circ$; $\alpha_4 = 60^\circ$, $a = 0.5 \text{ м}$

Определить реакции связей в точках А и В.

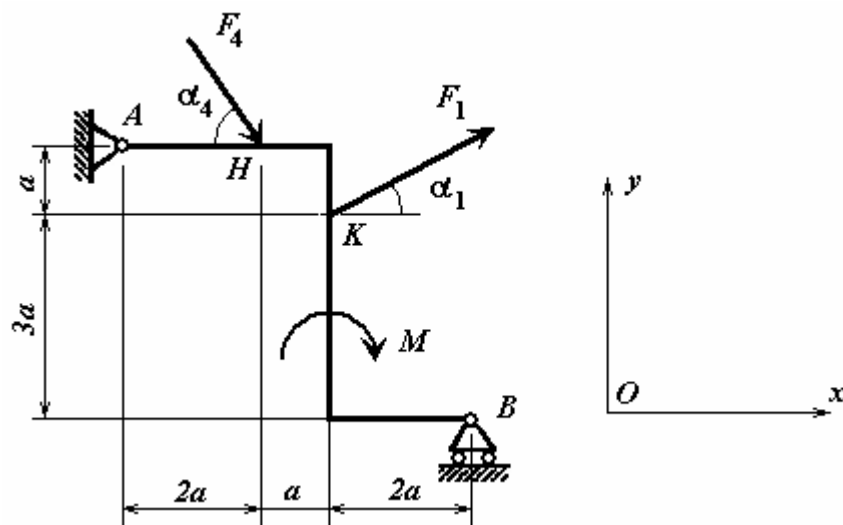


Рис. С1.7

Решение: Рассмотрим равновесие рамы.

1. Вводим оси координат xOy .

2. Отбрасываем связи. Действие связей заменяем силами реакции связей. В точке А шарнирно-неподвижная опора. Неизвестную силу реакции связи \overline{R}_A раскладываем на составляющие, параллельные осям координат. $\overline{R}_A = \overline{X}_A + \overline{Y}_A$. В точке В шарнирно-подвижная опора. Неизвестную силу реакции связи \overline{R}_B направляем по нормали к опорной поверхности (рис. С1.8).

3. Силы $\overline{F_1}$ и $\overline{F_4}$ раскладываем на составляющие, параллельные осям координат. $\overline{F_1} = \overline{F_1'} + \overline{F_1''}$; $\overline{F_4} = \overline{F_4'} + \overline{F_4''}$;
 $\overline{F_1'} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 10 \cdot 0.866 = 8.66$; $\overline{F_1''} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 10 \cdot 0.5 = 5.00$;
 $\overline{F_4'} = F_4 \cdot \cos \alpha_4 = 40 \cdot 0.5 = 20.00$; $\overline{F_4''} = F_4 \cdot \sin \alpha_4 = 40 \cdot 0.866 = 34.641$.

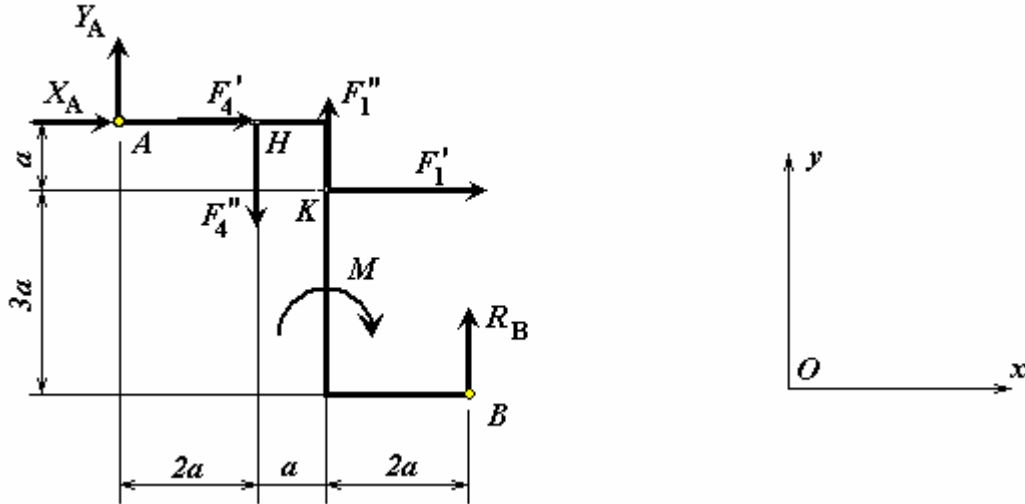


Рис. С1.8

4. Записываем условия равновесия плоской системы сил.

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_A + F_1' + F_4' = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_A + R_B + F_1'' - F_4'' = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A(\overline{F_i}) = 0; \quad R_B \cdot 5a + F_1'' \cdot 3a + F_1' \cdot a - F_4'' \cdot 2a - M = 0 \quad (3)$$

5. Решаем систему 3-х алгебраических уравнений.

Из уравнения (1) следует $X_A = -F_1' - F_4'$; $X_A = -8.66 - 20. = -20.66$ (Н)

Из уравнения (3) следует $R_B = \frac{M + F_4'' \cdot 2a - F_1' \cdot a - F_1'' \cdot 3a}{5a}$;

$$R_B = \frac{60 + 34.641 \cdot 1 - 8.66 \cdot 0.5 - 5 \cdot 1.5}{5 \cdot 0.5} = 33.124 \text{ (Н)}$$

Из уравнения (2) следует $Y_A = F_4'' - R_B - F_1''$;

$$Y_A = 34.641 - 33.124 - 5 = 3.483 \text{ (Н)}$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}; \quad R_A = \sqrt{(-20.66)^2 + (3.483)^2} = 20.95 \text{ (Н)}$$

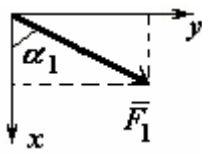
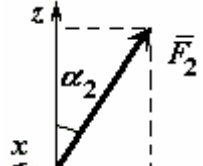
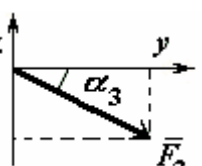
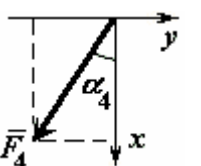
Ответ: $X_A = -20.66$ Н; $Y_A = 3.483$ Н; $R_A = 20.95$ Н; $R_B = 33.124$ Н.

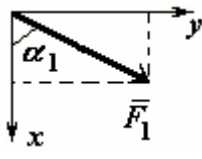
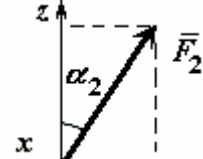
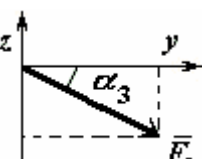
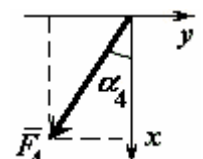
Задача С2. Определение опорных реакций.

Однородная прямоугольная плита весом $P = 3 \text{ кН}$ со сторонами $AB = 3a$, $BC = 2a$ закреплена в точке А сферическим, а в точке В цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC' (Рис. С2.1 – С2.6). На плиту действует пара сил с моментом $M = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, лежащая в плоскости плиты, и две силы \vec{F}_i и \vec{F}_j . Номера, величины, направление и точки приложения этих сил приведены в таблице С2). Точки приложения сил (D, E, H) находятся на серединах сторон плиты.

Определить реакции связей (опорные реакции) в точках А, В и С. При подсчетах принять $a = 0.8 \text{ м}$.

Таблица С2.

Номер варианта	Сила								Номер рисунка
									
	$F_1=4\text{ кН}$		$F_2=6\text{ кН}$		$F_3=8\text{ кН}$		$F_4=10\text{ кН}$		
	Точка приложения	α_1°	Точка приложения	α_2°	Точка приложения	α_3°	Точка приложения	α_4°	
1	D	60	-	-	E	0	-	-	C2.1
2	H	90	D	30	-	-	-	-	C2.1
3	-	-	E	60	-	-	D	90	C2.1
4	-	-	-	-	E	30	H	0	C2.1
5	E	0	-	-	H	60	-	-	C2.1
6	-	-	D	60	H	0	-	-	C2.2
7	-	-	H	30	-	-	D	90	C2.2
8	E	30	H	90	-	-	-	-	C2.2
9	-	-	-	-	D	0	E	60	C2.2
10	-	-	E	90	D	30	-	-	C2.2
11	D	60	-	-	E	0	-	-	C2.3
12	H	90	D	30	-	-	-	-	C2.3
13	-	-	E	60	-	-	D	90	C2.3
14	-	-	-	-	E	30	H	0	C2.3
15	E	0	-	-	H	60	-	-	C2.3
16	-	-	D	60	H	0	-	-	C2.4
17	-	-	H	30	-	-	D	90	C2.4

Номер варианта	Сила								Номер рисунка
									
	$F_1=10\text{ H}$		$F_2=20\text{ H}$		$F_3=30\text{ H}$		$F_4=40\text{ H}$		
	Точка приложения	α_1°	Точка приложения	α_2°	Точка приложения	α_3°	Точка приложения	α_4°	
18	E	30	H	90	-	-	-	-	C2.4
19	-	-	-	-	D	0	E	60	C2.4
20	-	-	E	90	D	30	-	-	C2.4
21	D	60	-	-	E	0	-	-	C2.5
22	H	90	D	30	-	-	-	-	C2.5
23	-	-	E	60	-	-	D	90	C2.5
24	-	-	-	-	E	30	H	0	C2.5
25	E	0	-	-	H	60	-	-	C2.5
26	-	-	D	60	H	0	-	-	C2.6
27	-	-	H	30	-	-	D	90	C2.6
28	E	30	H	90	-	-	-	-	C2.6
29	-	-	-	-	D	0	E	60	C2.6
30	-	-	E	90	D	30	-	-	C2.6

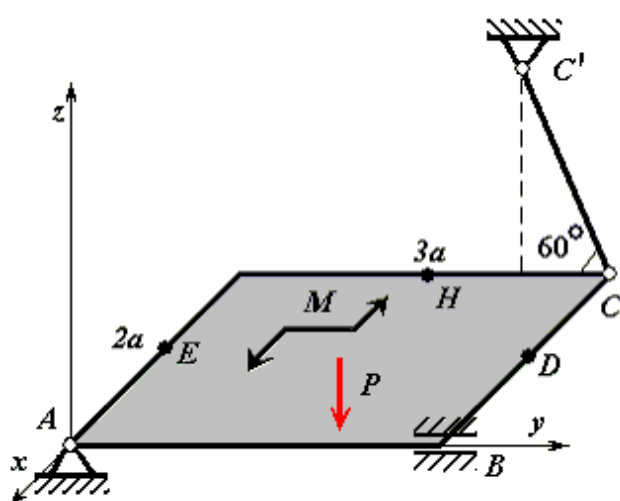


Рис. С2.1

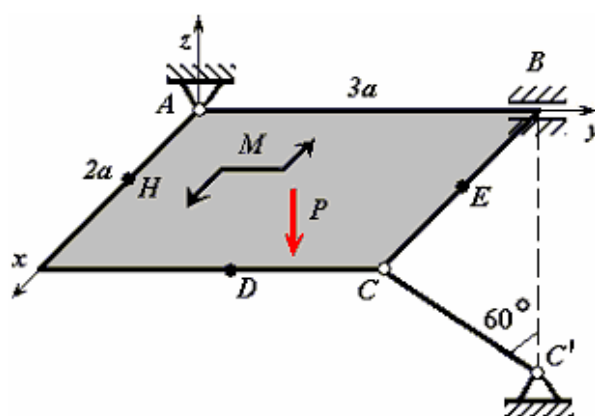


Рис. С2.2

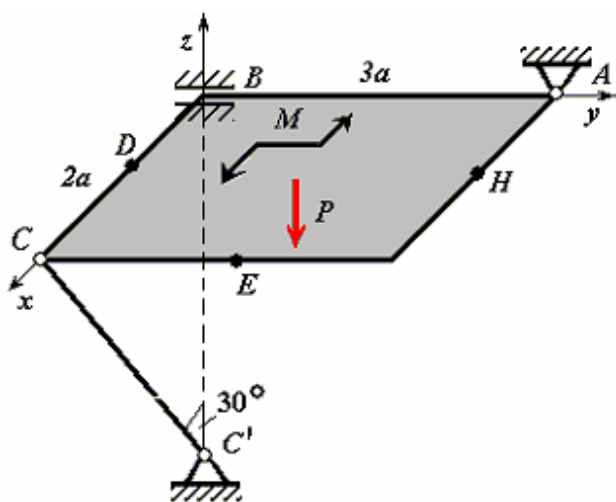


Рис. С2.3

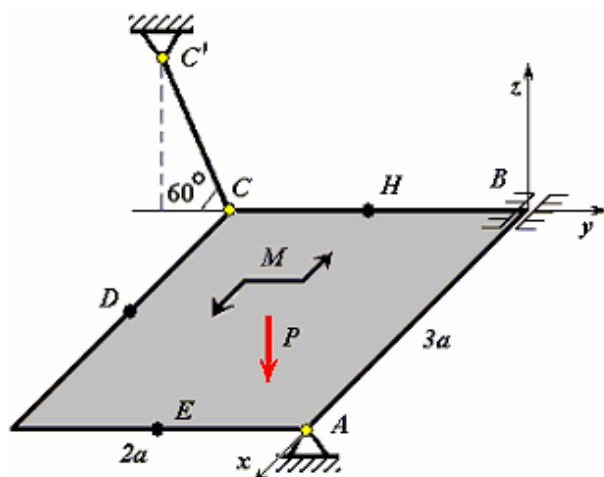


Рис. С2.4

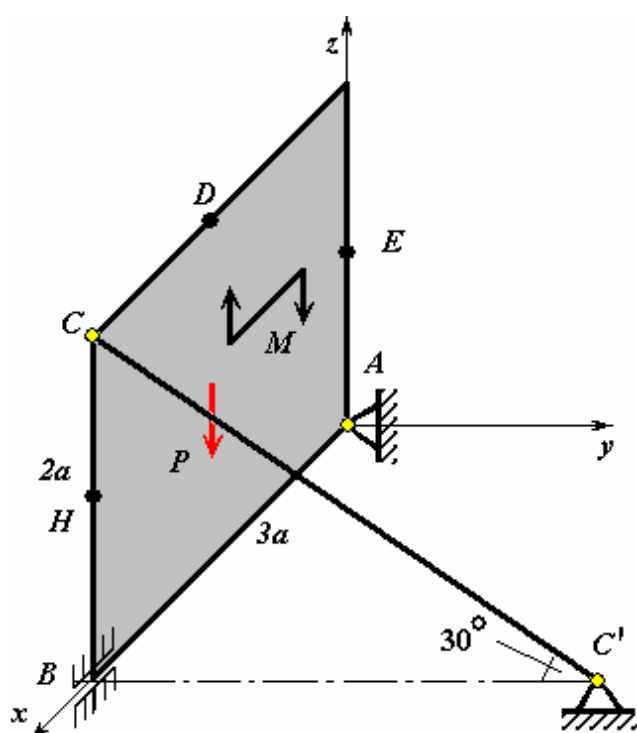


Рис. С2.5

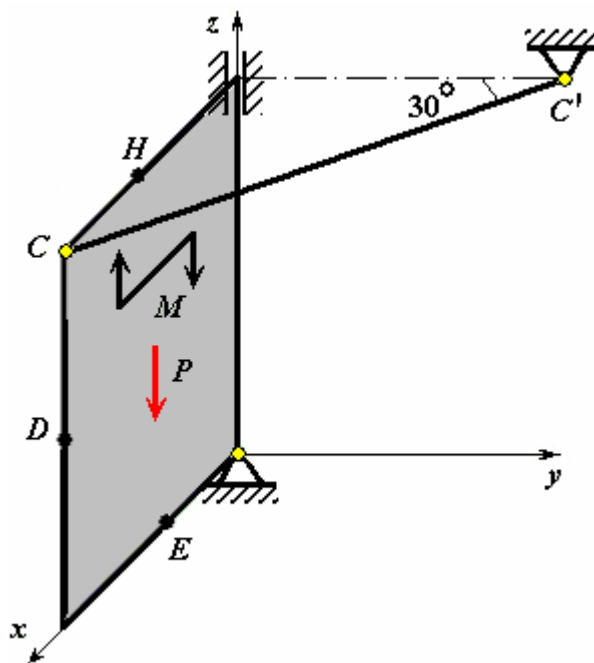


Рис. С2.6

Указания. Задача С2 – на равновесие тела под действием пространственной системы сил.

На исходном рисунке изображаем заданные для Вашего варианта силы. Согласно аксиоме о связях в точках A , B и C вместо связей изображаем силы реакции связей. Реакция сферического шарнира (или подпятника) имеет три составляющие, параллельные координатным осям, а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. В точке C реакция связи \vec{R}_C направлена вдоль оси стержня CC' . При вычислении момента силы \vec{F} часто удобно разложить ее на составляющие \vec{F}' и \vec{F}'' , для которых плечи легко вычисляются, в

частности. на составляющие, параллельные координатным осям, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $M_o(\overline{F}) = M_o(\overline{F}') + M_o(\overline{F}'')$.

Пример С2. Однородная прямоугольная плита весом $P = 3$ кН со сторонами $AB = 3a$, $BC = 2a$ закреплена в точке А сферическим, а в точке В цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC' (рис. С2.7).

На плиту действует пара сил с моментом $M = 5$ кН·м, лежащая в плоскости плиты, и две силы: в точке Н \overline{F}_1 , параллельная оси у, и в точке D \overline{F}_2 , параллельная плоскости xAz . Точки приложения сил находятся на серединах сторон.

Исходные данные:

$$F_1 = 4 \text{ кН}; \quad F_2 = 6 \text{ кН}; \quad \alpha_1 = 90^\circ; \quad \alpha_2 = 30^\circ, \quad a = 0.8 \text{ м.}$$

Определить реакции связей в точках А, В и С.

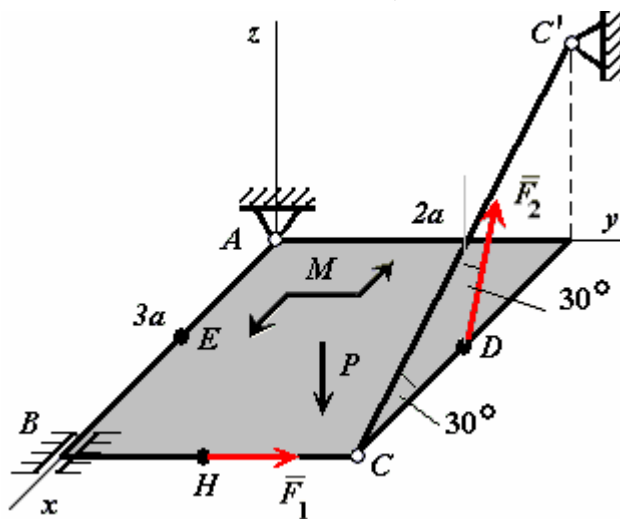


Рис. С2.7

Решение: Рассмотрим равновесие рамы. На нее действуют заданные силы P , \overline{F}_1 , \overline{F}_2 и пара сил с моментом M .

1. Отбрасываем связи. Действие связей заменяем силами реакции связей. В точке А сферический шарнир. Неизвестную силу реакции связи \overline{R}_A раскладываем на составляющие, параллельные осям координат. $\overline{R}_A = \overline{X}_A + \overline{Y}_A + \overline{Z}_A$. В точке В цилиндрический шарнир. Неизвестную силу реакции связи раскладываем на составляющие, параллельные осям координат и лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. $\overline{R}_B = \overline{Y}_B + \overline{Z}_B$. В точке С реакция связи \overline{R}_C направлена вдоль оси стержня CC' (рис. С2.8).

Силы \overline{F}_2 и \overline{R}_C раскладываем на составляющие, параллельные осям координат. $\overline{F}_2 = \overline{F}_2' + \overline{F}_2''$; $\overline{R}_C = \overline{R}_C' + \overline{R}_C''$;

$$F_2' \cdot \sin \alpha_2 = 6 \cdot 0.5 = 3.0; \quad F_2'' = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 6 \cdot 0.866 = 5.196;$$

$$R_C' = R_C \cdot \cos 30^\circ = R_C \cdot 0.866; \quad R_C'' = R_C \cdot \sin 30^\circ = R_C \cdot 0.5.$$

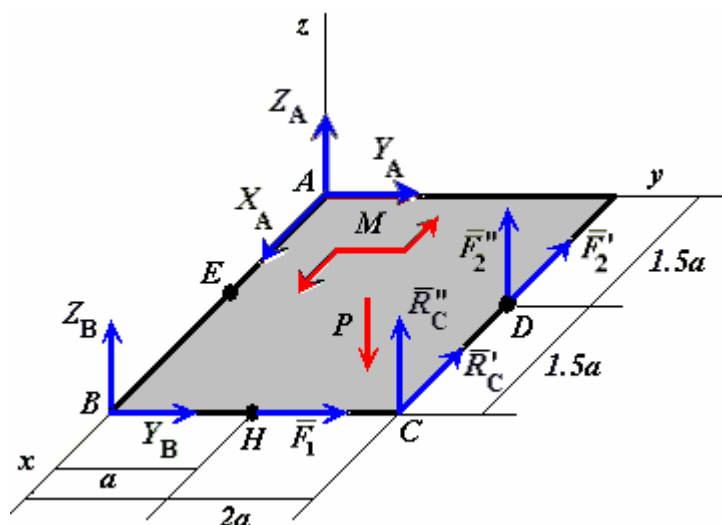


Рис. С2.8

1. Записываем условия равновесия пространственной системы сил.

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_A - F_2' - R_C \cdot 0.866 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_A + Y_B + F_1 = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_{iz} = 0; \quad Z_A + Z_B + F_2'' + R_C \cdot 0.5 = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_x(\bar{F}_i) = 0; \quad F_2'' \cdot 2a + R_C \cdot 0.5 \cdot 2a = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_y(\bar{F}_i) = 0; \quad -Z_B \cdot 3a - R_C \cdot 0.5 \cdot 3a - F_2'' \cdot \frac{3a}{2} = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_z(\bar{F}_i) = 0; \quad Y_B \cdot 3a + F_1 \cdot 3a + F_2' \cdot 2a - R_C \cdot 0.866 \cdot 2a - M = 0 \quad (6)$$

3. Решаем систему из 6-ти линейных алгебраических уравнений.

Из уравнения (4) следует $R_C = -\frac{F_2''}{0.5}; \quad R_C = -\frac{5.196}{0.5} = -10.392 \text{ (кН)}$

Из уравнения (5) следует $Z_B = -\frac{R_C \cdot 0.5 \cdot 3a + F_2'' \cdot \frac{3a}{2}}{3a}; \quad Z_B = 2.598 \text{ (кН)}$

Из ур. (6) следует $Y_B = -\frac{R_C \cdot 0.866 \cdot 2a + M - F_1 \cdot 3a - F_2' \cdot 2a}{3a}; \quad Y_B = -9.916 \text{ (кН)}$

Из уравнения (1) следует $X_A = F_2' + R_C \cdot 0.866; \quad X_A = -5.999 \text{ (кН)}$

Из уравнения (2) следует $Y_A = -Y_B - F_1; \quad Y_A = 5.916 \text{ (кН)}.$

Из уравнения (3) следует $Z_A = -Z_B - F_2'' - R_C \cdot 0.5$; $Z_A = -2.598$ (кН).

Ответ:

$$X_A = -5.999 \text{ кН}; \quad Y_A = 5.916 \text{ кН}; \quad Z_A = -2.598 \text{ кН};$$

$$Y_B = -9.916 \text{ кН}; \quad Z_B = 2.598 \text{ кН}; \quad R_C = -10.392 \text{ кН}.$$

Знак минус указывает, что направление силы противоположно.

Задача К3. Кинематический анализ плоского механизма

Плоский механизм состоит из стержней 1 – 4 и ползуна B , соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами (рис. К3.1-К3.6). Длины стержней равны: $l_1=0.4$ м, $l_2=1.2$ м, $l_3=1.4$ м, $l_4=0.8$ м. Положение механизма определяется углами α , β , γ , φ , θ , которые вместе с другими величинами заданы в таблице К3. Точка D (и точка K) находится в середине соответствующего стержня. Определить величины указанные в таблице в столбце «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа должны откладываться соответствующие углы, т.е. по ходу или против хода часовой стрелки.

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом α . Заданную угловую скорость считать направленной против хода часовой стрелки, а заданную скорость v_B - от точки B к точке b .

Таблица К3.

Номер варианта	Углы					Дано			Найти	Номер рисунка
	α°	β°	γ°	φ°	θ°	ω_1 , 1/с	ω_4 , 1/с	v_B , м/с		
1	30	150	120	0	60	6	-	-	v_B, v_E, ω_2	К3.1
2	60	60	60	90	120	-	3	-	v_A, v_D, ω_3	К3.1
3	0	120	120	0	60	-	-	10	v_A, v_E, ω_2	К3.1
4	90	120	90	90	60	10	-	-	v_B, v_E, ω_3	К3.1
5	0	150	30	0	60	-	4	-	v_B, v_A, ω_2	К3.1
6	30	150	120	0	60	6	-	-	v_B, v_E, ω_2	К3.2
7	60	60	60	90	120	-	3	-	v_A, v_D, ω_3	К3.2
8	0	120	120	0	60	-	-	10	v_A, v_E, ω_2	К3.2
9	90	120	90	90	60	10	-	-	v_B, v_E, ω_3	К3.2

Номер варианта	Углы					Дано			Найти	Номер рисунок
	α°	β°	γ°	φ°	θ°	ω_1 , 1/с	ω_4 , 1/с	v_B , м/с		
10	0	150	30	0	60	-	4	-	v_B, v_A, ω_2	К3.2
11	30	150	120	0	60	6	-	-	v_B, v_E, ω_2	К3.3
12	60	60	60	90	120	-	3	-	v_A, v_D, ω_3	К3.3
13	0	120	120	0	60	-	-	10	v_A, v_E, ω_2	К3.3
14	90	120	90	90	60	10	-	-	v_B, v_E, ω_3	К3.3
15	0	150	30	0	60	-	4	-	v_B, v_A, ω_2	К3.3
16	30	150	120	0	60	6	-	-	v_B, v_E, ω_2	К3.4
17	60	150	120	90	30	-	-	8	v_A, v_E, ω_3	К3.4
18	0	120	120	0	60	-	-	10	v_A, v_E, ω_2	К3.4
19	90	120	90	90	60	10	-	-	v_B, v_E, ω_3	К3.4
20	0	150	30	0	60	-	4	-	v_B, v_A, ω_2	К3.4
21	30	150	120	0	60	6	-	-	v_B, v_E, ω_2	К3.5
22	60	60	60	90	120	-	3	-	v_A, v_D, ω_3	К3.5
23	0	120	120	0	60	-	-	10	v_A, v_E, ω_2	К3.5
24	90	120	90	90	60	10	-	-	v_B, v_E, ω_3	К3.5
25	0	150	30	0	60	-	4	-	v_B, v_A, ω_2	К3.5
26	30	150	120	0	60	6	-	-	v_B, v_E, ω_2	К3.6
27	60	60	60	90	120	-	3	-	v_A, v_D, ω_3	К3.6
28	0	120	120	0	60	-	-	10	v_A, v_E, ω_2	К3.6
29	90	120	90	90	60	10	-	-	v_B, v_E, ω_3	К3.6
30	0	150	30	0	60	-	4	-	v_B, v_A, ω_2	К3.6

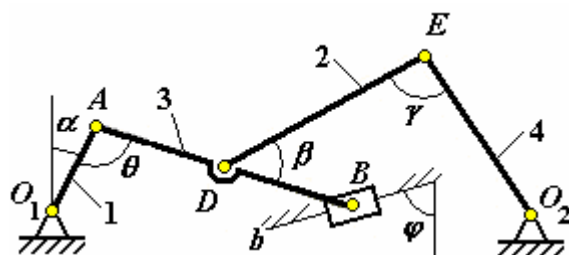


Рис. К3.1

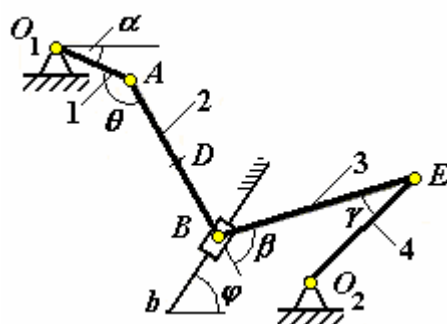


Рис. К3.2

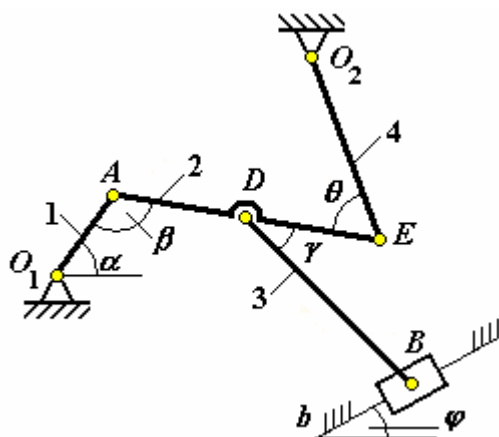


Рис. К3.3

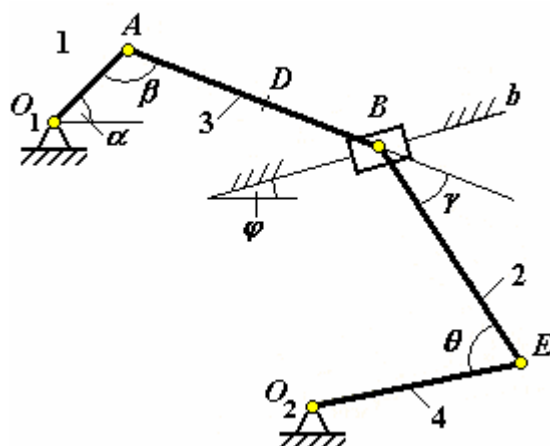


Рис. К3.4

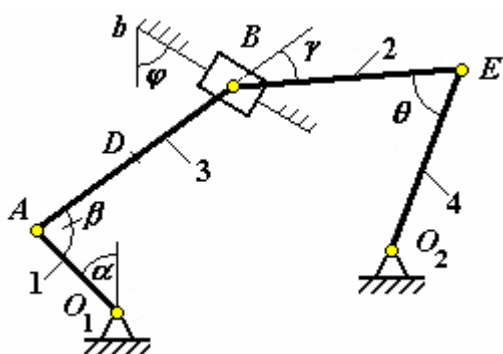


Рис. К3.5

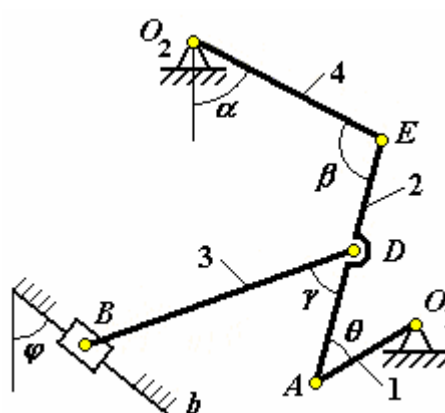


Рис. К3.6

Указания. Задача К3 – на исследование движения плоского механизма, состоящего из твердых тел (звеньев). При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей, применяя это понятие к каждому звену механизма в отдельности.

Пример К3. Плоский механизм состоит из стержней 1 – 4 и ползуна В, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами O_1 и O_2 шарнирами. Длины стержней равны: l_1 , l_2 , l_3 , l_4 . Положение механизма определяется углами α , β , γ , φ , θ . Точка D находится в середине соответствующего стержня.

Исходные данные: $l_1=0.4$ м, $l_2=1.2$ м, $l_3=1.4$ м, $l_4=0.8$ м;

$\alpha=60^\circ$, $\beta=60^\circ$, $\gamma=60^\circ$, $\varphi=90^\circ$, $\theta=120^\circ$, $\omega_4=3$ 1/с.

Механизм в заданном положении показан на рис. 1.

Определить v_A , v_D , ω_3 .

Решение: Строим положение механизма в соответствии с заданными углами. Рис. К3.7.

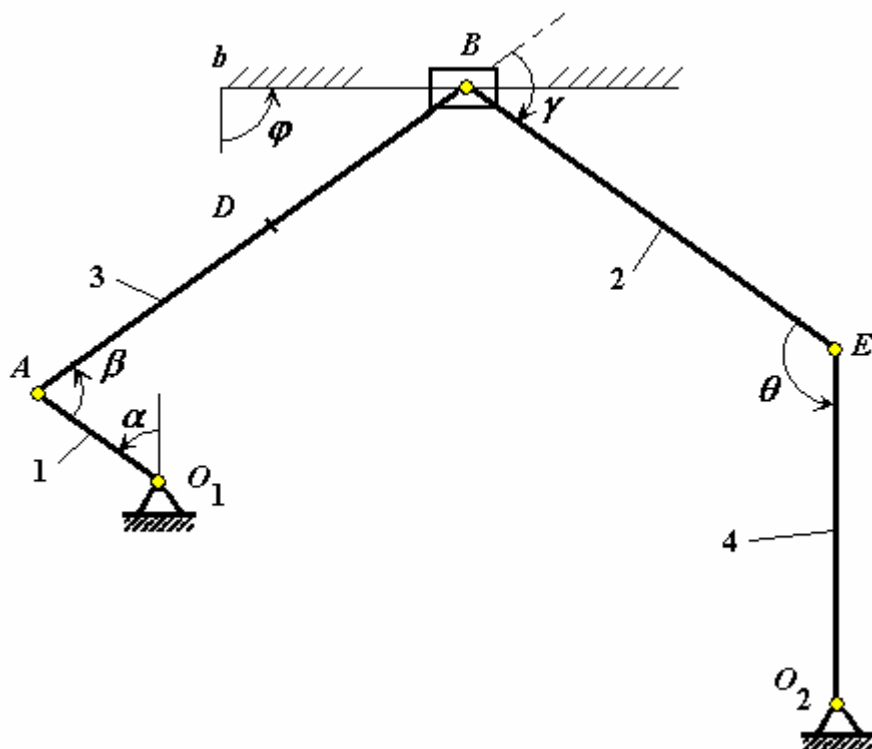


Рис. К3.7

1. Определяем $\overline{v_E}$. $v_E = \omega_4 \cdot l_4$; $v_E = 3 \cdot 0.8 = 2.4$ м/с. Скорость точки E перпендикулярна стержню 4. Рис. К3.8.
2. Определяем $\overline{v_B}$. Направление скорости точки B известно, оно параллельно скорости точки E , следовательно стержень 2 совершает мгновенно поступательное движение и $v_B = v_E = 2.4$ м/с. Рис. К3.8.

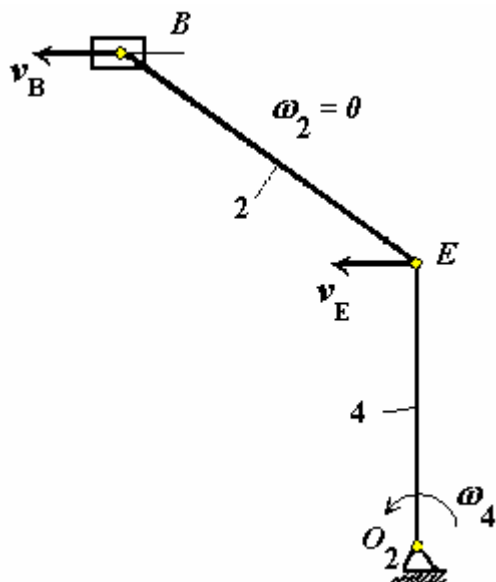


Рис. К3.8

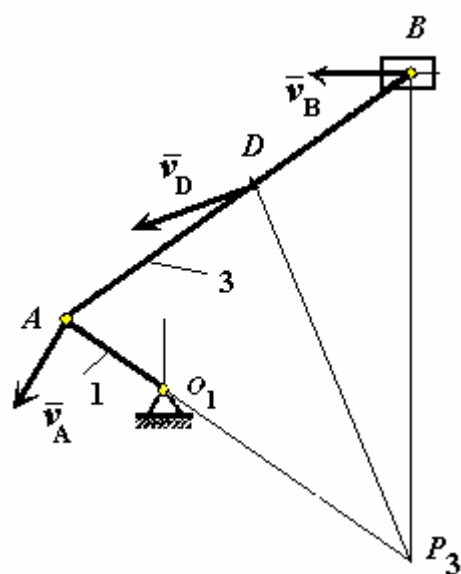


Рис. К3.9

3. Рассмотрим движение стержня 3. Рис. К3.9. Движение плоское. Скорость $\overline{v_B}$ известна, а направление скорости $\overline{v_A}$ также известно. Проводим

перпендикуляры к этим скоростям и на их пересечении получаем мгновенный центр скоростей для стержня 3 (P_3). Треугольник ABP_3 равносторонний, поэтому $AP_3 = BP_3 = AB = l_3$.

4. Определяем ω_3 . $\omega_3 = \frac{v_B}{l_3}$; $\omega_3 = \frac{2.4}{1.4} = 1.714 \text{ 1/с.}$

5. Определяем $\overline{v_A}$. $v_A = \omega_3 \cdot AP_3 = \omega_3 \cdot l_3$; $v_A = 1.714 \cdot 1.4 = 2.4 \text{ м/с.}$

6. Определяем $\overline{v_D}$. $v_D = \omega_3 \cdot DP_3$; $AD = DB = \frac{l_3}{2} = 0.7 \text{ м.};$

$$DP_3 = \sqrt{AD^2 + l_3^2 - 2 \cdot AD \cdot l_3 \cdot \cos \beta}, DP_3 = 1.212 \text{ м. } v_D = 1.714 \cdot 1.212 = 2.077 \text{ м/с}$$

Ответ: $\omega_3 = 1.714 \text{ 1/с.}; v_A = 2.4 \text{ м/с}; v_D = 2.077 \text{ м/с.}$

Задача К4. Сложное движение материальной точки.

Прямоугольная пластина (рис. К4.1- К4.6) или вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω , заданной в таблице К4 (при знаке минус направление ω противоположно показанному на рисунке). Ось вращения на рис. К4.1 - К4.4 перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O (пластина вращается в своей плоскости); на рис. К4.5 - К4.6 ось вращения OO_1 , лежит в плоскости пластины (пластина вращается в пространстве).

По пластине вдоль прямой BD движется точка M . Закон ее относительного движения задается уравнением $s = AM = f(t) = 60(t^3 - 2t^2)$ (s - в сантиметрах, t - в секундах), приведенным в таблице К4. На всех рисунках точка M показана в положении, при котором $s = AM > 0$ (При $s < 0$ точка M находится по другую сторону от точки A).

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в момент времени $t_1 = 1 \text{ с.}$

Указания. Задача К4 – на сложное движение точки. При ее решении движение точки по пластине считать относительным, а вращательное движение самой пластины - переносным и воспользоваться теоремами о сложении скоростей и о сложении ускорений. Прежде чем производить расчеты, следует изобразить точку M на пластине в том положении, в котором нужно определить ее абсолютную скорость (или ускорение), а не в произвольном положении, показанном на рисунках к задаче.

Таблица К4.

Номер варианта	ω , рад/с	a , см	$s = AM = f(t)$, см	Номер рисунка
1	-2	16	$60 \cdot (t^4 - 3t^2) + 56$	К4.1
2	4	20	$60 \cdot (t^3 - 2t^2)$	К4.1
3	3	8	$80 \cdot (2t^2 - t^3)$	К4.1
4	-4	12	$40 \cdot (t^2 - 3t) + 32$	К4.1
5	-3	10	$50 \cdot (t^3 - t) - 30$	К4.1
6	-2	16	$60 \cdot (t^4 - 3t^2) + 56$	К4.2
7	4	20	$60 \cdot (t^3 - 2t^2)$	К4.2
8	3	8	$80 \cdot (2t^2 - t^3)$	К4.2
9	-4	12	$40 \cdot (t^2 - 3t) + 32$	К4.2
10	-3	10	$50 \cdot (t^3 - t) - 30$	К4.2
11	-2	16	$60 \cdot (t^4 - 3t^2) + 56$	К4.3
12	4	20	$60 \cdot (t^3 - 2t^2)$	К4.3
13	3	8	$80 \cdot (2t^2 - t^3)$	К4.3
14	-4	12	$40 \cdot (t^2 - 3t) + 32$	К4.3
15	-3	10	$50 \cdot (t^3 - t) - 30$	К4.3
16	-2	16	$60 \cdot (t^4 - 3t^2) + 56$	К4.4
17	4	20	$40 \cdot (t - 2t^2) - 40$	К4.4
18	3	8	$80 \cdot (2t^2 - t^3)$	К4.4
19	-4	12	$40 \cdot (t^2 - 3t) + 32$	К4.4
20	-3	10	$50 \cdot (t^3 - t) - 30$	К4.4
21	-2	16	$60 \cdot (t^4 - 3t^2) + 56$	К4.5
22	4	20	$60 \cdot (t^3 - 2t^2)$	К4.5
23	3	8	$80 \cdot (2t^2 - t^3)$	К4.5
24	-4	12	$40 \cdot (t^2 - 3t) + 32$	К4.5
25	-3	10	$50 \cdot (t^3 - t) - 30$	К4.5
26	-2	16	$60 \cdot (t^4 - 3t^2) + 56$	К4.6
27	4	20	$60 \cdot (t^3 - 2t^2)$	К4.6

Номер варианта	ω , рад/с	a , см	$s = AM = f(t)$, см	Номер рисунка
28	3	8	$80 \cdot (2t^2 - t^3)$	К4.6
29	-4	12	$40 \cdot (t^2 - 3t) + 32$	К4.6
30	-3	10	$50 \cdot (t^3 - t) - 30$	К4.6

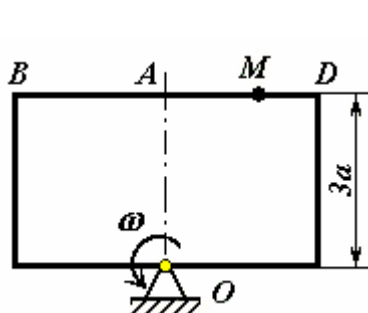


Рис. К4.1

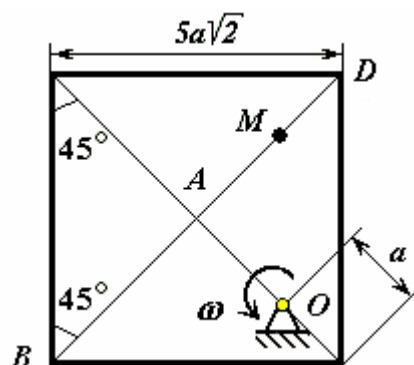


Рис. К4.2

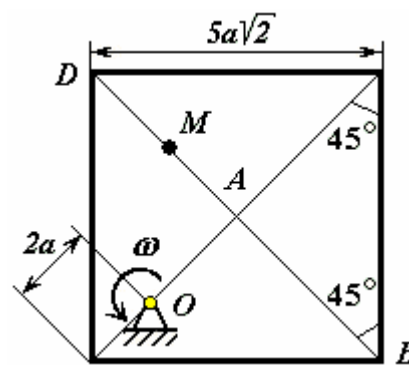


Рис. К4.3

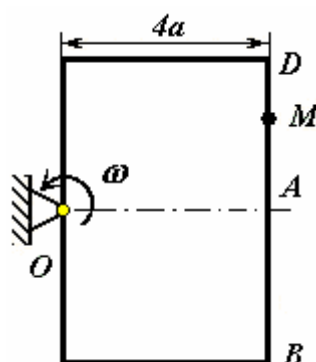


Рис. К4.4

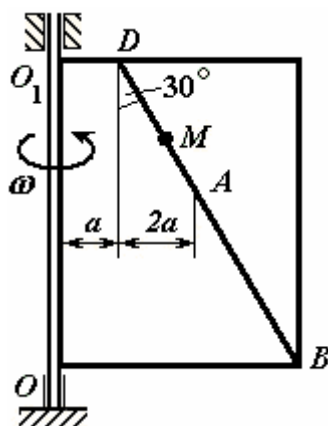


Рис. К4.5

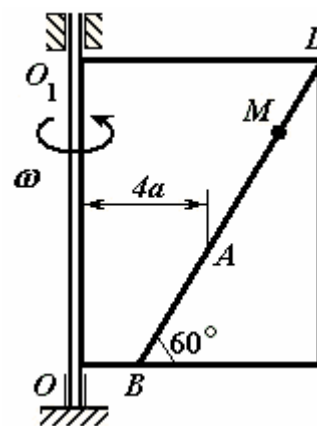


Рис. К4.6

Пример К4. Прямоугольная пластина вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью ω . Ось вращения перпендикулярна плоскости пластины и проходит через точку O . Рис. К4.7.

По пластине вдоль прямой BD движется точка M . Закон ее относительного движения задается уравнением $s = AM = f(t)$.

Исходные данные: $\omega = 4$ 1/с; $a = 20$ см; $t_1 = 1$ с;
 $s = AM = f(t) = 60 \cdot (t^3 - 2t^2)$

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки М в момент времени t_1 .

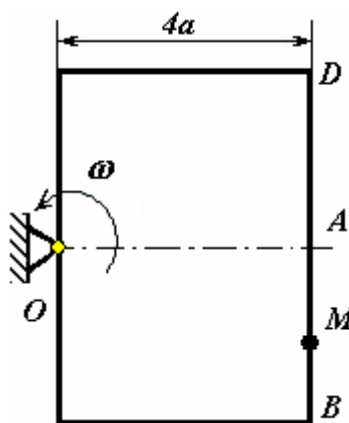


Рис. К4.7

Решение: Рассмотрим движение точки как сложное: $\overline{v_M} = \overline{v_{отн}} + \overline{v_{пер}}$; $\overline{a_M} = \overline{a_{отн}} + \overline{a_{пер}} + \overline{a_{кор}}$.

7. Определим положение точки:

$$s(1) = AM = 60(1-2) = -60 \text{ см. Рис. К4.8 и К4.9.}$$

8. Рассмотрим относительное движение

$$s = AM = f(t) = 60 \cdot (t^3 - 2t^2).$$

$$v_{отн} = \frac{ds}{dt} = 60(3t^2 - 4t); \quad a_{отн} = \frac{d^2s}{dt^2} = 60(6t - 4);$$

$$v_{отн}(1) = \frac{ds}{dt} = 60(3 - 4) = -60 \text{ см/с}; \quad a_{отн}(1) = 60(6 - 4) = 120 \text{ см/с}^2$$

9. Рассмотрим переносное движение. Переносное движение это вращение пластины. Найдем расстояние OM . $OM = \sqrt{OA^2 + AM^2} = 100 \text{ см.}$

Переносная скорость точки перпендикулярна отрезку OM и равна $v_{пер} = \omega \cdot OM$; $v_{пер} = 4 \cdot 100 = 400 \text{ см/с}$; Переносное ускорение точки

складывается из касательного и нормального: $\overline{a_{пер}} = \overline{a_{пер}^{\tau}} + \overline{a_{пер}^n}$;

$$a_{пер}^{\tau} = \varepsilon \cdot OM = 0, \text{ так как } \omega = const;$$

$$a_{пер}^n = \omega^2 \cdot OM; \quad a_{пер}^n = 4^2 \cdot 100 = 1600 \text{ см/с}^2$$

Ускорение Кориолиса по величине равно $a_{кор} = |2 \cdot v_{отн} \cdot \omega|$, $a_{кор} = 2 \cdot 60 \cdot 4 = 480 \text{ см/с}^2$ Направление $a_{кор}$ найдем повернув вектор $v_{отн}$ на 90 градусов против часовой стрелки (рис. К4.9).

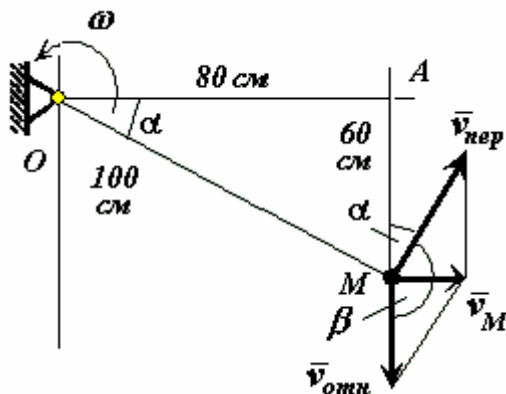


Рис. К4.8

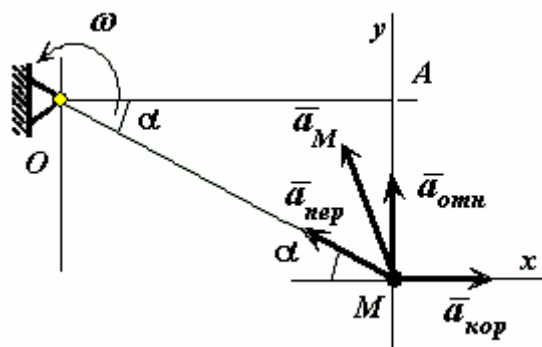


Рис. К4.9

10. Определим абсолютную скорость точки M . $\overline{v_M} = \overline{v_{отн}} + \overline{v_{пер}}$.

$$v_M = \sqrt{v_{отн}^2 + v_{пер}^2 + 2 \cdot v_{отн} \cdot v_{пер} \cdot \cos \beta}; \quad \cos \beta = -\cos \alpha = -0.8;$$

$$v_M = 353.836 \text{ см/с}$$

11. Определим абсолютное ускорение точки M . $\overline{a_M} = \overline{a_{отн}} + \overline{a_{пер}} + \overline{a_{кор}}$.

Введем оси координат xMy . Спроектируем ускорения на эти оси.

$$a_{Mx} = a_{кор} - a_{пер} \cdot \cos \alpha; \quad a_{Mx} = -800 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{My} = a_{отн} + a_{пер} \cdot \sin \alpha; \quad a_{My} = 1080 \text{ см/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{a_{Mx}^2 + a_{My}^2}; \quad a_M = 1786 \text{ см/с}^2.$$

Ответ: $v_M = 353.836 \text{ см/с}; \quad a_M = 1786 \text{ см/с}^2.$