

ДИНАМИКА

18. Модели динамики

В динамике изучаются механические движения материальных объектов под действием сил. Простейшим материальным объектом является материальная точка.

Материальная точка это модель материального тела любой формы, размерами которого можно пренебречь и принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Более сложные материальные объекты – **механические системы и твердые тела**, состоят из набора материальных точек.

Движение материальных объектов всегда происходит в пространстве относительно определенной системы отсчета и во времени. Пространство считается трехмерным евклидовым пространством, свойства которого не зависят от движущихся в нем материальных объектов.

Время в классической механике не связано с пространством и движением материальных объектов. Во всех системах отсчета движущихся друг относительно друга оно протекает одинаково.

19. Динамика точки

19.1. Аксиомы классической механики

Первая аксиома или закон инерции. Материальная точка, на которую не действуют силы или действует равновесная система сил, обладает способностью сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета.

Материальная точка, на которую действует равновесная система сил, называется **изолированной материальной точкой**.

Равномерное и прямолинейное движение точки называется **движением по инерции**.

Вторая аксиома или основной закон динамики. Ускорение материальной точки относительно инерционной системы отсчета пропорционально приложенной к точке силе и направлено по этой силе (рис. 58).

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

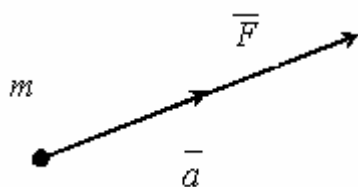
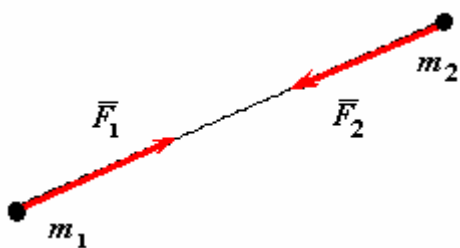


Рис. 58

Положительный коэффициент пропорциональности m , характеризует инертные свойства материальной точки и называется массой точки. Масса не зависит от характеристик движения точки и от природы сил. Масса считается постоянной величиной и зависит только от самой материальной точки.

Сила, приложенная к материальной точке, всегда имеет материальный источник в виде других материальных тел, которые действуют на точку путем контакта при непосредственном соприкосновении с ней или на расстоянии через посредство силовых полей.



Третья аксиома или закон о равенстве сил действия и противодействия. Силы взаимодействия двух материальных точек равны по величине и противоположны по направлению (рис. 59).

$$\overline{F_1} = -\overline{F_2}$$

Рис. 59

Четвертая аксиома или закон независимого действия сил. При одновременном действии на материальную точку нескольких сил ускорение точки относительно инерционной системы отсчета от действия каждой отдельной силы не зависит от наличия других, приложенных к точке, сил и полное ускорение равно векторной сумме ускорений от действия отдельных сил.

$$m \cdot \overline{a_i} = \overline{F_i} \quad \overline{a} = \sum_i \overline{a_i}$$

Аксиомы классической механики хорошо согласуются с результатами опытов.

19.2. Дифференциальные уравнения движения точки.

Основное уравнение динамики $m \cdot \overline{a} = \overline{F}$ можно записать так:

$$m \cdot \frac{d^2 \overline{r}}{dt^2} = \overline{F} \quad \text{или} \quad m \cdot \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F}.$$

Проецируя уравнение $m \cdot \overline{a} = \overline{F}$ на оси координат получаем

$$m \cdot a_x = F_x, \quad m \cdot a_y = F_y, \quad m \cdot a_z = F_z.$$

Так как $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$, то

$$m \cdot \ddot{x} = F_x, \quad m \cdot \ddot{y} = F_y, \quad m \cdot \ddot{z} = F_z.$$

Частные случаи:

А) Точка движется в плоскости. Выбираем в плоскости координаты xOy получаем; $m \cdot \ddot{x} = F_x$, $m \cdot \ddot{y} = F_y$, $F_z \equiv 0$.

Б) Точка движется по прямой. Выбираем на прямой координату Ox получаем; $m \cdot \ddot{x} = F_x$, $F_y \equiv 0$, $F_z \equiv 0$.

19.3. Основные задачи динамики

Первая или прямая задача:

Известна масса точки и закон ее движения, необходимо найти действующую на точку силу.

$$m, \quad x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Вычисляем вторые производные по времени от координат точки, умножаем их на массу и получаем проекции силы на оси координат

$$F_x = m \cdot \ddot{x} = m \cdot f_1''(t), \quad F_y = m \cdot \ddot{y} = m \cdot f_2''(t), \quad F_z = m \cdot \ddot{z} = m \cdot f_3''(t).$$

Зная проекции силы на оси координат, определяем модуль силы и ее направляющие косинусы:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}.$$

Пример 6: Движение точки в плоскости xOy определяется уравнениями:
 $x(t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t); \quad y(t) = b \cdot \sin(\omega \cdot t); \quad a, b, \omega - \text{const}; \quad t - \text{время}.$

Определить силу, действующую на точку. Решение:

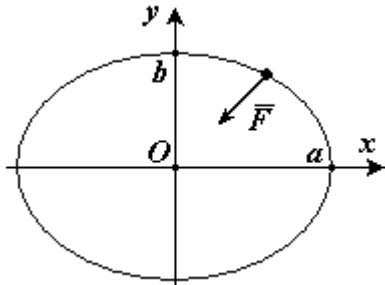


Рис. 60

$$F_x = m \cdot \ddot{x} = -m \cdot a \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

$$F_y = m \cdot \ddot{y} = -m \cdot \omega^2 \cdot b \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

$$F_x = -m \cdot \omega^2 \cdot x; \quad F_y = -m \cdot \omega^2 \cdot y.$$

$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ - Уравнение траектории в координатной форме (эллипс) (рис. 60).

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\vec{F} = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}; \quad \cos(\vec{F}, x) = \frac{F_x}{F} = -\frac{x}{r}, \quad \cos(\vec{F}, y) = \frac{F_y}{F} = -\frac{y}{r}.$$

Вторая или обратная задача:

Известна масса точки и действующая на точку сила, необходимо определить закон движение этой точки.

Рассмотрим решение этой задачи в декартовой системе координат. Сила зависит от времени, координат точки, ее скорости и других причин.

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \quad m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. Для случая системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеется шесть произвольных постоянных: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$

Каждая из координат x, y, z движущейся точки после интегрирования системы уравнений зависит от времени и всех шести произвольных постоянных, т.е.

$$x = f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$

$$y = f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$

$$z = f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).$$

К этим уравнениям необходимо добавить начальные условия:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0,$$

$$\dot{x}(t_0) = v_{x0}, \quad \dot{y}(t_0) = v_{y0}, \quad \dot{z}(t_0) = v_{z0}.$$

Используя эти начальные условия можно получить шесть алгебраических уравнений для определения шести произвольных постоянных $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

19.4. Основные виды прямолинейного движения точки

Дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки вдоль оси Ox имеет вид:

$$m \cdot \ddot{x} = F_x(t, x, \dot{x}), \quad \text{Начальные условия} \quad x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = v_{x0}.$$

Наиболее важные случаи.

$$1. \text{ Сила постоянна. } F_x = \text{const} \quad m \cdot \ddot{x} = \text{const} \quad \ddot{x} = \text{const}$$

Имеем равнопеременное движение (движение с постоянным ускорением)

$$2. \text{ Сила зависит от времени. } F_x = F_x(t), \quad m \cdot \ddot{x} = F_x(t).$$

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t F_x(t) dt, \quad \ddot{x} = \frac{1}{m} \cdot \int_0^t \left(\int_0^t F_x(t) dt \right) dt.$$

$$3. \text{ Сила зависит от координаты или скорости.}$$

Силу, зависящую от координаты x $F_x(x)$, создают упругие тела при их деформации (например, сжатая или растянутая пружина).

Сила, зависящая от скорости движения $F_x(\dot{x})$, это сила сопротивления (воздуха, воды и т.д.)

В этих случаях решение задачи упрощается.

19.5. Колебательное движение точки

Свободные колебания без сопротивления

Существуют устройства (упругие элементы), которые создают силу пропорциональную их удлинению. $F = -c \cdot x$, Эту силу называют **восстанавливающей или центральной силой**. Коэффициент пропорциональности называется **жесткостью упругого элемента**.

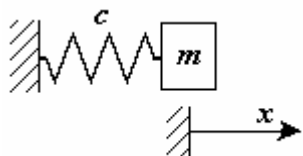


Рис. 61

Дифференциальное уравнение движения точки с массой m , закрепленной на упругом элементе, имеет вид (рис. 61):

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0$$

$$\text{или} \quad \ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0, \quad \text{где} \quad \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

Начальные условия имеют вид: при $t = 0$, $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

Это дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки без сопротивления.

Решение имеет вид (рис. 62):

$$x(t) = C_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{или} \quad x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha),$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} - \text{амплитуда колебаний}; \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{x_0 \cdot \omega}{v_0}, \quad \omega - \text{круговая}$$

или циклическая частота колебаний (собственная частота), измеряется в рад/сек; α - фазовый угол (или просто фаза);

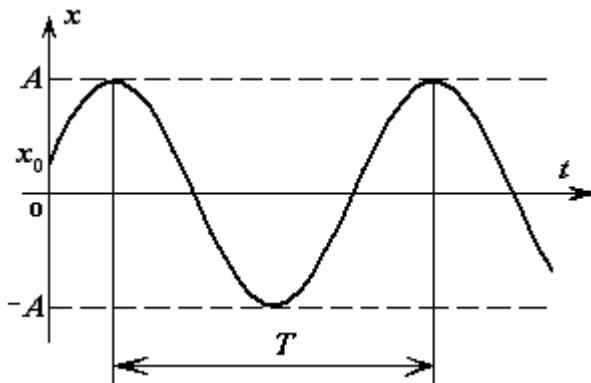


Рис. 62

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad \text{период колебаний};$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} - \text{частота колебаний}$$

(1 кол./сек=1 Гц). Движение материальной точки – это свободные гармонические колебания с постоянной амплитудой. Амплитуда колебаний зависит от начальных условий и круговой частоты.

Вынужденные колебания без сопротивления

Рассмотрим движение точки под действием двух сил: одна восстанавливающая, другая зависит от времени. $F(t) = F_0 \cdot e^{i \cdot \omega t}$ - гармоническая возмущающая сила, где F_0 - амплитуда возмущающей силы; ω - круговая частота возмущающей силы.

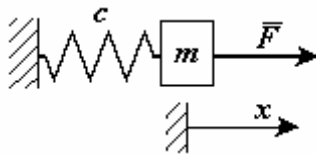


Рис. 63

Дифференциальное уравнение движения точки с массой m , закрепленной на упругом элементе, под действием возмущающей гармонической силы имеет вид (рис. 63):

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = F_0 \cdot e^{i \cdot \omega t}.$$

Решение уравнения имеет вид: $x(t) = x_0 \cdot e^{i \cdot \omega t}$,

$x_0 = \frac{F_0 / m}{\Omega^2 - \omega^2}$ - амплитуда вынужденных колебаний, Ω - частота собственных колебаний

Материальная точка колеблется с амплитудой x_0 и частотой возмущающей силы ω . График зависимости модуля амплитуды $|x_0|$ от частоты возмущающей силы ω приведен на рис. 64.

Модуль амплитуды вынужденных колебаний возрастает от $x_{cm} = \frac{F_{cm}}{c}$

(при $\omega = 0$) до бесконечности (при $\omega = \Omega_-$) и убывает от бесконечности (при $\omega = \Omega_+$) до нуля (при $\omega \rightarrow \infty$).

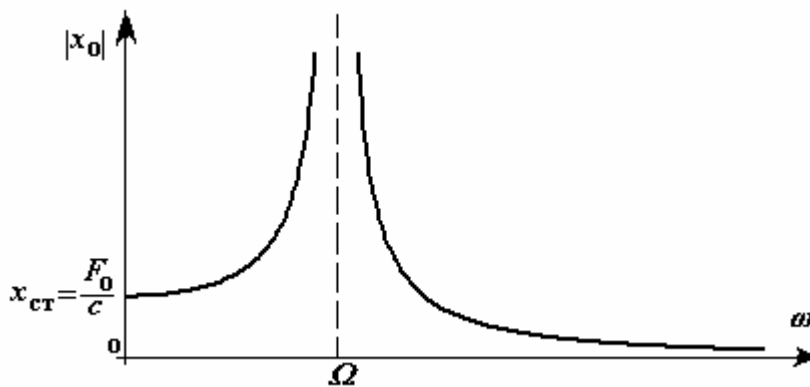


Рис. 64

Явление, когда частота возмущающей силы совпадает с собственной частотой колебаний системы, называется **резонансом**.

Свободные колебания с вязким сопротивлением

Существуют устройства (демпферы), которые создают силу пропорциональную относительной скорости. $F_D = -b \cdot \dot{x}$. Коэффициент пропорциональности называется **коэффициентом демпфирования** или **коэффициентом вязкого сопротивления**.

Дифференциальное уравнение движения точки с массой m , закрепленной на упругом элементе и демпфере имеет вид (рис. 65):

$$m \cdot \ddot{x} = F_v + F_D.$$

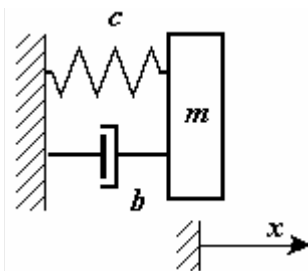


Рис. 65

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2 \cdot n \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad 2 \cdot n = \frac{b}{m}.$$

Начальные условия имеют вид: $t = 0$,
 $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

Возможные решения:

1-й случай $n < \omega$, $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$.

Решение имеет вид (рис. 66):

$$x(t) = A \cdot e^{-n \cdot t} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \alpha), \text{ где } A = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + n \cdot x_0)^2}{\omega_1^2}},$$

$A \cdot e^{-n \cdot t}$ - условная амплитуда затухающих колебаний; ω_1 - круговая или циклическая частота затухающих колебаний (измеряется в *рад/сек*); α - фазовый угол (или просто фаза),

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{x_0 \cdot \omega_1}{v_0 + n \cdot x_0}.$$

$$T_1 = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_1} > T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad - \text{период затухающих колебаний.}$$

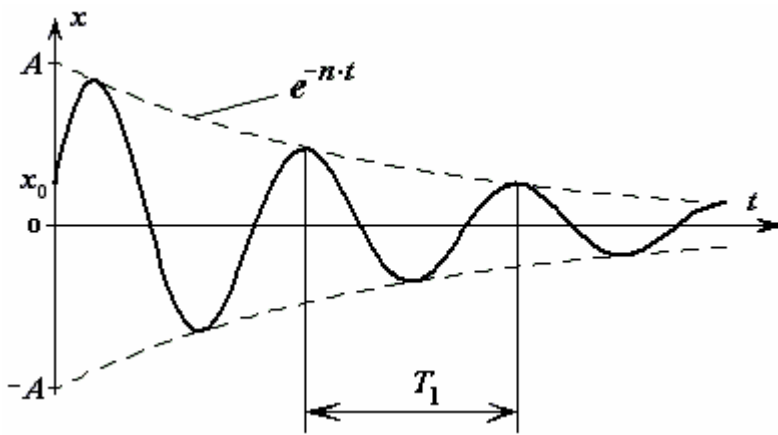


Рис. 66

$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2 \cdot \pi}$ - частота колебаний (1 колеб/сек=1 Гц).

$D = \frac{x_i^{max}}{x_{i+1}^{max}} = e^{n \cdot T_1}$ - декремент колебаний.

$\eta = \ln(D) = n \cdot T_1$ - логарифмический декремент колебаний.

Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой ω_1 и амплитудой, величина которой все время убывает.

2-й случай $n > \omega$, $\omega_1 = \sqrt{n^2 - \omega^2}$.

Решение имеет вид: $x(t) = e^{-n \cdot t} \cdot (C_1 \cdot e^{\omega_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\omega_1 \cdot t})$

Материальная точка совершает затухающее неколебательное движение (рис. 67).

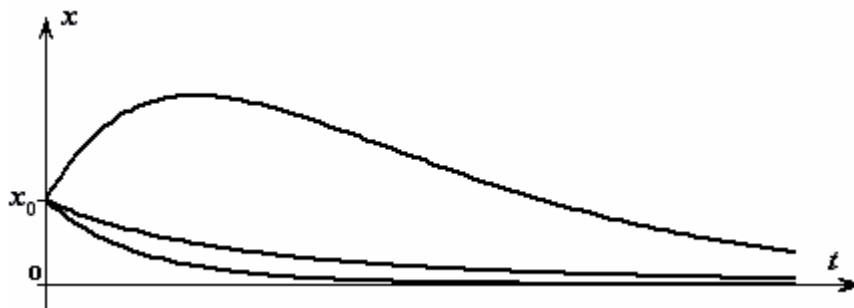


Рис. 67

3-й случай. $n = \omega$.

Решение имеет вид: $x(t) = e^{-n \cdot t} \cdot (C_1 \cdot t + C_2)$

Материальная точка так же совершает затухающее неколебательное движение (рис. 67).

Вынужденные колебания с вязким сопротивлением

Рассмотрим движение точки под действием трех сил: одна восстанавливающая сила, вторая - сила демпфирования (сила вязкого сопротивления), а третья зависит от времени. $F(t) = F_0 \cdot e^{i \cdot \omega t}$ - гармоническая возмущающая сила, F_0 - амплитуда возмущающей силы, ω - круговая частота возмущающей силы.

Дифференциальное уравнение движения точки с массой m , закрепленной на упругом элементе и демпфере, под действием возмущающей гармонической силы имеет вид (рис. 68):

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + c \cdot x = F_0 \cdot e^{i \cdot \omega t}.$$

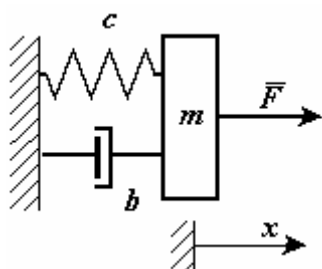


Рис. 68

Решение уравнения имеет вид: $x(t) = x_0 \cdot e^{i\omega t}$,

$x_0 = \frac{F_0 / m}{\Omega^2 - \omega^2 + i \cdot \omega \cdot 2 \cdot n}$ - амплитуда вынужденных колебаний,

Ω - частота собственных колебаний

Материальная точка колеблется с амплитудой x_0 и частотой возмущающей силы ω .

Построим зависимость модуля амплитуды $|x_0|$ от частоты возмущающей силы ω (рис. 69).

Модуль амплитуды вынужденных колебаний возрастает от $x_{ст} = \frac{F_{ст}}{c}$ (при $\omega = 0$) до некоторой величины, а затем убывает до нуля (при $\omega \rightarrow \infty$).

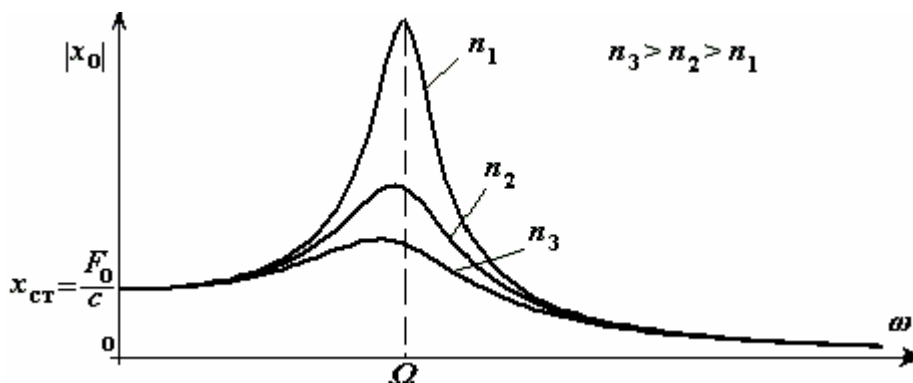


Рис. 69

20. Введение в динамику системы

Механической системой называется любая система материальных точек и тел.

Внешними силами механической системы называются силы, с которыми на точки и тела механической системы действуют точки и тела не входящие в рассматриваемую систему.

Равнодействующая всех внешних сил приложенных к i -ой точке обозначается $\overline{F}_i^{(e)}$ (от латинского exterior - внешний).

Внутренними силами механической системы называются силы взаимодействия между точками и телами рассматриваемой системы.

Равнодействующая всех внутренних сил приложенных к i -ой точке обозначается $\overline{F}_i^{(i)}$ (от латинского interior - внутренний).

Это разделение является условным и зависит от того, какая механическая система рассматривается.

Внутренние силы системы обладают следующими свойствами:

Теорема. Главный вектор всех внутренних сил системы (векторная сумма) равен нулю при любом состоянии системы. $\sum \overline{F}_i^{(i)} = 0$.

Теорема. Главный момент всех внутренних сил системы (векторная сумма) относительно любой точки или оси равен нулю при любом состоянии системы. $\sum M_0(\overline{F}_i^{(i)}) = 0$ или $\sum M_z(\overline{F}_i^{(i)}) = 0$.

Дифференциальные уравнения системы в векторной форме:

$$m_i \cdot \frac{d^2 \overline{r}_i}{dt^2} = \overline{F}_i^{(e)} + \overline{F}_i^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n$$

21. Основные понятия

21.1. Центр масс

Механическая система, которая состоит из конечного числа n материальных точек с массами m_1, m_2, \dots, m_n , а положение точек в пространстве задается радиус-векторами $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \dots, \overline{r}_n$ (рис.70).

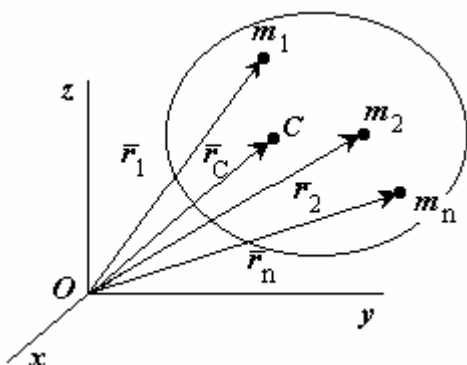


Рис. 70

Центром масс механической системы называется геометрическая точка C , радиус-вектор которой \overline{r}_c определяется выражением

$$\overline{r}_c = \left(\sum_i m_i \cdot \overline{r}_i \right) / M,$$

где $M = \sum_i m_i$ - масса системы.

Если механическая система представляет собой сплошное тело, то его разбивают на элементарные частицы с бесконечно малыми массами $dm = \rho \cdot dv$. Суммы в пределе переходят в интегралы и центр масс определяется выражением $\overline{r}_c = \int_V \overline{r} \rho dv / M$

Центр масс является не материальной точкой, а геометрической. Центр масс характеризует распределение масс в системе.

Координаты центра масс имеют вид:

$$\begin{aligned} x_c &= \left(\sum_i m_i \cdot x_i \right) / M, & x_c &= \int_V x \rho dv / M, \\ y_c &= \left(\sum_i m_i \cdot y_i \right) / M, & y_c &= \int_V y \rho dv / M, \\ z_c &= \left(\sum_i m_i \cdot z_i \right) / M, & z_c &= \int_V z \rho dv / M. \end{aligned}$$

Для тел типа тонкого листа (поверхность) и тонкой проволоки (линия) $dm = \rho_s \cdot ds$ и $dm = \rho_l \cdot dl$, где ρ_s и ρ_l - поверхностная и линейная плотности соответственно. Интегралы вычисляются по поверхности и линии.

21.2. Моменты инерции

Для характеристики распределения масс в телах при рассмотрении вращательных движений требуется ввести понятия **моментов инерции**.

Момент инерции относительно точки:

Скалярная величина

$$J_o = \sum m_i \cdot d_i^2 \quad \text{или} \quad J_o = \int_V d^2 \cdot \rho dv$$

называется **полярным моментом инерции** относительно точки O . d – расстояние от текущей точки до точки O .

Момент инерции относительно оси:

Скалярная величина: $J_l = \sum m_i \cdot r_i^2 \quad \text{или} \quad J_l = \int_V r^2 \cdot \rho dv$

называется **моментом инерции относительно оси** l . r – расстояние от точки до оси.

Моменты инерции одинаковых по форме однородных тел, изготовленных из разных материалов, отличаются друг от друга. Характеристикой, не зависящей от массы материала, является **радиус инерции**.

Величина $\rho_l = \sqrt{J_l / M}$ называется **радиусом инерции**.

Момент инерции относительно оси через радиус инерции относительно этой же оси определяется выражением $J_l = \rho_l^2 \cdot M$.

Моменты инерции относительно осей координат:

$$\begin{aligned} J_x &= \sum m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2), & J_x &= \int_V (x^2 + y^2) \cdot \rho dv, \\ J_y &= \sum m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2), & J_y &= \int_V (x^2 + z^2) \cdot \rho dv, \\ J_z &= \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2), & J_z &= \int_V (x^2 + y^2) \cdot \rho dv, \\ J_o &= \sum m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), & J_o &= \int_V (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho dv. \end{aligned}$$

Центробежные моменты инерции:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \sum m_i \cdot x_i \cdot y_i, & J_{xy} &= \int_V x_i \cdot y_i \cdot \rho dv, \\ J_{xz} &= \sum m_i \cdot x_i \cdot z_i, & J_{xz} &= \int_V x_i \cdot z_i \cdot \rho dv, \\ J_{yz} &= \sum m_i \cdot z_i \cdot y_i, & J_{yz} &= \int_V z_i \cdot y_i \cdot \rho dv. \end{aligned}$$

Существует зависимость между моментами инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс.

Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей.
(Теорема Штейнера)

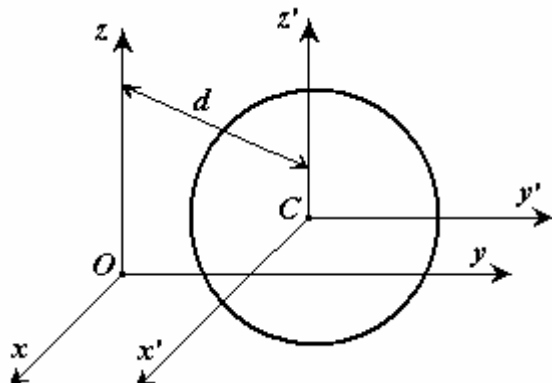


Рис. 71

Момент инерции системы относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между этими осями (рис.71).

$$J_{Ol} = J_{Cl} + M \cdot d^2.$$

Главными осями инерции называются оси, в которых центробежные моменты инерции равны нулю.

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются **главными моментами инерции тела**.

21.3. Количество движения точки и системы

Количеством движения материальной точки \vec{q} называется вектор, равный произведению массы точки m на ее скорость \vec{v} .

$$\vec{q} = m \cdot \vec{v}$$

Количество движения точки в физике часто называют **импульсом материальной точки**.

Проекции количества движения точки на прямоугольные декартовы оси координат равны:

$$q_x = m \cdot v_x = m \cdot \dot{x}, \quad q_y = m \cdot v_y = m \cdot \dot{y}, \quad q_z = m \cdot v_z = m \cdot \dot{z}.$$

Количеством движения системы материальных точек \vec{Q} называется векторная сумма количеств движений отдельных точек системы.

$$\vec{Q} = \sum m_i \cdot \vec{v}_i$$

Количество движения системы можно выразить через массу системы и скорость центра масс. $\vec{Q} = M \cdot \vec{v}_C$.

Единицей измерения количества движения в СИ является — $1 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{с}$

21.4. Элементарный и полный импульс силы.

Действие силы \vec{F} на материальную точку в течении времени dt можно охарактеризовать **элементарным импульсом силы** $d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt$.

Полный импульс силы \overline{F} за время t , или импульс силы \overline{S} , определяется по формуле $\overline{S} = \int_0^t \overline{F} dt$. (Полный интеграл за время t от элементарного импульса).

В частном случае, если сила \overline{F} постоянна и по величине, и по направлению ($\overline{F} = const$), $\overline{S} = \overline{F} \cdot t$.

Проекции импульса силы на прямоугольные декартовы оси координат равны:

$$\overline{S}_x = \int_0^t \overline{F}_x dt, \quad \overline{S}_y = \int_0^t \overline{F}_y dt, \quad \overline{S}_z = \int_0^t \overline{F}_z dt.$$

Единицей измерения импульса в СИ является – $1H \cdot c$

21.5. Момент количества движения

Момент количества движения точки

В некоторых задачах в качестве динамической характеристики движущейся точки вместо самого количества движения рассматривают его момент относительно какого-либо центра или оси. Эти моменты определяются также как и моменты силы.

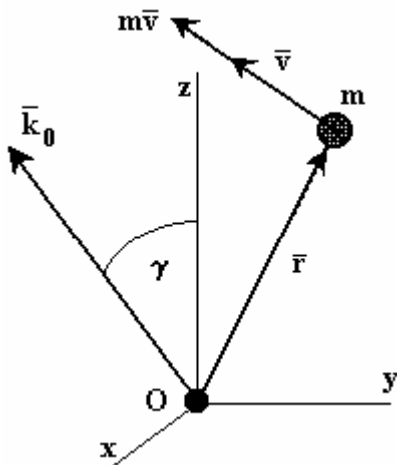


Рис. 72

Моментом количеством движения материальной точки \overline{k}_0 относительно некоторого центра O называется вектор, определяемый равенством $\overline{k}_0 = M_0(m \cdot \overline{v}) = \overline{r} \times m \cdot \overline{v}$ (рис. 72).

Момент количества движения точки называют также **кинетическим моментом**.

Момент количества движения относительно какой-либо оси Oz , проходящий через центр O , равен проекции вектора количества движения \overline{k}_0 на эту ось $k_z = M_z(m \cdot \overline{v}) = k_0 \cdot \cos(\gamma)$.

Если количество движения $m \cdot \overline{v}$ задано своими проекциями $m \cdot v_x$, $m \cdot v_y$, $m \cdot v_z$ на оси координат и даны координаты x , y , z точки m в пространстве, то момент количества движения \overline{k}_0 относительно начала координат вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{k}_0 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m \cdot v_x & m \cdot v_y & m \cdot v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ m \cdot v_y & m \cdot v_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z & x \\ m \cdot v_z & m \cdot v_x \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ m \cdot v_x & m \cdot v_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = \\ &= (y \cdot m \cdot v_z - z \cdot m \cdot v_y) \cdot \vec{i} + (z \cdot m \cdot v_x - x \cdot m \cdot v_z) \cdot \vec{j} + (x \cdot m \cdot v_y - y \cdot m \cdot v_x) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

Проекции момента количества движения \overline{k}_0 на оси координат равны:

$$k_x = (y \cdot m \cdot v_z - z \cdot m \cdot v_y), \quad k_y = (z \cdot m \cdot v_x - x \cdot m \cdot v_z), \\ k_z = (x \cdot m \cdot v_y - y \cdot m \cdot v_x).$$

Единицей измерения количества движения в СИ является – $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$.

Момент количества движения системы.

Моментом количества движения системы материальных точек \overline{K}_0 относительно некоторого центра O называется векторная сумма моментов количества движения отдельных точек этой системы относительно того же центра O

$$\overline{K}_0 = \sum \overline{k}_0 = \sum \overline{r}_i \times m_i \cdot \overline{v}_i.$$

Моментом количества движения системы материальных точек \overline{K}_z относительно какой-либо оси Oz , проходящей через центр O , называется проекция вектора количества движения \overline{K}_0 на эту ось $K_z = K_0 \cdot \cos(\gamma)$.

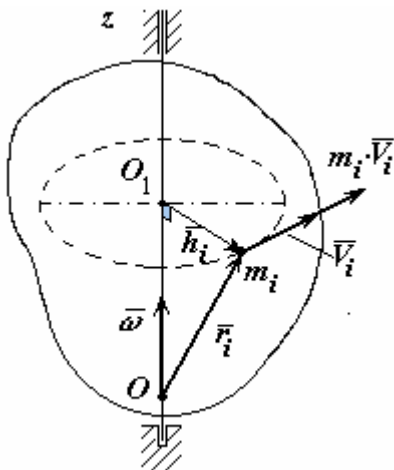


Рис. 73

Момент количества движения твердого тела относительно оси вращения.

Момент количества движения твердого тела относительно оси вращения при вращательном движении равен произведению угловой скорости тела на его момент инерции относительно оси вращения (рис. 73)

$$K_z = \omega \cdot J_z.$$

21.6. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия точки

Кинетической энергией материальной точки (или ее живой силой) называют половину произведения массы точки на квадрат ее скорости.

$$T = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Кинетической энергией системы называют сумму кинетических энергий всех точек системы.

$$T = \sum \frac{m_i \cdot v_i^2}{2}.$$

Теорема Кенига. Кинетическая энергия системы в абсолютном движении складывается из кинетической энергии центра масс, если в нем сосредото-

чить всю массу системы, и кинетической энергии системы при ее движении относительно центра масс.

$$T = M \cdot \frac{v_C^2}{2} + T_C^{(r)}.$$

Кинетическая энергия твердого тела.

1. Поступательное движение тела.

Кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении вычисляется так же, как и для одной точки, у которой масса равна массе этого тела.

$$T = M \cdot \frac{v^2}{2}, \quad v - \text{ скорость любой точки твердого тела}$$

2. Вращение тела вокруг неподвижной оси.

Кинетическая энергия твердого тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.

$$T = J_z \cdot \frac{\omega^2}{2}, \quad \omega - \text{ угловая скорость вращения твердого тела.}$$

3. Плоское движение тела.

Кинетическая энергия твердого тела при плоском движении складывается из кинетической энергии тела вместе с центром масс и кинетической энергии тела от вращения вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения.

$$T = M \cdot \frac{v_C^2}{2} + J_z \cdot \frac{\omega^2}{2}, \quad v_C - \text{ скорость центра масс твердого тела, } \omega - \text{ угловая скорость вращения твердого тела.}$$

21.7. Работа силы. Мощность.

Одна из основных характеристик силы, оценивающих действие силы на тело при некотором его перемещении.

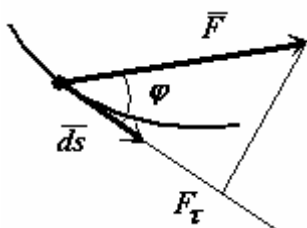


Рис. 74

Элементарная работа силы это скалярная величина равная произведению элементарного перемещения на проекцию силы на это перемещение (рис. 74).

$$dA = F_\tau \cdot ds, \quad dA = F \cdot ds \cdot \cos(\varphi),$$

φ - угол между \vec{F} и \vec{ds} .

Единицей измерения работы в СИ является – $1\text{Н} \cdot \text{м} = 1\text{Дж}$

При $F_\tau > 0$, $dA > 0$, при $F_\tau < 0$, $dA < 0$.

Частные случаи: $\varphi = 0^\circ$, $dA = F \cdot ds$,

$$\varphi = 90^\circ, \quad dA = 0,$$

$$\varphi = 180^\circ, \quad dA = -F \cdot ds.$$

Элементарное перемещение равно дифференциалу радиуса вектора точки приложения силы.

Элементарная работа силы равна скалярному произведению силы на элементарное перемещение или на дифференциал радиуса вектора точки приложения силы.

$$dA = \overline{F} \cdot \overline{ds} = \overline{F} \cdot \overline{dr}$$

Элементарная работа силы равна скалярному произведению элементарного импульса силы на скорость точки.

$$dA = \overline{F} \cdot \overline{dr} = \overline{F} \cdot \overline{v} \cdot dt = \overline{dS} \cdot \overline{v}$$

Если сила \overline{F} задана своими проекциями (F_x, F_y, F_z) на оси координат и элементарное перемещение задано своими проекциями (dx, dy, dz) на оси координат, то элементарная работа силы равна:

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

(аналитическое выражение элементарной работы).

Работа силы на любом конечном перемещении $M_0 M$ равна взятому вдоль этого перемещения интегралу от элементарной работы.

$$A = \int_{M_0}^M dA = \int_{M_0}^M \overline{F} \cdot \overline{ds} = \int_{M_0}^M (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz)$$

Мощностью силы называется величина, определяющая работу, совершаемую силой в единицу времени. В общем случае мощность равна первой производной по времени от работы.

$$W = \frac{dA}{dt}, \quad W = \frac{\overline{F} \cdot \overline{v} \cdot dt}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{v}$$

Мощность равна скалярному произведению силы на скорость.

Единицей измерения мощности в СИ является – $1 \text{ Дж} / \text{с} = 1 \text{ Вт}$

В технике за единицу силы принимается $1 \text{ л.с.} = 736 \text{ Вт} = 75 \frac{\text{кГ} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Пример 7. Работа силы тяжести.

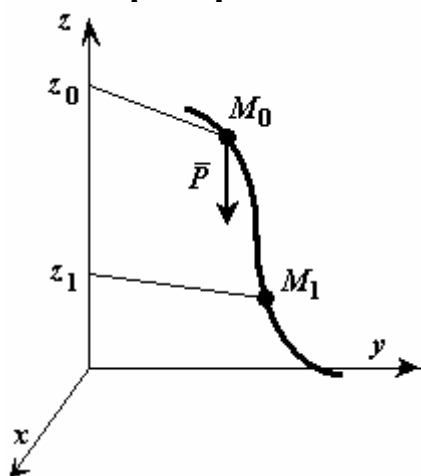


Рис. 75

Точка M , на которую действует сила тяжести P , перемещается из положения $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в положение $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Выберем оси координат так, чтобы ось Oz была направлена вертикально вверх (рис. 75).

Тогда, $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = P$ и

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{z_0}^{z_1} (-P) dz = P \cdot (z_0 - z_1)$$

Работа силы тяжести равна взятому со знаком плюс или минус произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения. Работа положительна, если начальная точка выше конечной, и отрицательна, если начальная точка ниже конечной.

Пример 8. Работа силы упругости.

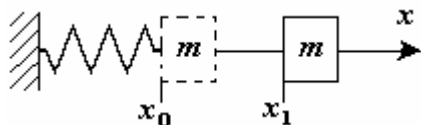


Рис. 76

Рассмотрим материальную точку закрепленную на упругом элементе жесткости c , которая совершает колебания вдоль оси x (рис. 76).

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} dA = \int_{x_0}^{x_1} (-c \cdot x) dx = \frac{c}{2} \cdot (x_0^2 - x_1^2)$$

Работа силы упругости равна половине произведения жесткости упругого элемента на разность квадратов начального и конечного удлинения (или сжатия) упругого элемента.

Пример 9. Работа и мощность пары сил.

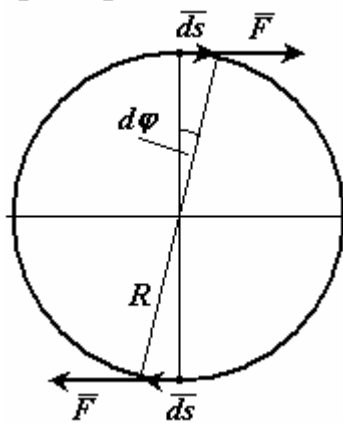


Рис. 77

Пусть пара сил приложена к вращающемуся вокруг неподвижной оси телу (рис. 77). Элементарная работа пары сил равна $dA = 2 \cdot F \cdot ds = 2 \cdot F \cdot R \cdot d\varphi$.

Полная работа пары сил равна $A = 2 \cdot F \cdot R \cdot \varphi = M \cdot \varphi$, где φ - угол поворота тела, M - момент пары сил.

Мощность пары сил равна

$$W = \frac{dA}{dt} = M \cdot \omega.$$

22. Общие теоремы динамики точки и системы

Для решения многих задач динамики вместо непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений движения оказывается более эффективным пользоваться так называемыми общими теоремами, которые являются следствием основного закона динамики.

22.1. Теорема об изменении количества движения точки.

Теорема 1. Производная по времени от количества движения точки равна на действующей на точку силе. $\frac{d(m \cdot \bar{v})}{dt} = \bar{F}$

В проекциях на координатные оси:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v}_x) = \bar{F}_x, \quad \frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v}_y) = \bar{F}_y, \quad \frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v}_z) = \bar{F}_z.$$

Теорема 2. (в дифференциальной форме) Дифференциал от количества движения точки равен элементарному импульсу силы, действующей на точку.

$$d(m \cdot \bar{v}) = d\bar{F} \cdot dt = d\bar{S}.$$

В проекциях на координатные оси:

$$d(m \cdot \bar{v}_x) = d\bar{F}_x \cdot dt = d\bar{S}_x,$$

$$d(m \cdot \bar{v}_y) = d\bar{F}_y \cdot dt = d\bar{S}_y,$$

$$d(m \cdot \bar{v}_z) = d\bar{F}_z \cdot dt = d\bar{S}_z.$$

Теорема 3. (в интегральной форме) Изменение количества движения точки за какой-либо промежуток времени равно импульсу силы за этот же промежуток времени.

$$m \cdot \bar{v} - m \cdot \bar{v}_0 = \bar{S}.$$

В проекциях на координатные оси:

$$m \cdot \bar{v}_x - m \cdot \bar{v}_{0x} = \bar{S}_x, \quad m \cdot \bar{v}_y - m \cdot \bar{v}_{0y} = \bar{S}_y,$$

$$m \cdot \bar{v}_z - m \cdot \bar{v}_{0z} = \bar{S}_z.$$

22.2. Теорема об изменении количества движения системы.

Эта теорема существует в трех различных формах.

Теорема 1. Производная по времени от количества движения системы равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_i^{(e)}.$$

В проекциях на оси координат:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{ix}^{(e)}, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{iy}^{(e)}, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{iz}^{(e)}.$$

Теорема 2. (в дифференциальной форме) Дифференциал от количества движения системы равен сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на систему.

$$d\bar{Q} = \sum \bar{F}_i^{(e)} \cdot dt,$$

В проекциях на оси координат это утверждение выглядит так:

$$dQ_x = \sum F_{ix}^{(e)} \cdot dt, \quad dQ_y = \sum F_{iy}^{(e)} \cdot dt, \quad dQ_z = \sum F_{iz}^{(e)} \cdot dt.$$

Теорема 3. (в интегральной форме). Изменение количества движения системы за какой-либо промежуток времени равно векторной сумме полных импульсов всех внешних сил, действующих на систему за этот же промежуток времени.

$$\bar{Q} - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_i^{(e)}.$$

В проекциях на оси координат это утверждение выглядит так:

$$Q_x - Q_{0x} = \sum S_{ix}^{(e)}, \quad Q_y - Q_{0y} = \sum S_{iy}^{(e)}, \quad Q_z - Q_{0z} = \sum S_{iz}^{(e)}.$$

22.3. Законы сохранения количества движения.

1. Если главный вектор всех внешних сил системы равен нулю ($\sum \overline{F}_i^{(e)} = 0$), то количество движения системы постоянно по величине и направлению. $\overline{Q} = const$

2. Если проекция главного вектора всех внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю ($\sum \overline{F}_{ix}^{(e)} = 0$), то проекция количества движения системы на эту ось является постоянной величиной. $Q_x = const$

22.4. Теорема о движении центра масс.

Теорема Центр масс системы движется так же, как и материальная точка, масса которой равна массе всей системы, если на точку действуют все внешние силы, приложенные к рассматриваемой механической системе.

$$M \cdot \overline{a}_c = \sum \overline{F}_i^{(e)}.$$

22.5. Теорема об изменении момента количества движения точки.

Теорема 1. Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какого-нибудь центра, равна моменту действующей на точку силы относительно того же центра.

$$\frac{d}{dt}(\overline{M}_0(m \cdot \overline{v})) = \overline{M}_0(\overline{F}).$$

Теорема 2. Производная по времени от момента количества движения точки, взятого относительно какой-либо оси, равна моменту действующей на точку силы относительно той же оси.

22.6. Теорема об изменении момента количества движения системы.

Теорема 1. Производная по времени от момента количества движения системы, взятого относительно какого-нибудь центра, равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему относительно того же центра.

$$\frac{d\overline{K}_0}{dt} = \overline{L}_0^{(e)}.$$

Теорема 2. Производная по времени от момента количества движения системы, взятого относительно какой-либо оси, равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему относительно той же оси.

Для оси Oz это будет выглядеть так:

$$\frac{d\overline{K}_z}{dt} = \overline{L}_z^{(e)}$$

22.7. Законы сохранения момента количества движения.

1. Если главный момент внешних сил системы относительно точки O равен нулю ($\overline{L}_0^{(e)} = 0$), то момент количества движения системы относительно точки O постоянен по величине и направлению. $\overline{K}_0 = const$

2. Если сумма моментов всех внешних сил системы относительно какой-либо оси равна нулю ($L_x^{(e)} = 0$), то момент количества движения системы относительно этой оси является постоянной величиной. $K_x = const$

22.8. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

Теорема 1. Дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.

$$d\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) = dA.$$

Теорема 2. Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности, подводимой к этой точке.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m \cdot v^2}{2}\right) = W.$$

Теорема 3. Изменение кинетической энергии точки на каком-либо перемещении равно работе силы, действующей на точку на этом же перемещении.

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = A.$$

22.9. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Эта теорема существует в двух формах.

Теорема 1. Дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.

$$dT = dA = \sum \overline{F}_i^{(e)} \cdot d\overline{r}_i + \sum \overline{F}_i^{(i)} \cdot d\overline{r}_i.$$

Теорема 2. Изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на соответствующих перемещениях точек системы при том же перемещении системы.

$$T - T_0 = \sum A_i^{(e)} + \sum A_i^{(i)}.$$

23. Основы аналитической механики

Классификация связей

Связями называются любого вида ограничения, которые налагаются на положения и скорости точек механической системы и выполняются независимо от того, какие на систему действуют заданные силы. Рассмотрим, как классифицируются эти связи.

Связи, не изменяющиеся со временем, называются **стационарными**, а изменяющиеся со временем - **нестационарными**.

Связи, налагающие ограничения на положения (координаты) точек системы, называются **геометрическими**, а налагающие ограничения еще и на скорости (первые производные от координат по времени) точек системы - **кинематическими** или **дифференциальными**.

Если, дифференциальную связь можно представить как геометрическую, т. е. устанавливаемую этой связью зависимость между скоростями свести к зависимости между координатами, то такая связь называется **интегрируемой**, а в противном случае - **неинтегрируемой**.

Геометрические и интегрируемые дифференциальные связи называют связями **голономными**, а неинтегрируемые дифференциальные связи - **неголономными**.

Наконец, различают связи **удерживающие** (налагаемые ими ограничения сохраняются при любом положении системы) и **неудерживающие**, которые этим свойством не обладают (от таких связей, как говорят, система может «освободиться»).

Обобщенные координаты и силы

Обобщенными координатами q_i называются независимые друг от друга параметры, заданием которых однозначно определяется положение всех точек материальной системы.

Число независимых обобщенных координат системы с голономными связями называют **числом степеней свободы механической системы**.

Обобщенной силой по соответствующей обобщенной координате называется такой параметр Q_i , произведение которого на эту обобщенную координату имеет размерность работы:

$$\delta A = Q_i \cdot \delta q_i.$$

Уравнения Лагранжа второго рода.

Уравнениями Лагранжа второго рода называют дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где T – кинетическая энергия системы в абсолютном движении, выраженная в обобщенных координатах; q_i – обобщенная координата; \dot{q}_i – обобщенная ско-

рость; Q_i - обобщенная сила по i -ой обобщенной координате; n - число степеней свободы системы.

Число независимых уравнений Лагранжа второго рода равно числу степеней свободы механической системы.

24. Элементы теории удара

Основные положения и понятия теории удара

Ударом называется явление, при котором за малый промежуток времени, т. е. почти мгновенно, скорости части или всех точек системы изменяются на конечные величины по сравнению с их значениями непосредственно перед ударом или после него.

Длительность удара составляет обычно десятые и меньшие части долей секунды.

Ударным импульсом называют векторную величину:

$$\bar{S} = \int_0^{\tau} \bar{F}(t) dt.$$

Ударный импульс графически изображается на рисунке заштрихованной площадью, ограниченной кривой линией изменения ударной силы, и осью абсцисс, по которой откладывается время.

Иногда рассматривают среднюю ударную силу — постоянную в течение удара силу, которая за время удара дает такой же ударный импульс, как и переменная ударная сила. Средняя ударная сила определяется из соотношения:

$$F_{cp} \cdot \tau = S$$

Импульс неударной силы, например силы тяжести тела, за время удара имеет порядок величины τ , т. е. является величиной малой по сравнению с ударными импульсами. Поэтому импульсами неударных сил можно пренебречь по сравнению с ударными импульсами. Перемещения точек за время удара также можно пренебречь.

Теорема об изменении количества движения системы при ударе

Изменение количества движения системы за время удара равно векторной сумме ударных импульсов, приложенных к точкам системы.

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_i \bar{S}_i^{(e)}.$$

Теорема об изменении момента количества движения системы при ударе

Изменение момента количества движения системы относительно некоторого центра за время удара равно векторной сумме моментов относительно этого центра ударных импульсов, приложенных к точкам системы.

$$\bar{K}_1 - \bar{K}_0 = \sum_i \bar{M}_0(\bar{S}_i^{(e)}).$$

Контрольная работа №2

Задача Д5. Интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (постоянные силы)

Варианты 1 – 5 (рис. Д5.1). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ сек. Его начальная скорость V_A . Коэффициент трения скольжения тела по наклонной плоскости равен f .

В точке B тело покидает плоскость со скоростью V_B и падает со скоростью V_C в точку C плоскости BD , наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T сек.

Тело принимаем за материальную точку. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Вариант 1. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $V_A = 0$ м/сек, $f = 0.2$, $l = 10$ м, $\beta = 60^\circ$. Определить τ и h .

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15^\circ$, $V_A = 2$ м/сек, $f = 0.2$, $h = 4$ м, $\beta = 45^\circ$. Определить l и уравнение траектории точки на участке BC .

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $V_A = 2.5$ м/сек, $f \neq 0$, $l = 8$ м, $d = 10$ м, $\beta = 60^\circ$. Определить V_B и τ .

Вариант 4. Дано: $V_A = 0$ м/сек, $f = 0$, $l = 8$ м, $d = 9.8$ м, $\tau = 2$ сек., $\beta = 60^\circ$. Определить α и τ .

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30^\circ$, $V_A = 0$ м/сек, $f \neq 0$, $l = 9.8$ м, $\tau = 3$ сек., $\beta = 45^\circ$. Определить f и V_C .

Варианты 6 – 10 (рис. Д5.2). Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB , наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l , со скоростью V_A . Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f . Лыжник от A до B движется τ сек. В точке B со скоростью V_B он покидает трамплин. Через T сек. лыжник приземляется со скоростью V_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

Лыжника принимаем за материальную точку. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

Вариант 6. Дано: $\alpha = 20^\circ$, $\tau = 0.2$ сек., $f = 0.1$, $h = 40$ м, $\beta = 30^\circ$. Определить l и V_C .

Вариант 7. Дано: $\alpha = 15^\circ$, $V_A = 16$ м/сек, $f = 0.1$, $l = 5$ м,

$\beta = 45^0$. Определить V_B и T .

Вариант 8. Дано: $V_A = 21$ м/сек, $f = 0$, $\tau = 0.3$ сек., $V_B = 20$ м/сек, $\beta = 60^0$. Определить α и d .

Вариант 9. Дано: $\alpha = 15^0$, $\tau = 0.3$ сек., $f = 0.1$, $h = 30\sqrt{2}$ м, $\beta = 45^0$. Определить V_A и V_B .

Вариант 10. Дано: $\alpha = 15^0$, $V_A = 12$ м/сек, $f = 0$, $d = 50$ м, $\beta = 60^0$. Определить τ и уравнение траектории лыжника на участке BC .

Варианты 11 – 15 (рис. Д5.3). Имея в точке A скорость V_A , мотоциклист поднимается τ сек. по участку AB длиной l , составляющему с горизонтом угол α . При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость V_B и перелетает через ров шириной d , находясь в воздухе T сек. и приземляясь в точке C со скоростью V_C . Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m .

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30^0$, $P \neq 0$, $V_A = 0$ м/сек, $V_B = 4.5$ м/сек, $l = 40$ м, $d = 3$ м. Определить τ и h .

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30^0$, $P = 0$, $V_B = 4.5$ м/сек, $l = 40$ м, $h = 1.5$ м. Определить V_A и d .

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30^0$, $V_A = 0$ м/сек, $m = 400$ кг, $\tau = 20$ сек., $h = 5$ м, $d = 3$ м. Определить P и l .

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30^0$, $V_A = 0$ м/сек, $m = 400$ кг, $P = 2.2$ кН, $l = 40$ м, $d = 5$ м. Определить V_B и V_C .

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30^0$, $V_A = 0$ м/сек, $P = 2.0$ кН, $l = 50$ м, $h = 2$ м, $d = 4$ м. Определить T и m .

Варианты 16 – 20 (рис. Д5.4). Камень скользит в течении τ сек. по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l . Его начальная скорость равна V_A . Коэффициент трения камня по откосу равен f . Имея в точке B скорость V_B , камень через T сек. ударяется с точки C о вертикальную защитную стену со скоростью V_C .

При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано: $\alpha = 30^0$, $V_A = 1$ м/сек, $f = 0.2$, $l = 3$ м, $d = 2.5$ м. Определить T и h .

Вариант 17. Дано: $\alpha = 45^0$, $V_B = 2V_A$ м/сек, $\tau = 1$ сек., $l = 6$ м, $h = 6$ м. d и f .

Вариант 18. Дано: $\alpha = 30^0$, $V_A = 0$ м/сек, $f = 0.1$, $l = 2$ м, $d = 3$ м. Определить h и τ .

Вариант 19. Дано: $\alpha = 15^0$, $V_B = 3$ м/сек, $f \neq 0$, $\tau = 1.5$ сек., $l = 3$ м, $d = 2$ м. Определить V_A и h .

Вариант 20. Дано: $\alpha = 45^0$, $V_A = 0$ м/сек, $f = 0.3$, $h = 4$ м, $d = 2$ м. Определить l и τ .

Варианты 21 – 25 (рис. Д5.5). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость V_A . Коэффициент трения скольжения равен f . Через τ сек. тело в точке B со скоростью V_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью V_C ; при этом оно находится в воздухе T сек.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано: $\alpha = 30^0$, $V_A = 1$ м/сек, $f = 0.1$, $\tau = 1.5$ сек., $h = 10$ м. Определить V_B и d .

Вариант 22. Дано: $\alpha = 45^0$, $V_A = 0$ м/сек, $\tau = 2$ сек., $l = 10$ м. Определить f и уравнение траектории на участке BC .

Вариант 23. Дано: $V_A = 0$ м/сек, $f = 0$, $l = 9.81$ м, $\tau = 2$ сек., $h = 20$ м. Определить α и T .

Вариант 24. Дано: $\alpha = 30^0$, $V_A = 0$ м/сек, $f = 0.2$, $l = 10$ м, $d = 12$ м. Определить τ и h .

Вариант 25. Дано: $\alpha = 30^0$, $V_A = 0$ м/сек, $f = 0.2$, $l = 6$ м, $h = 4.5$ м. Определить V_C и τ .

Варианты 26 – 30 (рис. Д5.6). Имея в точке A скорость V_A , тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течении τ сек. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f . Со скоростью V_B тело в точке B покидает плоскость и падает в точку C со скоростью V_C ; при этом оно находится в воздухе T сек.

При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 26. Дано: , $V_A = 7 \text{ м/сек}$, $f = 0.2$, $l = 8\text{м}$, $h = 20\text{м}$.

Определить d и V_C .

Вариант 27. Дано: $V_A = 4 \text{ м/сек}$, $f = 0.1$, $\tau = 2 \text{ сек.}$, $d = 2\text{м}$.

Определить V_B и h .

Вариант 28. Дано: $V_B = 3 \text{ м/сек}$, $f = 0.3$, $l = 3\text{м}$, $h = 5\text{м}$. Определить V_A и T .

Вариант 29. Дано: $V_A = 3 \text{ м/сек}$, $V_B = 3 \text{ м/сек}$, $l = 2.5\text{м}$, $h = 20\text{м}$. Определить f и d .

Вариант 30. Дано: $f = 0.25$, $l = 4\text{м}$, $d = 3\text{м}$, $h = 5\text{м}$. Определить V_A и τ .

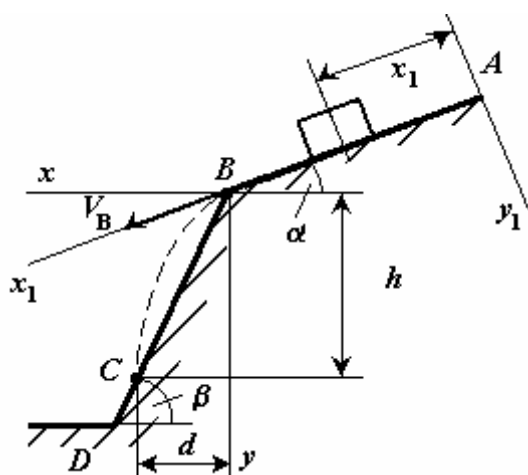


Рис. Д5.1

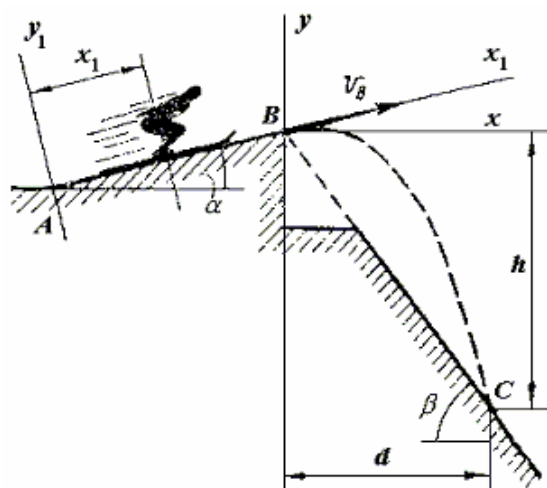


Рис. Д5.2

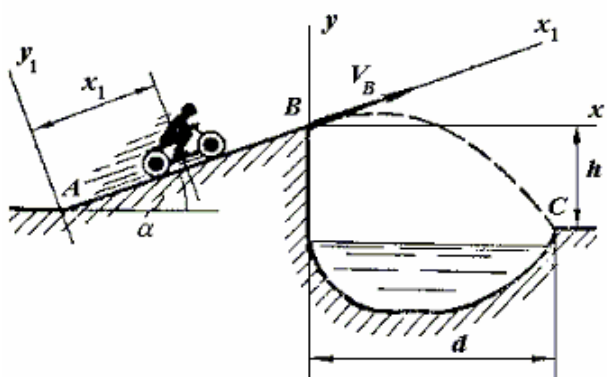


Рис. Д5.3

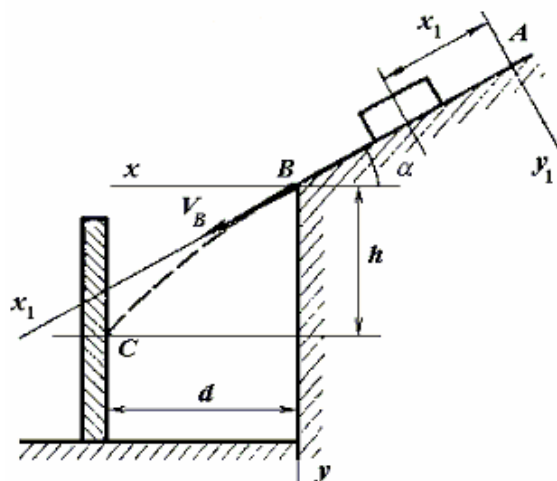


Рис. Д5.4

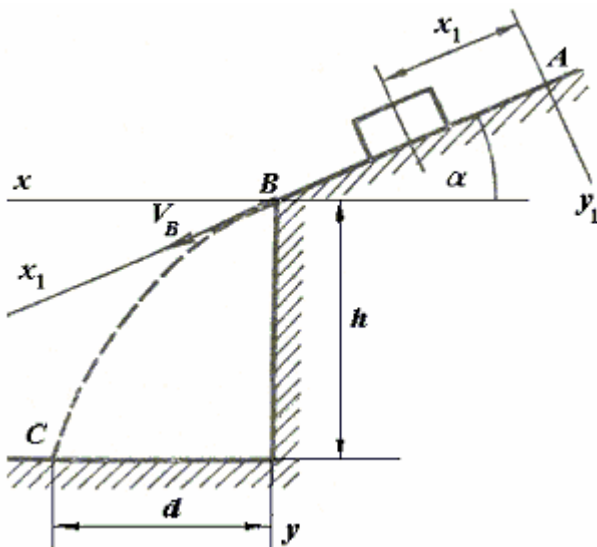


Рис. Д5.5

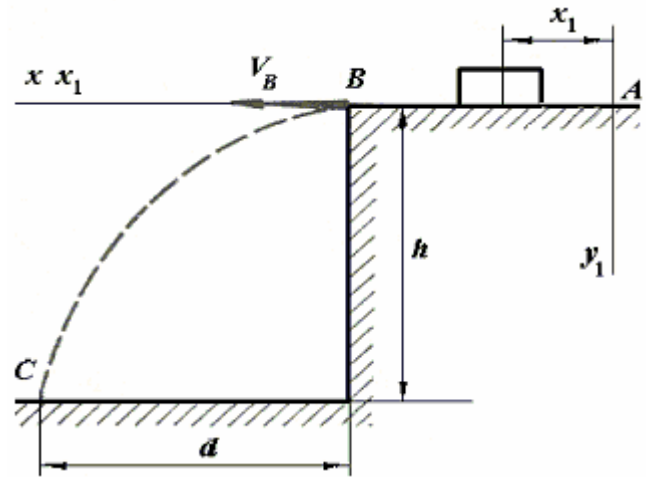


Рис. Д5.6

Указания. Задача Д5 – на интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки под действием постоянных сил. Траектория точки разбивается на два участка. Для каждого участка изображаются все силы, действующие на точку, и составляются свои дифференциальные уравнения. В случае мотоцикла активная пара сил (со стороны двигателя) и сила трения в сумме дают движущую силу P .

Пример Д5. Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB, наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l , со скоростью V_A (рис. 5.7). Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f . Лыжник от A до B движется τ сек. В точке B со скоростью V_B он покидает трамплин. Через T сек. лыжник приземляется со скоростью V_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

Лыжника принимаем за материальную точку. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

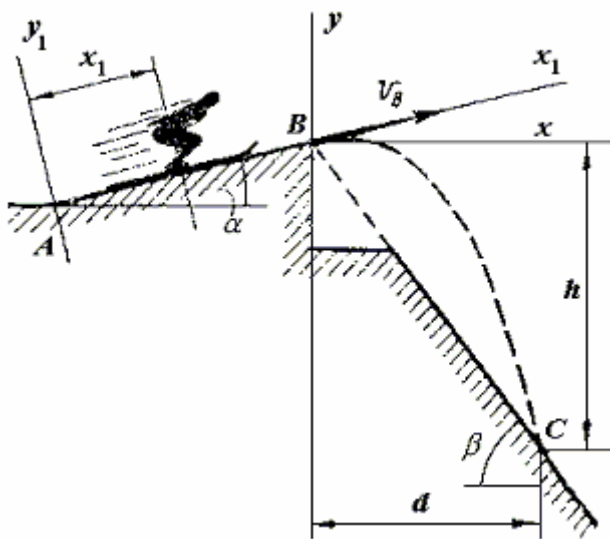


Рис. Д5.7

Исходные данные:

$$\begin{aligned} \alpha &= 15^\circ, \\ V_A &= 2 \text{ м/сек}, \\ f &= 0.2, \\ h &= 4 \text{ м}, \\ \beta &= 45^\circ. \end{aligned}$$

Определить l и уравнение траектории точки на участке BC.

Решение:

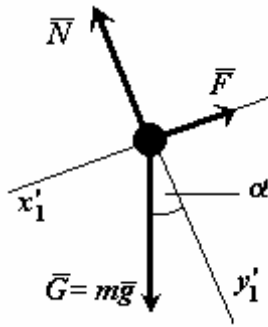


Рис. Д5.8

1) Рассмотрим движение тела на участке АВ. Тело принимаем за материальную точку. Покажем, действующие на материальную точку силы: вес $\bar{G} = m \cdot \bar{g}$, реакция связи \bar{R} , которая состоит из нормальной составляющей \bar{N} и силы трения \bar{F} , которая принимает свое предельное значение ($F = f \cdot N$), и направлена в сторону, противоположную направлению скорости.

Составим дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси координат Ax_1y_1

$$m \cdot \ddot{x}_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha - F ; \quad (1)$$

$$m \cdot \ddot{y}_1 = m \cdot g \cdot \cos \alpha - N . \quad (2)$$

Так как $y_1 = 0$, то $\ddot{y}_1 = 0$ и $N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$, а $F = f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$.

Таким образом уравнение движения точки принимает вид:

$$m \cdot \ddot{x}_1 = m \cdot g \cdot \sin \alpha - f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha \quad (3)$$

или
$$\ddot{x}_1 = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) , \quad (4)$$

с начальными условиями: $x_{10} = x_1(0) = 0$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_1(0) = V_A = 2$ (5)

Интегрируя дифференциальное уравнение (4) дважды получаем:

$$\dot{x}_1 = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot t + C_1 ,$$

$$x_1 = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2 .$$

Определяем постоянные интегрирования:

$$\dot{x}_1(0) = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot 0 + C_1 = V_A , \text{ следовательно } C_1 = V_A = 2 ;$$

$$x_1(0) = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 , \text{ след. } C_2 = 0 .$$

Таким образом

$$\dot{x}_1 = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot t + V_A ,$$

$$x_1 = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{t^2}{2} + V_A \cdot t$$

В момент времени τ

$$\dot{x}_1(\tau) = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot \tau + V_A = V_B \quad (6)$$

$$x_1(\tau) = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{\tau^2}{2} + V_A \cdot \tau = l \quad (7)$$

Два уравнения (6) и (7) содержат три неизвестных: V_B , τ и l .

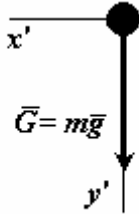


Рис. Д5.9

2) Рассмотрим движение тела на участке ВС. Рассматривать движение будем в системе координат $Bxу$. Отсчет времени начинаем с нуля. На этом участке на материальную точку действует одна сила веса $\bar{G} = m \cdot \bar{g}$.

Составим дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на оси координат x и y .

$$m \cdot \ddot{x} = 0; \quad (8) \quad \text{или} \quad \ddot{x} = 0; \quad (10)$$

$$m \cdot \ddot{y} = m \cdot g \quad (9) \quad \ddot{y} = g. \quad (11)$$

Начальные условия: $x_0 = x(0) = 0, \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0) = V_B \cdot \cos \alpha, \quad (12)$

: $y_0 = y(0) = 0, \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(0) = V_B \cdot \sin \alpha. \quad (13)$

Интегрируя эти дифференциальные уравнения дважды получаем:

$$\dot{x} = C_3, \quad \dot{y} = g \cdot t + C_4,$$

$$x = C_3 \cdot t + C_5, \quad y = g \cdot \frac{t^2}{2} + C_4 \cdot t + C_6 = 0.$$

Определяем постоянные интегрирования:

$$\dot{x}(0) = C_3 = V_B \cdot \cos \alpha, \quad \text{следовательно} \quad C_3 = V_B \cdot \cos \alpha,$$

$$x(0) = C_3 \cdot 0 + C_5 = 0, \quad \text{следовательно} \quad C_5 = 0,$$

$$\dot{y}(0) = g \cdot 0 + C_4 = V_B \cdot \sin \alpha, \quad \text{следовательно} \quad C_4 = V_B \cdot \sin \alpha,$$

$$y(0) = g \cdot \frac{0^2}{2} + C_4 \cdot 0 + C_6 = 0, \quad \text{следовательно} \quad C_6 = 0.$$

Таким образом уравнения движения имеют вид:

$$\dot{x} = V_B \cdot \cos \alpha, \quad \dot{y} = g \cdot t + V_B \cdot \sin \alpha,$$

$$x = V_B \cdot \cos \alpha \cdot t, \quad y = g \cdot \frac{t^2}{2} + V_B \cdot \sin \alpha \cdot t = 0.$$

В момент времени T

$$x(T) = V_B \cdot \cos \alpha \cdot T = d \quad (14)$$

$$y(T) = g \cdot \frac{T^2}{2} + V_B \cdot \sin \alpha \cdot T = h \quad (15)$$

Из уравнения (14) $V_B \cdot T = \frac{d}{\cos \alpha}$, подставим это значение в уравнение (15).

$$g \cdot \frac{T^2}{2} + d \cdot \operatorname{tg} \alpha = h, \quad d = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad d = \frac{4}{1} = 4 \text{ м.}$$

$$\text{Следовательно } T = \sqrt{\frac{2 \cdot (h - d \cdot \operatorname{tg} \alpha)}{g}}, \quad T = \sqrt{\frac{2 \cdot (4 - 4 \cdot 0.286)}{9.81}} = 0.773 \text{ сек}$$

$$\text{Из уравнения (14) } V_B = \frac{d}{T \cdot \cos \alpha}, \quad V_B = \frac{4}{0.773 \cdot 0.966} = 5.36 \text{ м/сек.}$$

$$\text{Из уравнения (6) } \tau = \frac{V_B - V_A}{g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)},$$

$$\tau = \frac{5.36 - 2}{9.81 \cdot (0.259 - 0.2 \cdot 0.966)} = 5.218 \text{ сек.}$$

$$\text{Из уравнения (7) } l = g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha) \cdot \frac{\tau^2}{2} + V_A \cdot \tau,$$

$$l = 9.81 \cdot (0.259 - 0.2 \cdot 0.966) \cdot \frac{5.218^2}{2} + 2 \cdot 5.218 = 19.201 \text{ м}$$

Мы получили уравнения движения и траекторию тела в параметрической форме $x(t)$, $y(t)$. Выразим время через координату x , $t = \frac{x}{V_B \cdot \cos \alpha}$ и подставим в выражение для y .

$$y = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x}{V_B \cdot \cos \alpha} \right)^2 + V_B \cdot \sin \alpha \cdot \frac{x}{V_B \cdot \cos \alpha} = 0. \text{ Это парабола.}$$

$$\text{Ответ: } l = 19.201 \text{ м.} \quad y = \frac{g \cdot x^2}{2 \cdot V_B^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Задача Д6. Использование теоремы об изменении кинетической энергии.

Механическая система состоит из ступенчатых шкивов 1 и 2 с радиусами ступеней $R_1=0.3$ м, $r_1=0.1$ м, $R_2=0.2$ м, $r_2=0.1$ м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу), грузов 3 и 4 (коэффициент трения скольжения грузов о плоскость $f=0.1$) и цилиндрического сплошного однородного катка 5 (рис. Д6.1 – Д6.6). Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям.

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки приложения силы, система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 1 и 2 действуют постоянные моменты сил сопротивления, равные соответственно M_1 и M_2 .

Определить значение искомой величины в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы \bar{F} равно s_1 . Искомая величина указана в столбце «Найти» таблицы Д6, где обозначено: ω_1 - угловая скорость тела 1; v_3 - скорость груза 3; v_{C5} - скорость центра масс катка 5 т.д.

Таблица Д6.

Номер варианта	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	m_5 , кг	M_1 , $H \cdot m$	M_2 , $H \cdot m$	$F = f(s)$, Н	s_1 , м	Найти	Номер рисунка
1	6	0	2	0	4	0	0.8	$60 \cdot (1 + s)$	1.0	v_4	Д6.1
2	0	4	6	0	2	0.6	0	$10 \cdot (6 + s)$	1.2	ω_2	Д6.1
3	2	0	0	4	8	0	0.4	$60(3 + 4s)$	0.8	v_{C5}	Д6.1
4	0	8	0	2	6	0.3	0	$30(4 + 5s)$	0.6	v_4	Д6.1
5	4	0	8	0	2	0	0.6	$60(1 + 2s)$	1.4	ω_1	Д6.1
6	6	0	2	0	4	0	0.8	$60 \cdot (1 + s)$	1.0	v_4	Д6.2
7	0	4	6	0	2	0.6	0	$10 \cdot (6 + s)$	1.2	ω_2	Д6.2
8	2	0	0	4	8	0	0.4	$60(3 + 4s)$	0.8	v_{C5}	Д6.2
9	0	8	0	2	6	0.3	0	$30(4 + 5s)$	0.6	v_4	Д6.2
10	4	0	8	0	2	0	0.6	$60(1 + 2s)$	1.4	ω_1	Д6.2
11	6	0	2	0	4	0	0.8	$60 \cdot (1 + s)$	1.0	v_4	Д6.3
12	0	4	6	0	2	0.6	0	$10 \cdot (6 + s)$	1.2	ω_2	Д6.3

Продолжение таблицы Д6

Номер вариан- та	m_1 , кг	m_2 , кг	m_3 , кг	m_4 , кг	m_5 , кг	M_1 , $H \cdot м$	M_2 , $H \cdot м$	$F = f(s)$, Н	s_1 , м	Найти	Номер ри- сунка
13	2	0	0	4	8	0	0.4	$60(3+4s)$	0.8	v_{C5}	Д6.3
14	0	8	0	2	6	0.3	0	$30(4+5s)$	0.6	v_4	Д6.3
15	4	0	8	0	2	0	0.6	$60(1+2s)$	1.4	ω_1	Д6.3
16	6	0	2	0	4	0	0.8	$60 \cdot (1+s)$	1.0	v_4	Д6.4
17	0	4	6	0	2	0.6	0	$10 \cdot (6+s)$	1.2	ω_2	Д6.4
18	2	0	0	4	8	0	0.4	$60(3+4s)$	0.8	v_{C5}	Д6.4
19	0	8	0	2	6	0.3	0	$30(4+5s)$	0.6	v_4	Д6.4
20	4	0	8	0	2	0	0.6	$60(1+2s)$	1.4	ω_1	Д6.4
21	6	0	2	0	4	0	0.8	$60 \cdot (1+s)$	1.0	v_4	Д6.5
22	0	4	6	0	2	0.6	0	$10 \cdot (6+s)$	1.2	ω_2	Д6.5
23	2	0	0	4	8	0	0.4	$60(3+4s)$	0.8	v_{C5}	Д6.5
24	0	8	0	2	6	0.3	0	$30(4+5s)$	0.6	v_4	Д6.5
25	4	0	8	0	2	0	0.6	$60(1+2s)$	1.4	ω_1	Д6.5
26	6	0	2	0	4	0	0.8	$60 \cdot (1+s)$	1.0	v_4	Д6.6
27	0	4	6	0	2	0.6	0	$10 \cdot (6+s)$	1.2	ω_2	Д6.6
28	2	0	0	4	8	0	0.4	$60(3+4s)$	0.8	v_{C5}	Д6.6
29	0	8	0	2	6	0.3	0	$30(4+5s)$	0.6	v_4	Д6.6
30	4	0	8	0	2	0	0.6	$60(1+2s)$	1.4	ω_1	Д6.6

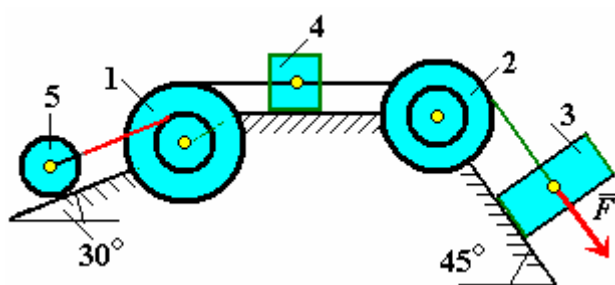


Рис. Д6.1

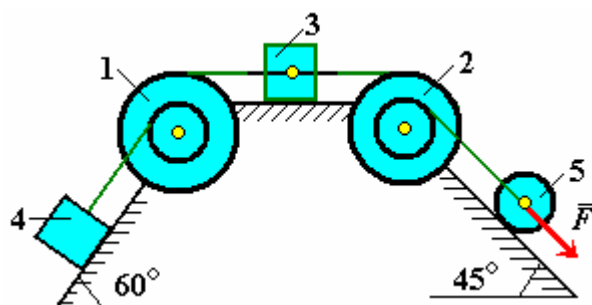


Рис. Д6.2

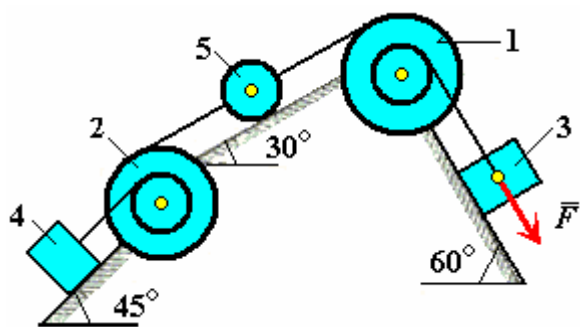


Рис. Д6.3

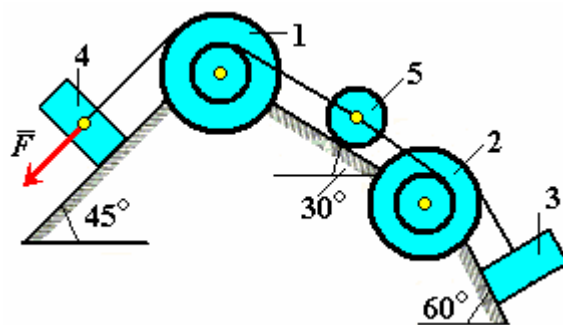


Рис. Д6.4

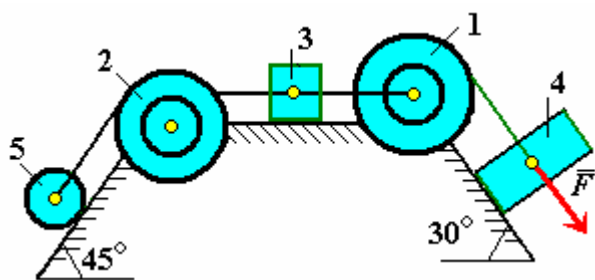


Рис. Д6.5

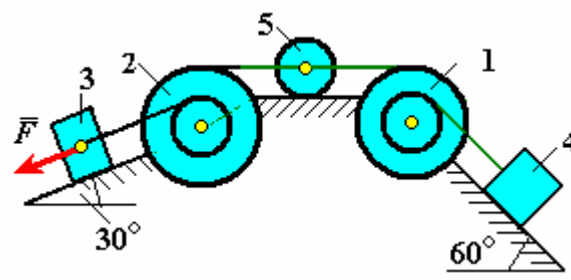


Рис. Д6.6

Указания. Задача Д6 – на применение теоремы об изменении кинетической энергии системы. При решении задачи учесть, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий всех входящих в систему тел; эту энергию нужно выразить через ту скорость (линейную или угловую), которую в задаче надо определить. При вычислении кинетической энергии катка, который совершает плоское движение, для установления зависимости между его угловой скоростью и скоростью его центра масс воспользоваться понятием о мгновенном центре скоростей (кинематика). При определении работы все перемещения следует выразить через заданное перемещение s_1 .

Когда по данным таблицы $m_3 = 0$ или $m_4 = 0$ соответствующее тело на чертеже не изображать; шкивы 1 и 2 всегда входят в систему.

Пример Д6. Механическая система состоит из ступенчатых шкивов 1 и 2 с радиусами ступеней r_1 , R_1 , r_2 , R_2 (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу), грузов 3 и 4 и цилиндрического сплошного однородного катка 5. Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы (рис. Д6.7).

Под действием силы $F = f(s)$, зависящей от перемещения s точки приложения силы, система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 1 и 2 действуют постоянные моменты сил сопротивления, равные соответственно M_1 и M_2 .

Определить величину ω_2 в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы равно s_1 .

Исходные данные: $m_1=0$ кг; $m_2=4$ кг; $m_3=6$ кг; $m_4=0$ кг; $m_5=2$ кг;

$R_1=0.3$ м; $R_2=0.2$ м; $r_1=r_2=0.1$ м; r_5 не задано (кинетическая энергия не зависит от этого радиуса);

$M_1=0.6$ Н·м; $M_2=0$ Н·м; $F=f(s)=10 \cdot (6+s)$ Н; $s_1=1.2$ м.

$f=0.1$ - коэфф. трения скольжения груза о плоскость.

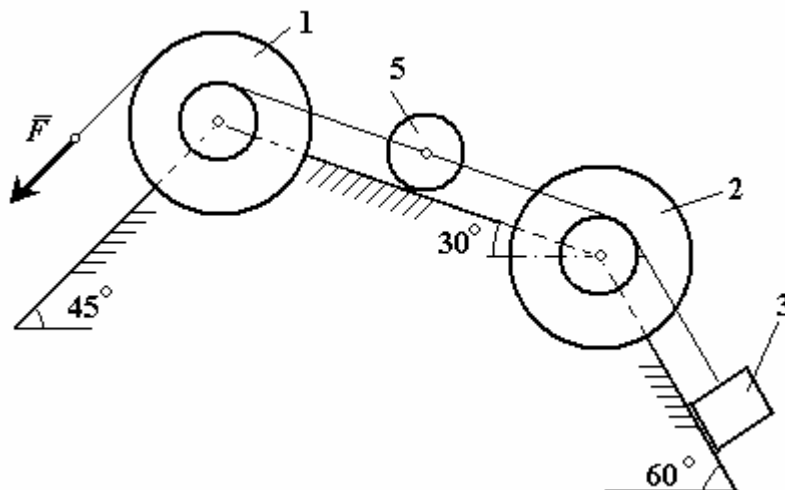


Рис. Д6.7

Решение: Груз 4 на рисунке 1 не изображен ($m_4=0$ кг).

1. Рассмотрим движение механической системы, состоящей из тел 1, 2, 3 и 5, соединенных нитями. Изобразим все действующие на систему внешние силы: активные силы \vec{F} , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 , \vec{P}_5 , момент сопротивления M_1 , нормальные реакции \vec{N}_2 , \vec{N}_3 , \vec{N}_5 и силы трения \vec{F}_3^{mp} , \vec{F}_5^{mp} (рис. Д6.8).

Для определения искомой величины воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы.

$$T_1 - T_0 = \sum A_i^e \quad (1)$$

2. Определим T_0 и T_1 . Так как в начальный момент времени система находилась в покое, то $T_0 = 0$. Величина T_1 равна сумме энергий всех тел системы.

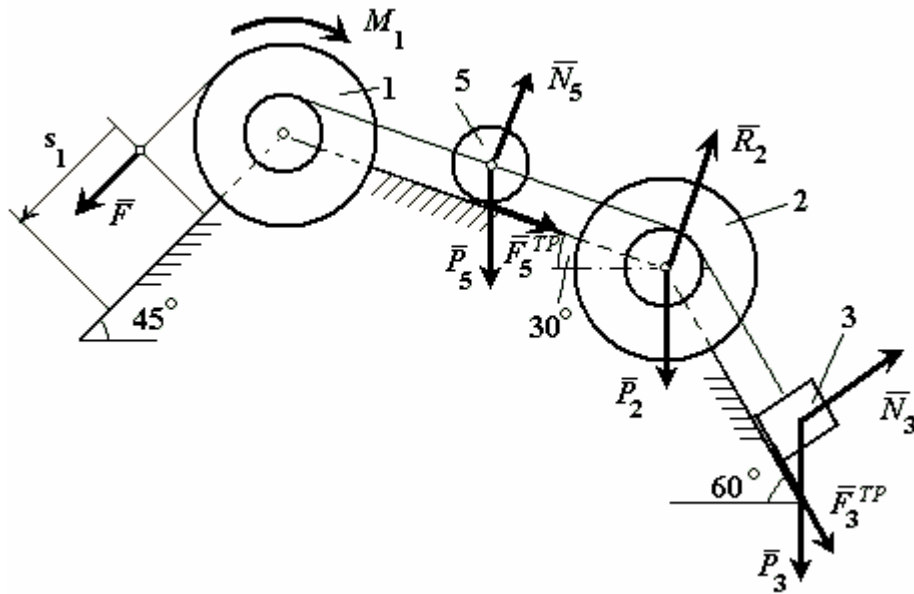


Рис. Д6.8

$$T_1 = T_1^{(2)} + T_1^{(3)} + T_1^{(5)}$$

$T_1^{(2)}$ - кинетическая энергия шкива 2, который совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси.

$T_1^{(3)}$ - кинетическая энергия груза 3, который совершает поступательное движение.

$T_1^{(5)}$ - кинетическая энергия катка 5, который совершает плоское движение.

Запишем кинематические соотношения:

Пусть v_1 - скорость точки приложения силы \vec{F} . $\omega_1 = \frac{v_1}{R_1}$ - угловая скорость шкива 1.

$$v_{C5} = v_{C3} = \omega_1 \cdot r_1 = \frac{r_1}{R_1} \cdot v_1; \quad \omega_2 = \frac{v_{C5}}{r_2} = \frac{r_1}{r_2 \cdot R_1} \cdot v_1 = \frac{v_1}{R_1}; \quad \omega_5 = \frac{v_{C5}}{r_5} = \frac{v_1}{r_5} \cdot \frac{r_1}{R_1}.$$

$$T_1^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot I_2 \cdot \omega_2^2; \quad I_2 = m_2 \cdot R_2^2,$$

следовательно
$$T_1^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R_2^2 \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 \cdot v_1^2;$$

$$T_1^{(3)} = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot v_{C3}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^2 \cdot v_1^2;$$

$$\begin{aligned}
T_1^{(5)} &= \frac{1}{2} \cdot m_5 \cdot v_{c5}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_5 \cdot \omega_5^2; \quad I_5 = \frac{m_5 \cdot r_5^2}{2}; \\
T_1^{(5)} &= \frac{1}{2} \cdot m_5 \cdot \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^2 \cdot v_1^2 + \frac{1}{4} \cdot m_5 \cdot \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^2 \cdot v_1^2 = \frac{3}{4} \cdot m_5 \cdot \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^2 \cdot v_1^2; \\
T_1 &= \left[\frac{m_2}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \frac{m_3}{2} \cdot \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^2 + \frac{3m_5}{4} \cdot \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^2 \right] \cdot v_1^2. \quad (2)
\end{aligned}$$

3. Теперь определим сумму работ всех внешних сил при том перемещении, которое будет иметь система, когда точка приложения силы \overline{F} пройдет путь s_1 .

Выразим все перемещения через заданную величину s_1 :

$\varphi_1 = \frac{s_1}{R_1}$ - угол поворота шкива 1; $s_5 = s_3 = \frac{r_1}{R_1} \cdot s_1$ - перемещение центров тяжести груза 3 и цилиндра 5. В результате получим:

$$A(F) = \int_0^{s_1} 10(6 + s) ds = 60s_1 + 5s_1^2;$$

$$A(P_3) = -P_3 \cdot \sin 60^\circ \cdot s_3 = -P_3 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot s_1;$$

$$A(P_5) = -P_5 \cdot \sin 30^\circ \cdot s_5 = -P_5 \cdot \sin 30^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot s_1;$$

$$A(M_1) = -M_1 \cdot \varphi_1 = -M_1 \cdot \frac{s_1}{R_1};$$

$$A(F_3^{TP}) = -F_3^{TP} \cdot s_3 = -f \cdot N_3 \cdot s_3 = -f \cdot P_3 \cdot \cos 60^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot s_1.$$

Работа остальных сил равна нулю:

$$A(P_2) = 0, \quad A(R_2) = 0 \quad \text{потому что ось шкива 2 неподвижна};$$

$$A(N_3) = 0 \quad \text{потому что сила перпендикулярна перемещению};$$

$$A(N_5) = 0, \quad A(F_5^{TP}) = 0 \quad \text{потому что точка приложения сил неподвижна (мгновенный центр скоростей)};$$

$$\begin{aligned}
A &= \sum A_i^e = 60s_1 + 5s_1^2 - P_3 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot s_1 - P_5 \cdot \sin 30^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot s_1 - \\
&\quad - M_1 \cdot \frac{s_1}{R_1} - f \cdot P_3 \cdot \cos 60^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot s_1 \\
A &= \left(60 - P_3 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} - P_5 \cdot \sin 30^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} - \frac{M_1}{R_1} - f \cdot P_3 \cdot \cos 60^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} \right) \cdot s_1 + 5s_1^2
\end{aligned}
\tag{3}$$

Подставляя выражения (2) и (3) в уравнение (1) получаем

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{m_2}{2} \cdot \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 + \frac{m_3}{2} \cdot \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^2 + \frac{3m_5}{4} \cdot \left(\frac{r_1}{R_1} \right)^2 \right] \cdot v_1^2 = \\
&= \left(60 - P_3 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} - P_5 \cdot \sin 30^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} - \frac{M_1}{R_1} - f \cdot P_3 \cdot \cos 60^\circ \cdot \frac{r_1}{R_1} \right) \cdot s_1 + 5s_1^2
\end{aligned}$$

Подставив числовые значения определяем скорость v_1 . $v_1 = 6.027$ м/с.

Искомая величина равна $\omega_2 = \frac{v_1}{R_1}$. $\omega_2 = 20.09$ 1/с

Ответ: $\omega_2 = 20.09$ 1/с

Задача Д7. Определение реакций опор при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

Вертикальный вал AK (рис. Д7.1 – Д7.6), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ 1/с, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в таблице Д7 в столбце 2. К валу жестко прикреплен невесомый стержень 1 длиной l_1 с точечной массой $m_1 = 4$ кг на конце и однородный стержень 2 длиной l_2 и имеющий массу $m_2 = 6$ кг. Оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы α и β - в столбцах 5 и 6. $AB = BD = DE = EK = a = 0.4$ м.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника.

Таблица Д7.

Номер варианта	Подшипник В точке	Крепление		α°	β°	Номер рисунка
		стержня 1 в точке	стержня 2 в точке			
1	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	30	45	Д7.1
2	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	45	60	Д7.1
3	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	60	75	Д7.1
4	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	75	30	Д7.1
5	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	90	60	Д7.1
6	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	30	45	Д7.2
7	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	45	60	Д7.2
8	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	60	75	Д7.2
9	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	75	30	Д7.2
10	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	90	60	Д7.2
11	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	30	45	Д7.3
12	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	45	60	Д7.3
13	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	60	75	Д7.3
14	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	75	30	Д7.3
15	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	90	60	Д7.3
16	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	30	45	Д7.4
17	<i>D</i>	<i>K</i>	<i>B</i>	30	45	Д7.4
18	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>B</i>	60	75	Д7.4
19	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	75	30	Д7.4
20	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	90	60	Д7.4
21	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	30	45	Д7.5
22	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	30	45	Д7.5
23	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	45	60	Д7.5
24	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	75	30	Д7.5
25	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	90	60	Д7.5
26	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	30	45	Д7.6
27	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>K</i>	30	45	Д7.6
28	<i>D</i>	<i>B</i>	<i>E</i>	45	60	Д7.6
29	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	75	30	Д7.6
30	<i>B</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	90	60	Д7.6

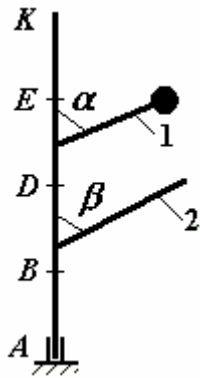


Рис. Д7.1

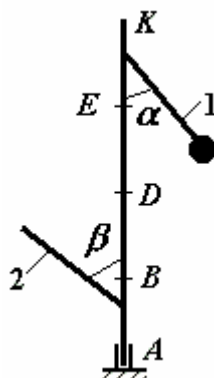


Рис. Д7.2

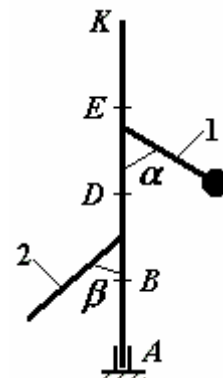


Рис. Д7.3

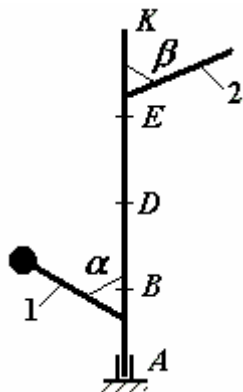


Рис. Д7.4

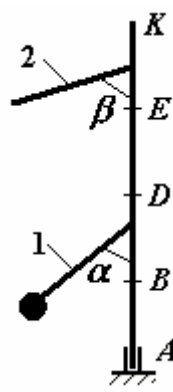


Рис. Д7.5

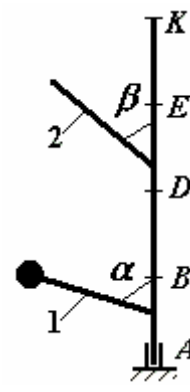


Рис. Д7.6

Указания. Задача Д7 – на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда силы инерции частиц тела имеют равнодействующую $\overline{R''}$, то численно $R'' = m \cdot a_C$, где a_C – ускорение центра масс C стержня, но линия действия силы $\overline{R''}$ в общем случае не проходит через точку C .

Пример Д7. Вертикальный вал AK , вращается с постоянной угловой скоростью ω , закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим подшипником в точке D ($AB=BD=DE=EK=a$). К валу жестко прикреплен невесомый стержень 1 длиной l_1 с точечной массой m_1 на конце и однородный стержень стержень 2 длиной l_2 и имеющий массу m_2 . Оба стержня лежат в одной плоскости (рис. Д7.7).

Исходные данные: $\omega=10$ 1/с; $a=0.4$ м; $l_1=0.4$ м; $l_2=0.6$ м;

$\alpha = 45^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $m_1=4$ кг; $m_2=6$ кг

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника.

Решение:

1. Для определения искомых реакций рассмотрим движение механической системы, состоящей из вала AK , стержня 2 и груза и применим принцип

Даламбера. Проведем вращающиеся вместе с валом оси координат xAy так, чтобы стержни лежали в плоскости xy . Изобразим все действующие на систему внешние силы: силы тяжести \overline{P}_1 , \overline{P} , составляющие \overline{X}_A , \overline{Y}_A реакции подпятника и реакцию \overline{X}_B подшипника (рис. Д7.8).

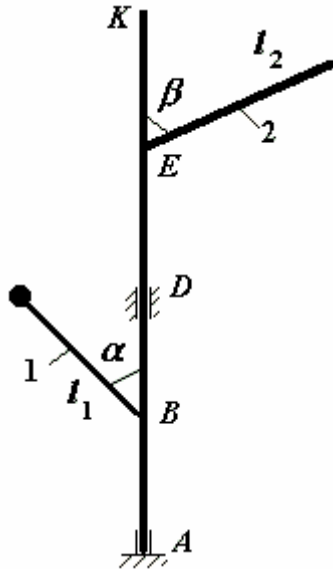


Рис. Д7.7

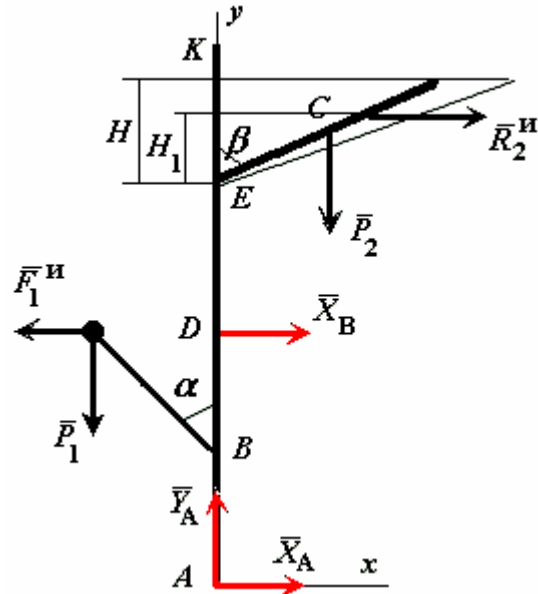


Рис. Д7.8

Согласно принципу Даламбера присоединим к этим силам силы инерции элементов стержня и груза, считая груз материальной точкой. Так как вал вращается равномерно ($\omega = \text{const}$), то его элементы имеют только нормальные ускорения \overline{a}_{ni} , направленные к оси вращения. $a_{ni} = \omega^2 \cdot h_i$, где h_i - расстояние элемента от оси.

Силы инерции F_i^u будут направлены от оси вращения. $F_i^u = \Delta m_i \cdot a_{ni} = \Delta m_i \cdot \omega^2 \cdot h_i$, где m_i - масса i -го элемента.

2. Определяем силу инерции груза. Сила инерции груза $F_1^u = m_1 \cdot \omega^2 \cdot l_1 \cdot \sin \alpha$. $F_1^u = 169.706$ Н.

3. Определяем силу инерции стержня 2. Эпюра параллельных сил инерции стержня образует треугольник и их можно заменить равнодействующей R_2^u , линия действия которой проходит через центр тяжести треугольника, т.е. на расстоянии H_1 от вершины.

$$H = l_2 \cdot \cos \beta, \quad H_1 = \frac{2}{3} \cdot H, \quad H = 0.3 \text{ м}, \quad H_1 = 0.2 \text{ м}$$

Главный вектор сил инерции $R_2'' = m_2 \cdot a_C$, где a_C - ускорение центра масс стержня 2. $a_C = \omega^2 \cdot h_C = \omega^2 \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta$; $R_2'' = m_2 \cdot \omega^2 \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta$;

$$R_2'' = 103.923 \text{ Н.}$$

4. По принципу Даламбера все действующие силы и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Запишем для плоской системы сил три уравнения равновесия.

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_A + X_B - F_1'' + R_2'' = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_A(F_i) = 0;$$

$$-X_B \cdot 2a - P_2 \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta - R_2'' \cdot (3a + H_1) + F_1'' \cdot (a + l_1 \cdot \sin \alpha) + P_1 \cdot l_1 \cdot \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3)

$$X_B = \frac{1}{2a} \cdot \left(-P_2 \cdot \frac{l_2}{2} \cdot \sin \beta - R_2'' \cdot (3a + H_1) + F_1'' \cdot (a + l_1 \cdot \sin \alpha) + P_1 \cdot l_1 \cdot \cos \alpha \right),$$

$$X_A = -X_B + F_1'' - R_2''; \quad Y_A = P_1 + P_2;$$

$$X_B = -28.946 \text{ Н}; \quad X_A = 94.729 \text{ Н}; \quad Y_A = 98.1 \text{ Н.}$$

Ответ: $X_A = 94.729 \text{ Н}; \quad Y_A = 98.1 \text{ Н}; \quad X_B = -28.946 \text{ Н.}$

Список литературы

1. Никитин Н. Н. Курс теоретической Механики: Учеб. для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов.- 5-е изд., перераб. и доп.— М.: Высш. шк., 1990.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов. – 12-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2001.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: Статика, Кинематика, Динамика: Учеб. пособие для втузов. – 8-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2001.
4. Аркуша А.И. Руководство к решению задач по теоретической механике: Учеб. пособие для вузов. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2003.
5. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов / Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 38-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2001.
6. Крамской Л.М., Семина Е.Л. Статика: Учеб. пособие. – Северодвинск, Севмашвтуз, 1999.
7. Кузьмин Д.В. Кинематика: Учеб. пособие. – Северодвинск, Севмашвтуз, 2004.
8. Кузьмин Д.В. Динамика: Учеб. пособие. – Северодвинск, Севмашвтуз, 2006.