МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Тюменский государственный нефтегазовый университет»

Институт менеджмента и бизнеса

Кафедра «Математические методы в экономике»

**Математическая статистика**

*Методические указания для практических и лабораторных работ*

*по дисциплинам «Математика», «Теория вероятностей»,*

*«Теория вероятностей и математическая статистика»*

*для студентов всех форм обучения*

*всех направлений бакалавриата*

Тюмень

ТюмГНГУ

2011

**Введение**

Получение высшего образования по всем направлениям бакалавриата требует высокой математической культуры, достаточного глубокого владения рядом специальных математических методов и умения непосредственного их применения в профессиональной деятельности. Методические указания рассчитаны на проведения практических и лабораторных занятий по данному разделу математики. Основной целью МУ является овладение методами математического аппарата для решения прикладных математических задач. В помощь студенту предлагается подробное решение практической работы «Расчет числовых характеристик выборки. Определения закона распределения случайной величины» и лабораторной работы «Построение теоретической линии регрессии в случае линейной корреляционной зависимости».

Также во время проведения практических и лабораторных занятий происходит формирование следующих общекультурных и профессиональных компетенций: способен к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения, владеет культурой мышления, способен логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь, способен собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов, способен осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач, способен использовать для решения коммуникативных задач современные технические средства и информационные технологии.

Практическая работа

«**Расчет числовых характеристик выборки.**

**Определения закона распределения случайной величины**»

*Рейтинговая оценка работы:*

1. выполнение – 10 баллов;
2. защита – 5 баллов.

*Цель работы*: ознакомление со способами построения рядов распределения и методом расчёта их числовых характеристик, применение критериев согласия.

*Содержание работы*:

1. Построить интервальный вариационный ряд. Гистограмму.
2. Перейти от интервального вариационного ряда к дискретному, заменив частичные интервалы их серединами. Построить полигон, кумуляту частот, частостей.
3. Найти эмпирическую функцию распределения.
4. Найти числовые характеристики выборки: моду, медиану, выборочное среднее, выборочное среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, асимметрию, эксцесс.
5. Сделать предварительный выбор закона распределения случайной величины.
6. Проверить согласованность эмпирической и теоретической функций распределения выбранного закона распределения с помощью критериев согласия χ2-Пирсона, Колмогорова при уровне значимости α=0,05.
7. Определить интервальные оценки для генеральной средней, генерального среднего квадратического отклонения нормального закона распределения с надёжностью *γ*=0,95.

*Методика выполнения практической работы*.

В течение пятидесяти дней фиксировались цены акций компании “Фауна”. Отклонения от номинальной стоимости даны в таблице:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **27,1** | 28 | 28,6 | 28,8 | 28,7 | 28,6 | 28,5 | 28,5 | 29,2 | 28,7 |
| 29 | 29 | 29,1 | 28,6 | 27,2 | 28,2 | 28,5 | 28,6 | 28,8 | 29,3 |
| 29,3 | 29,3 | 29,1 | 29 | 29,5 | 29,6 | 29,7 | 28,7 | 28,5 | 28,7 |
| 28,3 | 28,3 | 28,2 | 28,2 | 28,4 | 29,8 | 29,8 | 29,9 | 28,7 | 28,6 |
| 29,2 | 29 | 29,2 | 29,3 | 29,4 | 29,9 | 28,8 | 28,9 | **30,1** | 29,6 |

1. Для построения интервального ряда определим интервальный шаг выборки, воспользовавшись формулой Стерджеса *h=*(*xmax-xmin*)*/*(*1+3,322lgn*), где *n* – объём выборки (в нашем случае 50), *xmax,xmin –* соответственно наибольшее и наименьшее значения признака.

*h*=(30,1-27,1)/(1+3,322*lg*50)=0,450,5.

За начало первого интервала примем *х1*= *xmin - h*/2=26,9*.* В результате получим интервальный ряд.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Интервал (*хi;хi+1*] наблюдённых значений | Частота *ni* | Частость *wi=ni/n* |
| 26,9-27,4 | 2 | 0,04 |
| 27,4-27,9 | 0 | 0 |
| 27,9-28,4 | 7 | 0,14 |
| 28,4-28,9 | 18 | 0,36 |
| 28,9-29,4 | 14 | 0,28 |
| 29,4-29,9 | 8 | 0,16 |
| 29,9-30,4 | 1 | 0,02 |

Частота – это количество значений признака, встречающееся в данном интервале. Например, в интервал (27,9;28,4] попадает 7 значений отклонений цены от номинальной стоимости.

Гистограмма – это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников. Их основаниями служат частичные интервалы, а высоты равны частотам (частостям). Ее график изображен на рис.1.

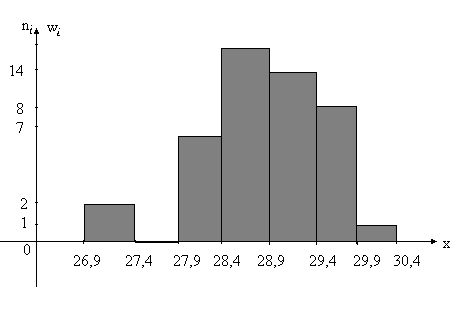
2. Построим дискретный вариационный ряд. Для этого интервалы заменяем их серединами, причем частоты остаются прежними.

Рис.1. Гистограмма

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 27,15 | 27,65 | 28,15 | 28,65 | 29,15 | 29,65 | 30,15 |
| Частота *ni* | 2 | 0 | 7 | 18 | 14 | 8 | 1 |
| Частость *wi=ni/n* | 0,04 | 0 | 0,14 | 0,36 | 0,28 | 0,16 | 0,02 |

Полигон частот (многоугольник распределения) – ломаная, соединяющая точки с координатами (*xi, ni*) или (*xi, wi*). Его график отражен ниже на рис.2.

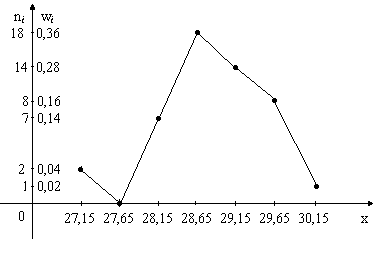


Рис.2. Полигон частот

Кумулята – это кривая накопленных частот (частостей). Для её построения найдём *.* Ее графическое изображение на рис.3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 27,15 | 27,65 | 28,15 | 28,65 | 29,15 | 29,65 | 30,15 |
| Частость *wi=ni/n* | 0,04 | 0 | 0,14 | 0,36 | 0,28 | 0,16 | 0,02 |
| Накопленная частость | 0,04 | 0,04 | 0,18 | 0,54 | 0,82 | 0,98 | 1 |

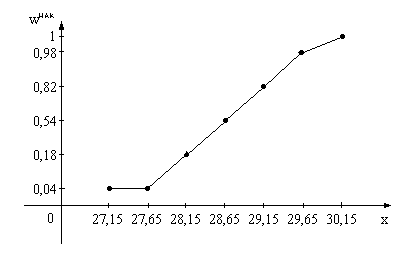


Рис.3. Кумулята

3. Эмпирической функцией распределения *F\**(*x*) называется относительная частота того, что признак примет значение, меньшее заданного *x*, т.е. *F\**(*x*)*=w*(*X<x*)*=.* Она является аналогом функции распределения случайной величины *X*.

Запишем эмпирическую функцию:



4. Модой *Мо* вариационного ряда называется варианта, которая имеет наибольшую частоту. *Мо*=28,65.

Медианой *Ме* вариационного ряда называется значение признака приходящееся на середину ранжированного ряда наблюдений.

Если *n=2k+1* (нечётное число), то *Ме=хк+1*; если *n=2k* (чётное число), то *Ме=*(*хк+1+хк*)/2. *Ме*=28,65.

Выборочной средней называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности:

.

Выборочная дисперсия

Среднее квадратическое отклонение .

Найдём коэффициент вариации .

Определим коэффициент асимметрии, которая характеризует асимметрию полигона вариационного ряда



Вычислим эксцесс, показывающий степень “крутости” выборочного распределения относительно нормального распределения:

 5. Предварительный закон распределения может определяться по величине коэффициента вариации наблюдённых данных. Например, для нормального закона распределения он приближённо соответствует интервалу [0,01; 0,40], для экспоненциального – [0,6;1,3], для логарифмического – [0,35;0,8].

Равенство выборочного среднего и выборочной дисперсии может служить основанием выбора пуассоновского распределения. Для теоретического показательного закона распределения характерно равенство выборочного среднего и выборочного среднего квадратического отклонения. В случае нормального закона распределения асимметрия и эксцесс близки к нулю. Гипотеза о нормальности закона распределения может быть принята, если выполняются неравенства:  и , где



Вычислим



Основываясь на значениях коэффициентов вариации (находится в интервале [0,01; 0,40]), асимметрии (близок к нулю), эксцесса (близок к нулю) можно предположить, что признак подчинён нормальному закону распределения.

Плотность вероятности .

Тогда функция распределения имеет вид .

Здесь  - точечная оценка параметра *а*,  - параметра .

6. Для строгой проверки гипотезы о нормальном распределении признака применим критерии согласия. Они позволяют ответить на вопрос являются ли неизбежные расхождения между эмпирическим и теоретическим распределениями случайными или теоретический закон подобран неудачно.

а) χ2-Пирсона. При его использовании сравниваются эмпирические *ni* и теоретические (предполагаемые) *ni′* частоты.

Для расчёта вероятностей *рi* попадания случайной величины Х в интервал [*xi, хi+1*] используем функцию Лапласа (см. приложение 1) в соответствии со свойством нормального распределения:



Например,

 Составим вспомогательную таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | Интервалы  [*xi, хi+1*] | Эмпирические частоты *ni* | Вероятности *pi* | Теоретические частоты  *ni′=npi* | (*ni- ni′*)2 |  |
| 1 | 26,9-27,4 | 2 | 0,0073 |  | 5,31 | 0,47 |
| 2 | 27,4-27,9 | 0 | 0,0493 |
| 3 | 27,9-28,4 | 7 | 0,1695 |
| 4 | 28,4-28,9 | 18 | 0,3053 | 15,27 | 7,48 | 0,49 |
| 5 | 28,9-29,4 | 14 | 0,2893 | 14,47 | 0,22 | 0,01 |
| 6 | 29,4-29,9 | 8 | 0,1387 |  | 0,09 | 0,01 |
| 7 | 29,9-30,4 | 1 | 0,0352 |
|  | Σ | 50 | 0,9946 | 49,76 | - | χ2набл=0,99 |

Учитывая, что в рассматриваемом эмпирическом распределении частоты первого, второго и последнего интервалов (*n1=2; n2=0 и n7=1*) меньше пяти, при использовании критерия χ2 Пирсона целесообразно объединить указанные интервалы с соседними.

Итак, фактически наблюдаемое значение статистики =0,99.

Так как новое число интервалов (с учётом объединения крайних) *m*=4, а нормальный закон имеет два параметра *a* и *σ* (r=2), то число степеней свободы *k=m-r*-1=4-2-1=1. Соответствующее критическое значение статистики при уровне значимости α=0,05    
(см. приложение 5). Так как , то нет оснований отвергать гипотезу о распределении случайной величины по нормальному закону.

б) Воспользуемся критерием Колмогорова. При его использовании сравниваются эмпирическая *F\**(*x*)и теоретическая (предполагаемая) *F(x)*функции распределения. Для построения теоретической функции распределения для нормального закона распределения воспользуемся ее выражением через функцию Лапласа:

.

Например,



Составим вспомогательную таблицу

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi* | 27,15 | 27,65 | 28,15 | 28,65 | 29,15 | 29,65 | 30,15 |
| *F\*(x)=* | 0,04 | 0,04 | 0,18 | 0,54 | 0,82 | 0,98 | 1 |
| *F(x)* | 0,002 | 0,023 | 0,12 | 0,371 | 0,692 | 0,908 | 0,985 |
| *|F\*(x)-F(x)|* | 0,038 | 0,017 | 0,06 | 0,169 | 0,128 | 0,072 | 0,015 |

Вычислим значения *D=max |F\*(x)-F(x)|=*0,169;

λнабл=.

При уровне значимости α=0,05 табличное значение λα=1,36 (см. приложение 4). Так как λнабл< λα, то нет оснований отвергать гипотезу о распределении случайной величины по нормальному закону.

7. Для нахождения интервальных оценок параметров нормального распределения воспользуемся формулами

,

*S(1-q)<σГ<S(1+q),*

где  - исправленное среднее квадратическое отклонение, *t,q* – определяются по доверительной вероятности γ и объёму выборки *n* (см. приложения 2,3)

,

*t(γ; n)*=*t*(0,95; 50)=2,009, *q(γ; n)* =*q*(0,95; 50)=0,21.

;

0,482< *σГ<*0,738.

Первое неравенство означает, что математическое ожидание отклонения цены акции от номинальной с вероятностью 95% попадёт в интервал (28,68; 29,02).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции 

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | Ф(х) | х | Ф(х) | х | Ф(х) | х | Ф(х) |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0,00 | 0,0000 | 0,32 | 0,1255 | 0,64 | 0,2389 | 0,96 | 0,3315 |
| 0,01 | 0,0040 | 0,33 | 0,1293 | 0,65 | 0,2422 | 0,97 | 0,3340 |
| 0,02 | 0,0080 | 0,34 | 0,1331 | 0,66 | 0,2454 | 0,98 | 0,3365 |
| 0,03 | 0,0120 | 0,35 | 0,1368 | 0,67 | 0,2486 | 0,99 | 0,3389 |
| 0,04 | 0,0160 | 0,36 | 0,1406 | 0,68 | 0,2517 | 1,00 | 0,3413 |
| 0,05 | 0,0199 | 0,37 | 0,1443 | 0,69 | 0,2549 | 1,01 | 0,3438 |
| 0,06 | 0,0239 | 0,38 | 0,1480 | 0,70 | 0,2580 | 1,02 | 0,3461 |
| 0,07 | 0,0279 | 0,39 | 0,1517 | 0,71 | 0,2611 | 1,03 | 0,3485 |
| 0,08 | 0,0319 | 0,40 | 0,1554 | 0,72 | 0,2642 | 1,04 | 0,3508 |
| 0,09 | 0,0359 | 0,41 | 0,1591 | 0,73 | 0,2673 | 1,05 | 0,3531 |
| 0,10 | 0,0398 | 0,42 | 0,1628 | 0,74 | 0,2703 | 1,06 | 0,3554 |
| 0,11 | 0,0438 | 0,43 | 0,1664 | 0,75 | 0,2734 | 1,07 | 0,3577 |
| 0,12 | 0,0478 | 0,44 | 0,1700 | 0,76 | 0,2764 | 1,08 | 0,3599 |
| 0,13 | 0,0517 | 0,45 | 0,1736 | 0,77 | 0,2794 | 1,09 | 0,3621 |
| 0,14 | 0,0557 | 0,46 | 0,1772 | 0,78 | 0,2823 | 1,10 | 0,3643 |
| 0,15 | 0,0596 | 0,47 | 0,1808 | 0,79 | 0,2852 | 1,11 | 0,3665 |
| 0,16 | 0,0636 | 0,48 | 0,1844 | 0,80 | 0,2881 | 1,12 | 0,3686 |
| 0,17 | 0,0675 | 0,49 | 0,1879 | 0,81 | 0,2910 | 1,13 | 0,3708 |
| 0,18 | 0,0714 | 0,50 | 0,1915 | 0,82 | 0,2939 | 1,14 | 0,3729 |
| 0,19 | 0,0530 | 0,51 | 0,1950 | 0,83 | 0,2967 | 1,15 | 0,3749 |
| 0,20 | 0,0793 | 0,52 | 0,1985 | 0,84 | 0,2995 | 1,16 | 0,3770 |
| 0,21 | 0,0832 | 0,53 | 0,2019 | 0,85 | 0,3023 | 1,17 | 0,3790 |
| 0,22 | 0,0871 | 0,54 | 0,2054 | 0,86 | 0,3051 | 1,18 | 0,3810 |
| 0,23 | 0,0910 | 0,55 | 0,2088 | 0,87 | 0,3078 | 1,19 | 0,3830 |
| 0,24 | 0,0948 | 0,56 | 0,2123 | 0,88 | 0,3106 | 1,20 | 0,3849 |
| 0,25 | 0,0987 | 0,57 | 0,2157 | 0,89 | 0,3133 | 1,21 | 0,3869 |
| 0,26 | 0,1026 | 0,58 | 0,2190 | 0,90 | 0,3159 | 1,22 | 0,3883 |
| 0,27 | 0,1064 | 0,59 | 0,2224 | 0,91 | 0,3186 | 1,23 | 0,3907 |
| 0,28 | 0,1103 | 0,60 | 0,2257 | 0,92 | 0,3212 | 1,24 | 0,3925 |
| 0,29 | 0,1141 | 0,61 | 0,2291 | 0,93 | 0,3238 | 1,25 | 0,3944 |
| 0,30 | 0,1179 | 0,62 | 0,2324 | 0,94 | 0,3264 | 1,26 | 0,3962 |
| 0,31 | 0,1217 | 0,63 | 0,2357 | 0,95 | 0,3289 | 1,27 | 0,3980 |
| 1,28 | 0,3997 | 1,64 | 0,4495 | 2,00 | 0,4772 | 2,72 | 0,4967 |
| 1,29 | 0,4015 | 1,65 | 0,4505 | 2,02 | 0,4783 | 2,74 | 0,4969 |
| 1,30 | 0,4032 | 1,66 | 0,4515 | 2,04 | 0,4793 | 2,76 | 0,4971 |
| 1,31 | 0,4049 | 1,67 | 0,4525 | 2,06 | 0,4803 | 2,78 | 0,4973 |
| 1,32 | 0,4066 | 1,68 | 0,4535 | 2,08 | 0,4812 | 2,80 | 0,4974 |
| 1,33 | 0,4082 | 1,69 | 0,4545 | 2,10 | 0,4821 | 2,82 | 0,4976 |
| 1,34 | 0,4099 | 1,70 | 0,4554 | 2,12 | 0,4830 | 2,84 | 0,4977 |
| 1,35 | 0,4115 | 1,71 | 0,4564 | 2,14 | 0,4838 | 2,86 | 0,4979 |
| 1,36 | 0,4131 | 1,72 | 0,4573 | 2,16 | 0,4846 | 2,88 | 0,4980 |
| 1,37 | 0,4147 | 1,73 | 0,4582 | 2,18 | 0,4854 | 2,90 | 0,4981 |
| 1,38 | 0,4162 | 1,74 | 0,4591 | 2,20 | 0,4861 | 2,92 | 0,4982 |
| 1,39 | 0,4177 | 1,75 | 0,4599 | 2,22 | 0,4868 | 2,94 | 0,4984 |
| 1,40 | 0,4192 | 1,76 | 0,4608 | 2,24 | 0,4875 | 2,96 | 0,4985 |
| 1,41 | 0,4207 | 1,77 | 0,4616 | 2,26 | 0,4881 | 2,98 | 0,4986 |
| 1,42 | 0,4222 | 1,78 | 0,4625 | 2,28 | 0,4887 | 3,00 | 0,49865 |
| 1,43 | 0,4236 | 1,79 | 0,4633 | 2,30 | 0,4893 | 3,20 | 0,49931 |
| 1,44 | 0,4251 | 1,80 | 0,4641 | 2,32 | 0,4898 | 3,40 | 0,49966 |
| 1,45 | 0,4265 | 1,81 | 0,4649 | 2,34 | 0,4904 | 3,60 | 0,499841 |
| 1,46 | 0,4279 | 1,82 | 0,4656 | 2,36 | 0,4909 | 3,80 | 0,499928 |
| 1,47 | 0,4292 | 1,83 | 0,4664 | 2,38 | 0,4913 | 4,00 | 0,499968 |
| 1,48 | 0,4306 | 1,84 | 0,4671 | 2,40 | 0,4918 | 4,50 | 0,499997 |
| 1,49 | 0,4319 | 1,85 | 0,4678 | 2,42 | 0,4922 | 5,00 | 0,499997 |
| 1,50 | 0,4332 | 1,86 | 0,4686 | 2,44 | 0,4927 |  |  |
| 1,51 | 0,4345 | 1,87 | 0,4693 | 2,46 | 0,4931 |  |  |
| 1,52 | 0,4357 | 1,88 | 0,4699 | 2,48 | 0,4934 |  |  |
| 1,53 | 0,4370 | 1,89 | 0,4706 | 2,50 | 0,4938 |  |  |
| 1,54 | 0,4382 | 1,90 | 0,4713 | 2,52 | 0,4941 |  |  |
| 1,55 | 0,4394 | 1,91 | 0,4719 | 2,54 | 0,4945 |  |  |
| 1,56 | 0,4406 | 1,92 | 0,4726 | 2,56 | 0,4948 |  |  |
| 1,57 | 0,4418 | 1,93 | 0,4732 | 2,58 | 0,4951 |  |  |
| 1,58 | 0,4429 | 1,94 | 0,4738 | 2,60 | 0,4953 |  |  |
| 1,59 | 0,4441 | 1,95 | 0,4744 | 2,62 | 0,4956 |  |  |
| 1,60 | 0,4452 | 1,96 | 0,4750 | 2,64 | 0,4959 |  |  |
| 1,61 | 0,4463 | 1,97 | 0,4756 | 2,66 | 0,4961 |  |  |
| 1,62 | 0,4474 | 1,98 | 0,4761 | 2,68 | 0,4963 |  |  |
| 1,63 | 0,4484 | 1,99 | 0,4767 | 2,70 | 0,4965 |  |  |

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений tγ=t(γ, n)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,95 | 0,99 | 0,999 |  | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
| 5 | 2,78 | 4,60 | 8,61 | 20 | 2,093 | 2,861 | 3,883 |
| 6 | 2,57 | 4,03 | 6,86 | 25 | 2,064 | 2,797 | 3,745 |
| 7 | 2,45 | 3,71 | 5,96 | 30 | 2,045 | 2,756 | 3,659 |
| 8 | 2,37 | 3,50 | 5,41 | 35 | 2,032 | 2,720 | 3,600 |
| 9 | 2,31 | 3,36 | 5,04 | 40 | 2,022 | 2,708 | 3,558 |
| 10 | 2,26 | 3,25 | 4,78 | 45 | 2,016 | 2,692 | 3,527 |
| 11 | 2,23 | 3,17 | 4,59 | 50 | 2,009 | 2,679 | 3,502 |
| 12 | 2,20 | 3,11 | 4,44 | 60 | 2,001 | 2,662 | 3,464 |
| 13 | 2,18 | 3,06 | 4,32 | 70 | 1,996 | 2,649 | 3,439 |
| 14 | 2,16 | 3,01 | 4,22 | 80 | 1,991 | 2,640 | 3,418 |
| 15 | 2,15 | 2,98 | 4,14 | 90 | 1,987 | 2,633 | 3,403 |
| 16 | 2,13 | 2,95 | 4,07 | 100 | 1,984 | 2,627 | 3,392 |
| 17 | 2,12 | 2,92 | 4,02 | 120 | 1,980 | 2,617 | 3,374 |
| 18 | 2,11 | 2,90 | 3,97 | ∞ | 1,960 | 2,576 | 3,291 |
| 19 | 2,10 | 2,88 | 3,92 |  |  |  |  |

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица значений q=q(γ, n)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0,95 | 0,99 | 0,99 |  | 0,95 | 0,99 | 0,999 |
| 5 | 1,37 | 2,67 | 5,64 | 20 | 0,37 | 0,58 | 0,88 |
| 6 | 1,09 | 2,01 | 3,88 | 25 | 0,32 | 0,49 | 0,73 |
| 7 | 0,92 | 1,62 | 2,98 | 30 | 0,28 | 0,43 | 0,63 |
| 8 | 0,80 | 1,38 | 2,42 | 35 | 0,26 | 0,38 | 0,56 |
| 9 | 0,71 | 1,20 | 2,06 | 40 | 0,24 | 0,35 | 0,50 |
| 10 | 0,65 | 1,08 | 1,80 | 45 | 0,22 | 0,32 | 0,46 |
| 11 | 0,59 | ,0,98 | 1,60 | 50 | 0,21 | 0,30 | 0,43 |
| 12 | 0,55 | 0,90 | 1,45 | 60 | 0,188 | 0,269 | 0,38 |
| 13 | 0,52 | 0,83 | 1,33 | 70 | 0,174 | 0,245 | 0,34 |
| 14 | 0,48 | 0,78 | 1,23 | 80 | 0,161 | 0,226 | 0,31 |
| 15 | 0,46 | 0,73 | 1,15 | 90 | 0,151 | 0,211 | 0,29 |
| 16 | 0,44 | 0,70 | 1,07 | 100 | 0,143 | 0,198 | 0,27 |
| 17 | 0,42 | 0,66 | 1,01 | 150 | 0,115 | 0,160 | 0,211 |
| 18 | 0,40 | 0,63 | 0,96 | 200 | 0,099 | 0,136 | 0,185 |
| 19 | 0,39 | 0,60 | 0,92 | 250 | 0,089 | 0,120 | 0,162 |

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Критические значения λα распределения Колмогорова: Р(λ>λα)=α

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Уровень значимости | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
| λα | 1,073 | 1,224 | 1,358 | 1,520 | 1,627 | 1,950 |

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Критические точки распределения χ2

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число степеней свободы | Уровень значимости α | | | | | |
| 0,01 | 0,025 | 0,05 | 0,95 | 0,975 | 0,99 |
| 1 | 6,6 | 5,0 | 3,8 | 0,0039 | 0,00098 | 0,00016 |
| 2 | 9,2 | 7,4 | 6,0 | 0,103 | 0,051 | 0,020 |
| 3 | 11,3 | 9,4 | 7,8 | 0,352 | 0,216 | 0,115 |
| 4 | 13,3 | 11,1 | 9,5 | 0,711 | 0,484 | 0,297 |
| 5 | 15,1 | 12,8 | 11,1 | 1,15 | 0,831 | 0,554 |
| 6 | 16,8 | 14,4 | 12,6 | 1,64 | 1,24 | 0,872 |
| 7 | 18,5 | 16,0 | 14,1 | 2,17 | 1,69 | 1,24 |
| 8 | 20,1 | 17,5 | 15,5 | 2,73 | 2,18 | 1,65 |
| 9 | 21,7 | 19,0 | 16,9 | 3,33 | 2,70 | 2,09 |
| 10 | 23,2 | 20,5 | 18,3 | 3,94 | 3,25 | 2,56 |

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

Значения F-критерия Фишера-Снедекора (α=0,05)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| k1  k2 | 1 | 2 | 3 | k1  k2 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 161 | 200 | 216 | 18 | 4,41 | 3,55 | 3,16 |
| 2 | 18,5 | 19,0 | 19,2 | 19 | 4,38 | 3,52 | 3,13 |
| 3 | 10,1 | 9,55 | 9,28 | 20 | 4,35 | 3,49 | 3,10 |
| 4 | 7,71 | 6,94 | 6,59 | 21 | 4,32 | 3,47 | 3,07 |
| 5 | 6,61 | 5,79 | 5,41 | 22 | 4,30 | 3,44 | 3,05 |
| 6 | 5,99 | 5,14 | 4,76 | 23 | 4,28 | 3,42 | 3,03 |
| 7 | 5,59 | 4,74 | 4,35 | 24 | 4,26 | 3,40 | 3,01 |
| 8 | 5,32 | 4,46 | 4,07 | 25 | 4,24 | 3,39 | 2,99 |
| 9 | 5,12 | 4,26 | 3,86 | 26 | 4,23 | 3,37 | 2,98 |
| 10 | 4,96 | 4,10 | 3,71 | 27 | 4,21 | 3,35 | 2,96 |
| 11 | 4,84 | 3,98 | 3,59 | 28 | 4,20 | 3,34 | 2,95 |
| 12 | 4,75 | 3,89 | 3,49 | 29 | 4,18 | 3,33 | 2,93 |
| 13 | 4,67 | 3,81 | 3,41 | 30 | 4,17 | 3,32 | 2,92 |
| 14 | 4,60 | 3,74 | 3,34 | 40 | 4,08 | 3,23 | 2,84 |
| 15 | 4,54 | 3,68 | 3,29 | 60 | 4,00 | 3,15 | 2,76 |
| 16 | 4,49 | 3,63 | 3,24 | 120 | 3,92 | 3,07 | 2,68 |
| 17 | 4,45 | 3,59 | 3,20 | ∞ | 3,84 | 3,00 | 3,60 |

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

Критические точки распределения Стьюдента

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Число степеней свободы k | Уровень значимости α | | | | | |
| 0,10 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,002 | 0,001 |
| 1 | 6,31 | 12,7 | 31,82 | 63,7 | 318,3 | 637,0 |
| 2 | 2,92 | 4,30 | 6,97 | 9,92 | 22,33 | 31,6 |
| 3 | 2,35 | 3,18 | 4,54 | 5,84 | 10,22 | 12,9 |
| 4 | 2,13 | 2,78 | 3,75 | 4,60 | 7,17 | 8,61 |
| 5 | 2,01 | 2,57 | 3,37 | 4,03 | 5,89 | 6,86 |
| 6 | 1,94 | 2,45 | 3,14 | 3,71 | 5,21 | 5,96 |
| 7 | 1,89 | 2,36 | 3,00 | 3,50 | 4,79 | 5,40 |
| 8 | 1,86 | 2,31 | 2,90 | 3,36 | 4,50 | 5,04 |
| 9 | 1,83 | 2,26 | 2,82 | 3,25 | 4,30 | 4,78 |
| 10 | 1,81 | 2,23 | 2,76 | 3,17 | 4,14 | 4,59 |
| 11 | 1,80 | 2,20 | 2,72 | 3,11 | 4,03 | 4,44 |
| 12 | 1,78 | 2,18 | 2,68 | 3,05 | 3,93 | 4,32 |
| 13 | 1,77 | 2,16 | 2,65 | 3,01 | 3,85 | 4,22 |
| 14 | 1,76 | 2,14 | 2,62 | 2,98 | 3,79 | 4,14 |
| 15 | 1,75 | 2,13 | 2,60 | 2,95 | 3,73 | 4,07 |
| 16 | 1,75 | 2,12 | 2,58 | 2,92 | 3,69 | 4,01 |
| 17 | 1,74 | 2,11 | 2,57 | 2,90 | 3,65 | 3,96 |
| 18 | 1,73 | 2,10 | 2,55 | 2,88 | 3,61 | 3,92 |
| 19 | 1,73 | 2,09 | 2,54 | 2,86 | 3,58 | 3,88 |
| 20 | 1,73 | 2,09 | 2,53 | 2,85 | 3,55 | 3,85 |
| 21 | 1,72 | 2,08 | 2,52 | 2,83 | 3,53 | 3,82 |
| 22 | 1,72 | 2,07 | 2,51 | 2,82 | 3,51 | 3,79 |
| 23 | 1,71 | 2,07 | 2,50 | 2,81 | 3,49 | 3,77 |
| 24 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,80 | 3,47 | 3,74 |
| 25 | 1,71 | 2,06 | 2,49 | 2,79 | 3,45 | 3,72 |
| 26 | 1,71 | 2,06 | 2,48 | 2,78 | 3,44 | 3,71 |
| 27 | 1,71 | 2,05 | 2,47 | 2,77 | 3,42 | 3,69 |
| 28 | 1,70 | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,40 | 3,66 |
| 29 | 1,70 | 2,05 | 2,46 | 2,76 | 3,40 | 3,66 |
| 30 | 1,70 | 2,04 | 2,46 | 2,75 | 3,39 | 3,65 |
| 40 | 1,68 | 2,02 | 2,42 | 2,70 | 3,31 | 3,55 |
| 60 | 1,67 | 2,00 | 2,39 | 2,66 | 3,23 | 3,46 |
| 120 | 1,66 | 1,98 | 2,36 | 2,62 | 3,17 | 3,37 |
| ∞ | 1,64 | 1,96 | 2,33 | 2,58 | 3,09 | 3,29 |