**ОБРАБОТКА ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК**

Альтернативы, рассматриваемые в процессе принятия решений, могут иметь вид элементов не-которого множества Ω (целостное представление) или точек многомерного критериального прост-ранства (критериальное представление). Кроме того, элементы множества Ω могут быть упорядоче-ны по некоторым аспектам, существенным для принятия решений.

В практических задачах принятия решений альтернативы не являются математическими объек-тами, а чаще представляют собой реальные системы (продукты, организационно-технические комп-лексы и т.д.). Поэтому получение описания альтернатив в формальном виде требует разработки ме-тодов решения следующих задач: построения множеств возможных альтернатив, формирования на-боров аспектов, существенных для оценки альтернатив, упорядочения альтернатив по аспектам, по-лучения оценок по критериям.

Все они представляют собой варианты общей ***задачи оценивания***, суть которой состоит в со-поставлении числа или нескольких чисел рассматриваемой системе (объектам, альтернативам, кри-териям). В очень многих случаях решение задач оценивания основано на использовании экспертных процедур. В рамках настоящего материала рассматриваются только ***статистические методы*** об-работки экспертных оценок. При этом результаты оценок каждого из экспертов можно рассматри-вать, как реализации некоторой случайной величины, а результирующую оценку – как среднее зна-чение тех или иных случайных величин. Поэтому для получения требуемых оценок становится воз-можным и оправданным применение методов математической ста­тистики. Они позволяют также определить согласованность мнений экспертов, значимость полученных оценок и т. д. Степень сог-ласованности указывает на качество результирующей оценки.

**1. Численные оценки.**

Задача состоит в сопоставлении оце­ниваемой системе одного числа (например, значения крите-рия, который невозможно измерить – перспективность данного проекта, срок окупаемости и т.д.). Пусть *N* экспертов дали свои оценки:

*x*1, *x*2, … , *xN*.

(типичные значения *N* от 5 до15, но бывают и другие значения).

В качестве результирующей оценки используется среднее значение

 = , (1)

а в качестве степени согласованности мнений экспертов – ***среднеквадратичное отклонение***

*s* =  (2)

(иногда наряду со среднеквадратичным отклонением рассматривается ***коэффициент вариации***

*V* = ⋅100%).

Оценки, данные экспертами, можно интерпретировать как выборку значений ***случайной вели-чины***. При этом допущении среднее значение также является случайной величиной. Известно (центральная предельная теорема), что, если  – среднее из выборки *N* значений случайной величи-ны *x* со средним *μ* и среднеквадратичным отклонением *σ*, и *N* достаточно велико, то случайная вели-чина

*z* =  (3)

имеет распределение, близкое к стандартному нормальному распределению, независимо от самой исходной случайной величины *x*. График плотности стандартного нормального распределения по-казан на рис. 1. Вероятность того, что случайная величина с указанной плотностью принимает значения между 0 и положительным числом *z*, равна заштрихованной площади. Значения площади *А*, соответствующей различным числам *z*, даны в таблице 1.

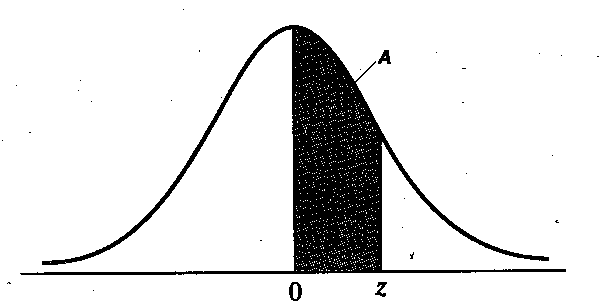


Рис. 1. Стандартное нормальное распределение

В таких ситуациях предполагается, что:

* «настоящее» среднее значение μ (именно его и оценивают эксперты) неизвестно;
* выборочное среднее, определяемое по ответам *x*1, *x*2, …, *xN* экспертов формулой (1), известно;
* среднеквадратичное отклонение σ, входящее в формулу (3), либо известно (из предшествующе-го опыта), либо неизвестно, но может быть с большой степенью точности заменено величиной *s*, вычисляемой по ответам *x*1, *x*2, … , *xN* экспертов формулой (2).

При этих предположениях ставится следующая **задача 1:**

Для данной вероятности *p* (обычно близкой к 1) найти такое число Δ, что неизвестное «настоя-щее» среднее значение μ отклоняется от его оценки  не больше, чем на Δ. Другими словами, найти Δ, такое, что неравенство

| – μ| < Δ

выполняется с заданной вероятностью *p*.

Обычно рассматриваются *p* = 0.9, 0.95 и 0.99. Большое значение вероятности *p* означает высокую степень ***статистической значимости*** полученной результирующей оценки . Нетруд-но понять, что статистическая значимость оценки растёт с ростом числа *N* экспертов.

Продемонстрируем решение задачи 1 на примере.

**Пример 1.** Десять экспертов с одинаковыми весами оценивают величину *Т*.От них получены следующие оценки:

*Т*1=33; *Т*2 = 35; *Т*3 = 32.2; *Т*4 = 34; *Т*5 = 38; *Т*6 = 34; *Т*7 = 37; *Т*8 = 40; *Т*9 = 36; *Т*10 = 35.5.

Найти число Δ, такое, что неравенство |– *Т* |< Δ для оценки выполняется с вероятностью *p* = 0.95.

**Решение.**

Шаг 1. Подставить в формулу (1) *N* = 10 и значения *Тi* вместо *хi*. Получается

= 34.47.

Шаг 2. Подставить в формулу (2) *N* = 10, значения *Тi* вместо *хi* и вместо . Получается

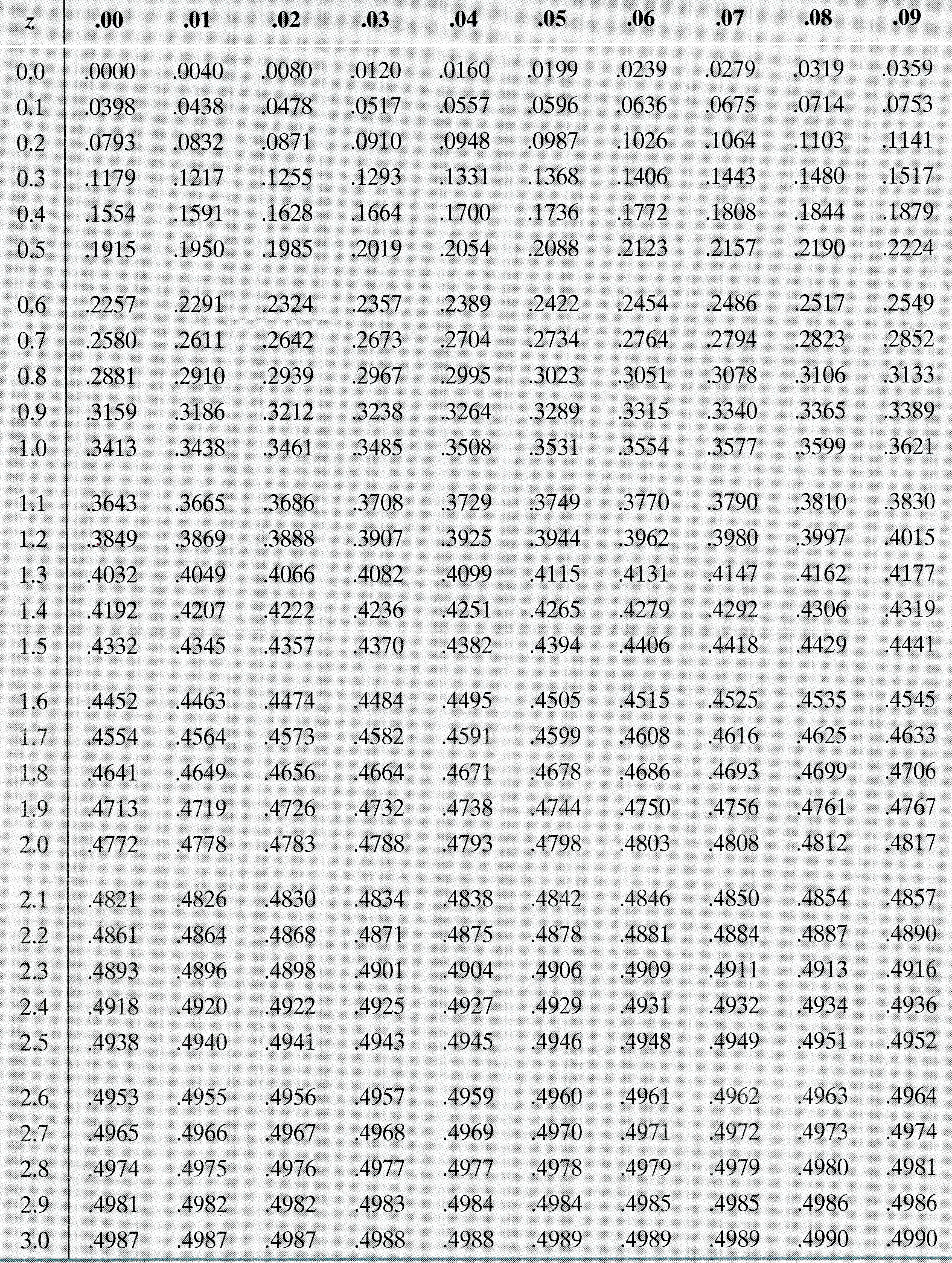
σ ≈ *s* = 2,3777.

Шаг 3. Положить *p*\*= *p* ⁄ 2 = 0.95 ⁄ 2 = 0.475.

Шаг 4. Найти в таблице 1 число *p*\*= 0.475 (если числа *p*\* в таблице 1 нет, то берётся число, ближайшее к нему). В нашем случае такое число (записанное в виде **.**4750) в таблице есть. Рассмот-рим строку и столбец, содержащие найденное число. В самой левой позиции в данной строке стоит число 1.9; на самом верху столбца стоит число .06. Сумма этих чисел равна 1.96. Это число и является результатом, полученным на шаге 4.

**Таблица стандартного нормального распределения**

Табл. 1

****

Шаг 5. Положить Δ = *z*•(σ **/**) и подставить в эту формулу вместо σ число, найденное на шаге 2, вместо *z* – число, найденное на шаге 4, и вместо *N* – число экспертов 10. Получим

Δ= 1.96•(2.3777 / ) = 1,96•(2.3777 / 3.1623) = 1.4737. ■

Таким образом, неравенство |– *Т* | < 1.4737 (напомним, что *Т* – истинное значение оценивае-мой величины) выполняется с вероятностью 0.95. Тот же вывод может быть переформулирован следующим образом: с вероятностью 0.95 оцениваемая величина *Т* находится в интер­вале (35.47 – 1.4737; 35.47 + 1.4737) = (33.9963; 36.9437). Заметим также, что все оценки не слишком значитель-но отличаются от среднего значения = 34.47. Максимальное отклонение от среднего равно 5.53, половина оценок попадает в найденный доверительный интервал, а максимальная разница между оценками равна 7.8

Рассмотрим другой случай экспертного оценивания одной численной величины.

**Пример 2.** Десять экспертов с одинаковыми весами оценивают величину *U*.От них получены следующие оценки:

*U*1=50; *U*2 = 53; *U*3 = 49; *U*4 = 47; *U*5 = 51; *U*6 = 33; *U*7 = 31; *U*8 = 28; *U*9 = 27; *U*10 = 30.

Найти число Δ, такое, что неравенство | – *U* | < Δ для оценки выполняется с вероятностью *p* = 0.95.

**Решение.**

Шаг 1. Подставить в формулу (1) *N* = 10 и значения *Ui* вместо *хi*. Получается = 39.9.

Шаг 2. Подставить в формулу (2) *N* = 10, значения *Ui* вместо *хi* и вместо . Получается σ ≈ *s* = 10.8674.

Шаг 3. Положить *p*\*= *p* ⁄ 2 = 0.95 ⁄ 2 = 0.475.

Шаг 4. Найти в таблице 1 число *p*\*= 0.475 (если числа *p*\* в таблице 1 нет, то берётся число, ближайшее к нему). В нашем случае такое число (записанное в виде **.**4750) в таблице есть. Рассмот-рим строку и столбец, содержащие найденное число. В самой левой позиции в данной строке стоит число 1.9; на самом верху столбца стоит число .06. Сумма этих чисел равна 1.96. Это число и яв-ляется результатом, полученным на шаге 4.

Шаг 5. Положить Δ = *z*•(σ **/**) и подставить в эту формулу вместо σ число, найденное на шаге 2, вместо *z* – число, найденное на шаге 4, и вместо *N* – число экспертов 10. Получим

Δ= 1.96•(10.8674 **∕**) = 1,96•(10.8674 ***/*** 3.1623) = 6.7356.

Таким образом, неравенство | – *U* | < 6.7356 (напомним, что *U* – истинное значение оцениваемой величины) выполняется с вероятностью 0.95. Тот же вывод может быть переформулирован сле-дующим образом: с вероятностью 0.95 оцениваемая величина *U* находится в интер­вале (39.9 – 6.7356; 39.9 + 6.7356) = (33.1644; 42.2096). Заметим также, что все оценки, данные экспертами, зна-чительно отличаются от среднего значения = 39.9. Максимальное отклонение от среднего равно 13.1, ни одна оценка не попадает в найденный доверительный интервал, а максимальная разница между оценками равна 26. ■

Однако отличия между экспертными оценками в примерах 1 и 2 не сводятся только к заметному увеличению среднеквадратического отклонения, доверительного интервала и пр. в примере 2 по сравнению с примером 1. Суть дела такова. Во 2-ой экспертизе оценки, данные каждой из двух групп экспертов (с 1-го по 5-ый и с 6-го по 10-ый) близки внутри каждой из групп, в то время как любые две оценки из разных групп отличаются очень сильно, причем среднее значение не относится ни к одной из групп. Ситуация напоминает старую шутку насчет средней температуры по больнице, которая оказывается нормальной – просто потому, что у большинства больных сильный жар, а умершие больные уже успели остыть. В подобных случаях говорят, что «экспертиза развалилась». Не надо любыми способами (включая давление на ту или иную группу экспертов) стремиться избе-жать заметного расхождения в оценках. Очень вероятно, что обе группы состоят из специалистов высокой квалификации, имеющих разные точки зрения на рассматриваемую ситуацию, и в некото-ром смысле обе точки зрения разумны и оправданы. Вообще говоря, стоит подробнее обсудить си-туацию с представителями обеих групп. Но в любом случае надо иметь в виду, что окончательное решение принимают не эксперты, а ЛПР, на котором лежит ответственность за все аспекты приня-тия решений, включая оценки рассматриваемых альтернатив.

**2. Ранжирование**

**Ранжирование** представляет собой процедуру упорядочения альтернатив, выполняемую экс-пертом. На основе своих знаний и опыта эксперт располагает альтернативы в порядке убывания или возрастания предпочтения. Используются два основных вида записи ранжировок. Один из них можно условно назвать ***балльным***, а другой – ***порядковым***. Объясним оба вида на простом примере.

**Пример 3.** Пусть имеется 5 школьниц и их оценки по некоторому предмету (например, по анг-лийскому языку, см. табл. 2). Школьницы упорядочены по алфавиту. Если речь идет об одних и тех же школьницах, то можно просто записать их оценки в том же порядке, в каком упорядочены школьницы: 3, 5, 4, 5, 4. Последний небольшой список и представляет собой ***балльную ранжировку*** школьниц.

**Балльная ранжировка**

Табл. 2

|  |  |
| --- | --- |
| Школьница | Английский |
| 1. Баранникова Елена | 3 |
| 2. Корчевская Валентина | 5 |
| 3. Логунова Анна | 4 |
| 4. Матвеева Алевтина | 5 |
| 5. Михайлова Елена | 4 |

На эту же ситуацию можно посмотреть другим образом. Расположим школьниц в том порядке, который соответствует их оценкам. Будем использовать знак “≻” для выражения предпочтения меж-ду альтернативами и знак “∼” для выражения их равноценности. Тогда ту же самую информацию об успехах в английском языке можно представить в виде:

Корчевская ∼ Матвеева ≻ Логунова ∼ Михайлова ≻ Баранникова.

Группы равноценных альтернатив разделены знаком ≻, а внутри групп использован знак ∼. Такой список представляет собой ***порядковую ранжировку***. Часто используются обобщенные имена объ-ектов с исходными номерами. Последнюю ранжировку можно записать в виде *x*2 ∼ *x*4 ≻ *x*3 ∼ *x*5 ≻ *x*1. ■

Каждая запись имеет свои достоинства и недостатки. Недостатком балльных ранжировок явля-ется разнообразие используемых балльных систем, затрудняющее сравнение и обработку мнений различных экспертов. Например, оценки в нашей стране ставятся по 5-балльной системе, что реаль-но означает наличие четырех градаций – 5, 4, 3, 2 (именно в таком порядке от лучшей к худшей). В США принята система из 5 оценок – A, B, C, D, F; во Франции – 20-балльная система. Во многих сферах (в том числе и весьма далеких от образования) принята 100-балльная система.

Порядковые ранжировки единообразны, однако их обработка затруднена из-за отсутствия зна-чительно более удобных числовых представлений.

Указанные обстоятельства привели к применению так называемых ***стандартных*** (или стандар-тизованных) ранжировок. Стандартная ранжировка – это балльная ранжировка с фиксированной системой баллов. Подробнее она описано в следующем абзаце.

**Правило построения стандартной ранжировки по данной балльной ранжировке.** Лучшая альтернатива – если она единственна – получает ранг 1. Если имеется 2 лучших альтернативы (рав-ноценных между собой по мнению эксперта), то они обе получают ранг 1.5; если их 3, то каждая из них получает ранг 2. При наличии *k* равноценных лучших альтернатив каждая из них получает ранг , а сумма их рангов равна . Заметим, что такова же сумма рангов у *k* лучших альтернатив, если все они не равноценны друг другу и их ранги равны 1, 2, …, *k*.

В общем случае все ранги стандартной ранжировки определяются следующим образом. Пусть ранги для первых нескольких групп лучших альтернатив уже определены, и число альтернатив, уже получивших ранги, равно *p*. Пусть имеется *r* следующих за ними по предпочтительности равноцен-ных альтернатив. Тогда все они получают ранг

. (4) В частности, при *r* = 1 получаем, как и следовало ожидать, ранг *p*+1. Процесс продолжается до ис-черпания всех альтернатив. Заметим, что в правиле выбираются лучшие альтернативы. Им могут соответствовать бóльшие или мéньшие баллы в зависимости от рассматриваемой ситуации.

**Пример 4.** Рассмотримбалльную ранжировку 3, 5, 4, 5, 4 из примера 3. Лучшими являются альтернативы с номерами 2 и 4 (у них пятерки). В соответствии с предыдущим описанием они обе получают ранги 1.5, и число *p* альтернатив, получивших ранги, равно 2. Далее имеется две следую-щих по предпочтительности равноценных альтернатив с номерами 3 и 5 (у них четверки). По формуле (4), подставляя 2 вместо *p* и 2 вместо *r*, получаем ранг 3.5, который получают альтернативы с номерами 3 и 5. После этого остается одна альтернатива (с номером 1). По той же формуле, под-ставляя 4 вместо *p* и 1 вместо *r*, получаем ранг 5. В результате из исходной ранжировки получаем стандартную ранжировку 5, 1.5, 3.5, 1.5, 3.5. Заметим, что сумма рангов у данной стандартной ран-жировки равна 15. И точно такой же будет сумма рангов у любой стандартной ранжировки 5-и аль-тернатив. ■

Имеет место почти очевидное

**Утверждение 1**. Сумма рангов в любой стандартной ранжировке *m* альтернатив равна .

Рассмотрим теперь

**Правило** **построения стандартной ранжировки по данной порядковой ранжировке.** Луч-шие равноценные альтернативы , ..., , стоящие в начале порядковой ранжировки, получают ранги , которые ставятся в ранжировку на места *i*1, ..., *i*k. Пусть ранги для первых нескольких групп лучших альтернатив уже определены, и они поставлены на требуемые места в строящейся стандартной ранжировке. Пусть число уже поставленных рангов равно *p* и группа равноценных альтернатив, следующая за рассмотренными группами в исходной порядковой ранжировке, состоит из альтернатив с номерами *j*1, ..., *jr*. Тогда все они получают ранг , который и записывается на места *j*1, ..., *jr* в строящейся стандартной ранжировке. Процесс продолжается до исчерпания всех альтернатив.

**Пример 5.** Рассмотримпорядковуюранжировку *x*2 ∼ *x*4 ≻ *x*3 ∼ *x*5 ≻ *x*1 из примера 3. Лучшими являются альтернативы *x*2 и *x*4 с номерами 2 и 4). В соответствии с правилом они обе получают ранги 1.5, которые записываются в строящуюся ранжировку на места 2 и 4:

…, 1.5, …, 1.5, … ;

число *p* поставленных рангов равно 2. Следующая группа равноценных альтернатив состоит из 2 альтернатив *x*3 и *x*5. В соответствии с правилом, ставим на места 3 и 5 ранг 3.5. Получаем ранжировку

…, 1.5, 3.5, 1.5, 3.5;

число *p* поставленных рангов равно 4. Следующая группа состоит из единственной альтернативы *x*1. В соответствии с правилом, ставим на место 1 ранг 5. Получаем окончательную стандартную ранжировку

5, 1.5, 3.5, 1.5, 3.5.

■

Естественно, что стандартные ранжировки, построенные в примерах 4 и 5, совпадают друг с другом.

Заметим следующее. По построенной стандартной ранжировке нельзя восстановить исходную балльную ранжировку (объясните, почему). В то же время по любой стандартной ранжировке легко восстановить исходную порядковую ранжировку. Правило таково. Найдем минимальные ранги в стандартной ранжировке. Пусть они находятся на местах *i*1, ..., *i*k. Тогда альтернативы , ...,

образуют 1-ую группу в исходной порядковой ранжировке. Следующую группу образуют альтерна-тивы со следующими по величине рангами, и т. д.

**Пример 6.** Рассмотрим порядковую ранжировку *x*6∼*x*1≻*x*2≻*x*5≻*x*8∼*x*7∼*x*4≻*x*3. Построим соответ-ствующую ей стандартную ранжировку. По правилу построения, на места 1 и 6 ставим ранг полтора:

1.5 , ... , ... , ... , ... , 1.5 , ... , ... ;

на места 2 и 5 ставим следующие ранги 3 и 4:

1.5 , 3 , ... , ... , 4 , 1.5 , ... , ... ;

на места 4, 7 и 8 ставим следующий ранг 6:

1.5 , 3 , ... , 6 , 4 , 1.5 , 6 , 6;

на последнее свободное место 3 ставим ранг 8:

1.5 , 3 , 8 , 6 , 4 , 1.5 , 6 , 6;

Как и ранее, убеждаемся, что сумма рангов равна 36 = . ■

Различают строгие и нестрогие ранжировки. В строгих стандартных ранжировках ранги всех альтернатив различны, в нестрогих стандартных ранжировках некоторые ранги могут совпадать (как в примерах 6 и 5). В соответствующих порядковых строгих ранжировках группы равноценных ранжировок отсутствуют, а в нестрогих – присутствуют.

В качестве альтернатив при ранжировании часто выступают критерии, которые упорядочива-ются по важности, факторы, влияющие на технологический процесс, которые упорядочиваются по степени влияния, и т. п.

Введем еще некоторые формальные понятия, связанные с экспертной ранжировкой одного экс-перта. Все указанные далее числа относятся как к исходной ранжировке (в любом виде), так и к со-поставленной ей стандартной ранжировке и могут быть определены по любой из них.

Число групп совпадающих рангов в ранжировке, данной экспертом, обозначим через *H*. В ран-жировках как из примера 3, так и из примера 6, таких групп 2, т.е. *H* = 2 (укажите их!). Далее, обозна-чим через *hd* число равных рангов в группе с номером *d* (*d* = 1, ..., *H*). В ранжировке из примера 3 *h*1 = 2, *h*2 = 2; в ранжировке из примера 6 *h*1 = 2, *h*2 = 3. Наконец, положим

*T* = . (5)

Число *T*, определенное формулой (5), называется ***показателем связанных рангов*** экспертной ран-жировки.

**Пример 7.** Рассмотрим еще раз стандартную экспертную ранжировку 1.5 , 3 , 8 , 6 , 4 , 1.5 , 6 , 6 из примера 6. Подсчитаем для нее показатель связанных рангов. В данном случае есть две группы связанных рангов, для которых (см. выше) *h*1 = 2, *h*2 = 3. Находим

= 8, = 27, − *h*1 = 6, – *h*2 = 24, (6 + 24) = 2.5.

Таким образом, для данной ранжировки показатель связанных рангов равен 2.5. ■

Для строгих ранжировок этот показатель по построению равен 0, поскольку для них *H* = 0.

**2.1. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена**. Во многих случаях возникает необходи-мость определить согласованность мнений двух экспертов, дающих свои независимые друг от друга ранжировки нескольких альтернатив. Для этого используется, в частности, коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Он определяется по двум стандартным ранжировкам следующим образом.

Обозначим ранжировки экспертов через *r*1 = (*r*11, *r*12, ..., *r*1*m*) и *r*2 = (*r*21, *r*22, ..., *r*2*m*). Положим

= , (6)

ρ = , (7)

где *T*1 и *T*2 – показатели связанных рангов для ранжировок *r*1 и *r*2, определенные формулой (5).

При отсутствии связанных рангов *T*1 = *T*2 = 0 и формула (7) заметно упрощается, принимая следующий вид:

ρ = 1 − . (8)

Коэффициент корреляции Спирмена изменяется от −1 до +1. Равенство едини­це достигается при одинаковых ранжировках, т. е. когда r1j = r2j (j = 1, ..., m). Значение ρ = −1 имеет место при про-тивоположных ранжировках, т. е. при r1j = *m* + 1 – r2j (j = 1, ..., m). При близости коэффициента кор-реляции нулю ранжировки считаются статистически независимыми.

Так же, как и в других случаях, естественно возникает вопрос о статистической значимости ко-эффициентов корреляции Спирмена. Другими словами, как при заданной значимости α (обычно близкой к 0) можно говорить о наличии (или отсутствии) статистически значимой связи между рас-сматриваемыми ранжировками. Ответ на этот вопрос таков.

При случайных ранжировках величина *z* = ρ имеет распределение, достаточно близкое к стандартному нормальному распределению уже при *m* ≥ 10. Поэтому необходимо выполнить следующие операции.

Шаг 1. При заданной значимости α положить *p*\* = 0.5 − α **∕** 2.

Шаг 2. Найти в таблице 1 число *p*\*(если числа *p*\* в таблице 1 нет, то берётся число, ближайшее к нему).

Шаг 3. Рассмотреть строку и столбец, содержащие найденное число. Сложить числа, стоящие в самой левой позиции в данной строке и в самой верхней позиции в данном столбце. Сумма *z*\* и будет результатом данного шага.

Шаг 4. Сравнить найденное число *z*\* с выборочным значением *z* = ρ. Если |z| > *z*\*, то можно с близкой к 1 вероятностью *p* = 1 − α говорить о наличии статистической зависимости между рассматриваемыми ранжировками. Если же имеет место противоположное неравенство |z| ≤ *z*\*, то на данном уровне значимости α нет оснований утверждать о существовании тесной связи между за-данными ранжировками.

**Пример 8.** Два эксперта провели ранжирование десяти альтернатив – определили степень влия-ния режимных параметров на выход продукта. Результаты приведены в табл. 3. Определить коэффи-циент ранговой корреляции Спирмена и определить его значимость при α = 0.06.

**Ранжировка 10 альтернатив**

Табл. 3

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Альтернативы (режимные параметры) | | | | | | | | | |
| А1 | А2 | А3 | А4 | А5 | А6 | А7 | А8 | А9 | А10 |
| Эксперт 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| Эксперт 2 | 2 | 3 | 1 | 4 | 6 | 5 | 9 | 7 | 8 | 10 |

В данном случае, как видно из табл. 3, связанных рангов нет (*T*1 = *T*2 = 0). Поэтому для определения выборочного значения коэффициента ранговой корреляции Спирмена можно восполь-зоваться формулой (8): ρ = 1 − , где задано формулой (6). Получаем (см. табл. 3):

= 12 + 12 + 22 + 0 +12 + 12 + 22 + 12 + 12 + 0 = 1 + 1 + 4 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 = 14. Далее, ρ = 1 − = 1 – 84 ∕ 990 = 1 – 0.0848 = 0.915 и выборочное значение *z* = 0.915 = 2.745.

Воспользуемся теперь алгоритмом, представленным перед данным примером.

Шаг.1. Положим *p*\* = 0.5 − α **∕** 2 = 0.5 – 0.03 = 0.47.

Шаг 2. В табл. 1 ближайшим к 0.47 числом является число 0.4699.

Шаг 3. В результате выполнения шага 3 получаем *z*\* = 1.88.

Шаг 4. Сравнивая значения *z*\*= 1.88 и *z* = 2.745 видим, что z > z\*, что и позволяет сделать вывод о статистической зависимости между рассматриваемыми ранжировками на уровне значимости 0.06. ■

**2.2. Коэффициент конкордации Кендалла**. Перейдем к рассмотрению вопросов оценки сог-ласованности мнений экспер­тов, когда число экспертов больше двух.

При ранжировании альтернатив эксперты обычно расходятся в мнениях. В связи с этим возни-кает необходимость в количественной оценке степени согласия экспертов. Получение количествен-ной меры согласованности мнений экспертов позволяет более обоснованно интерпретировать при-чины в расхождении мнений. В качестве меры согласованности мнений группы экспертов часто ис-пользуется дис­персионный коэффициент конкордации (или согласованности) Кендалла.

Введем необходимые понятия и обозначения. Как и ранее, число альтернатив будем обозначать через *m*, а число экспертов – через *N*. Для записи и обработки нескольких экспертных ранжировок будем пользоваться таблицей следующего вида (табл. 4).

В этой таблице по строкам стоят ранжировки, данные отдельными экспертами *m* альтернати-вам; через *rij* обозначен ранг, который *i*-ый эксперт дал *j*-ой альтернативе. В данном подразделе все ранжировки предполагаются стандартными; связанные ранги допускаются. В нижней строке табли-цы 4 стоят ***суммарные ранги***, полученные одной альтернативой у разных экспертов; в правом столбце выписаны суммы рангов, полученных всеми альтернативами у одного эксперта. Последние суммы для каждого эксперта равны (см. утверждение 1 и пример 6). В правом нижнем углу приведена сумма всех рангов, данных каждым экспертом каждой альтернативе. Она зависит только от числа экспертов *N* и числа альтернатив *m*, и не зависит от конкретных ранжировок. Величину можно рассматривать как ***средний суммарный ранг*** всех альтернатив, поскольку при умно-жении её на число альтернатив *m* получаем сумму всех суммарных рангов отдельных альтернатив. Он также зависит только от *N* и *m*. Далее средний суммарный ранг будем обозначать через .

**Экспертные ранжировки нескольких экспертов**

Табл. 4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Эксперты | Альтернативы | | | |  |
| 1 | 2 | • • • | *m* | Сумма по строке |
| 1 | *r*11 | *r*12 | • • • | *r*1*m* |  |
| 2 | *r*21 | *r*12 | • • • | *r*2*m* |  |
| • • • | • • • | • • • | • • • | • • • | • • • |
| *N* | *rN*1 | *rN*2 | • • • | *rNm* |  |
| Сумма рангов | *r*1 = | *r*2 = | • • • | *rm* = |  |

Суммарный ранг характеризует оценку данной альтернативы не каким-то одним, а всеми экс-пертами в целом. Чем меньше суммарный ранг, тем лучше альтернатива в глазах экспертов. Поэто-му ранжировка альтернатив в порядке возрастания их суммарных рангов и рассматривается как результат совместной работы экспертов, т. е. как результат экспертизы.

Проиллюстрируем введенные понятия на простом примере трех альтернатив (*m* = 3) и трех экспертов (*N* = 3).

**Пример 9**. Экспертные оценки сведены в табл. 5, построенную по аналогии с табл. 4. Суммар-ный ранг 1-ой альтернативы равен 4, 2-ой альтернативы – 6 и 3-ьей альтернативы – 8. Таким образ-ом, результирующая ранжировка 1, 2, 3 совпадает с ранжировкой, данной 1-ым экспертом. Среднее значение суммарных рангов равно = 6. ■

**Ранжировка трех альтернатив тремя экспертами**

Табл. 5

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Эксперты | Альтернативы | | |  |
| 1 | 2 | 3 | Суммы по строкам |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 2 | 2 | 1 | 3 | 6 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 6 |
| Суммарные  ранги | 4 | 6 | 8 | 18 |

**Пример 10**. Экспертные оценки сведены в табл. 6, построенную по аналогии с табл. 4. Суммар-ный ранг 1-ой альтернативы равен 6, 2-ой альтернативы – 6 и 3-ьей альтернативы – 6. Таким образом, в результирующей ранжировке все альтернативы получились равноценными. ■

**Другая ранжировка трех альтернатив тремя экспертами**

Табл. 6

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Эксперты | Альтернативы | | |  |
| 1 | 2 | 3 | Суммы по строкам |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 2 | 3 | 1 | 2 | 6 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 6 |
| Суммарные  ранги | 6 | 6 | 6 | 18 |

Интуитивно понятно, что мнения экспертов в примере 9 более-менее согласованы, а в примере 10 – совсем не согласованы. Понятие коэффициента конкордации Кендалла формализует эти важ-ные интуитвные представления. Введем необходимые формальные понятия.

Положим

*S* = = . (9)

Величина *S* характеризует отклонение суммарных рангов отдельных альтернатив от их среднего значения = . Коэффициент конкордации Кендалла представляет собой отношение конкрет-ного значения данного отклонения к его максимально возможному значению. Формула для коэффи-циента конкордации такова:

*W* = , (10)

где *Ti*– показатель связанных рангов в ранжировке *i*-го эксперта, который определяется формулой (5). Если совпадающих рангов нет, то формула (10) принимает более простой вид

*W* = . (11)

**Утверждение 2.** Максимальное значение коэффициент конкордации принимает в случае, когда все ранжировки, данные экспертами, совпадают между собой.

Это утверждение является верным как при отсутствии, так и при наличии связанных рангов. Доказательство здесь не приводится.

Что касается минимального значения, то здесь ситуация несколько более сложная. Напомним, что число = является средним арифметическим суммарных рангов *r*1, ..., *rm* (cм. табл. 4). Учитывая формулу (9), мы видим, что *S* = 0 тогда и только тогда, когда все суммарные ранги *r*1, ..., *rm* равны между собой и, следовательно, равны . Анализ простой формулы = показывает, что при нечетном *N* и четном *m* числитель дроби справа от равенства нечетен. Поэтому не может быть целым числом. В то же время ранги и их суммы при строгих ранжировках – целые числа. Поэтому для строгих ранжировок все слагаемые в сумме формулы (9) не меньше, чем ¼, откуда следует, что и само число *S*, и коэффициент конкордации *W* строго больше нуля. Однако в случае, когда *N*(*m* +1) четно, имеет место

**Утверждение 3a.** При четном *N*(*m* +1) существуют строгие ранжировки с нулевым коэффици-ентом конкордации.

Доказательство состоит в построении требуемых ранжировок в явном виде. Рассмотрим отдель-ные случаи.

1. Пусть *N* = 2, т.е. имеется всего два эксперта, а число альтернатив *m* произвольно. Пусть их ранжировки таковы:

1, 2, …, *m*–1, *m* и *m*, *m*–1, …, 2, 1

Тогда суммарные ранги для всех альтернатив совпадают, так как они равны *m* +1. Среднее значение

= также равно *m*+1, т. е. для всех альтернатив суммарные ранги равны среднему суммар-ному рангу, откуда все слагаемые в (9) равны 0. Поэтому и *W* = 0.

2. Пусть *N* = 2*p*, т.е. число экспертов четно. Этот случай сводится к предыдущему, поскольку экспертов можно разбить на пары, каждая из которых дает такие же две противоположные ранжи-ровки, как и в случае 1.

3. Пусть *N* = 3. Из четности произведения *N*(*m* +1) сразу следует, что *m* нечетно. Для большей ясности сначала приведем решение при *m* = 17. В общем случае для произвольного нечетного *m* = 2*k* – 1 структура решения остается той же.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 17 | 15 | 13 | 11 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 |
| 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | • • • | *k*−4 | *k*−3 | *k*−2 | *k*−1 | *k* | *k* +1 | *k* +2 | *k* +3 | • • • | 2*k*−4 | 2*k*−3 | 2*k*−2 | 2*k*−1 |
| *k* +1 | *k* +2 | *k* +3 | • • • | 2*k*−4 | 2*k*−3 | 2*k*−2 | 2*k*−1 | 1 | 2 | 3 | 4 | • • • | *k*−3 | *k*−2 | *k*−1 | *k* |
| 2*k*−2 | 2*k*−4 | 2*k*−6 | • • • | 8 | 6 | 4 | 2 | 2*k*−1 | 2*k*−3 | 2*k*−5 | 2*k*−7 | • • • | 7 | 5 | 3 | 1 |
| 3*k* | 3*k* | 3*k* | • • • | 3*k* | 3*k* | 3*k* | 3*k* | 3*k* | 3*k* | 3*k* | 3*k* | • • • | 3*k* | 3*k* | 3*k* | 3*k* |

4. Пусть *N* – произвольное нечетное число, бóльшее 3. Тогда *N* можно представить в виде *N* = 3 + *D*, где *D* – четное число. Поэтому требуемые ранжировки могут быть следующими: для первых трех строк – точно такими, как в случае 3, а для последующих – точно такими же, как в случае 2, т. е. разбитыми на пары противоположных ранжировок. Поскольку во всех случаях суммарные ранги будут одинаковыми для всех альтернатив, это и означает, что они совпадут со средними значени-ями. Утверждение доказано. ■

**Утверждение 3b**. При нечетном *N*(*m* +1) существуют нестрогие ранжировки с нулевым коэффи-циентом конкордации.

Доказательство утверждения также состоит в непосредственном построение требуемых ранжи-ровок. Рассмотрим нестрогую ранжировку *m* альтернатив при четном *m*, когда все альтернативы получают один и тот же ранг *r*. Поскольку сумма рангов всегда равна , то должно выполнять-ся условие *mr* = , откуда следует, что *r* = , т.е. рангом является дробное число, одно и то же для всех альтернатив. При таких совпадающих у всех экспертов ранжировках имеем совпадаю-щие суммарные ранги. Поэтому число *S* = 0, что верно и для коэффициента конкордации. Утверж-дение доказано. ■

**2.3. Статистическая значимость коэффициента конкордации**. Статистическую значимость экспертных ранжировок проверяют следующим образом. Выбираютвероятность ошибки α (α = 0.1; 0.05; 0.025; 0.01; 0.005), которая называется «уровнем значимости». В предположении случайности всех ранжировок известно, что величина *N*(*m*–1)*W* имеет *χ*2-распределение со степенью свободы *m*–1. При заданной значимости **α** и заданной степени свободы ***d*** в таблице *χ*2-распределения (табл. 7) находят соответствующее критическое значение *UC*. Затем по реально имеющимся ранжировкам вычисляется фактическое значение *Uf*  = *N*(*m* – 1)*W*. Если оказывается, что *Uf*  > *UC*, то на выбранном уровне значимости можно считать, что мнения экспертов согласованы и результирующая ранжи-ровка осмысленна. В противном случае надо признать несогласованность экспертных ранжировок и (при необходимости) продолжить исследование с целью более надежного установления истины.

**Таблица критических значений *χ*2-распределения**

Табл. 7

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***d*** | α | | | | | | | | | |
| 0.995 | 0.990 | 0.975 | 0.950 | 0.900 | 0.100 | 0.050 | 0.025 | 0.010 | 0.005 |
| 1 | 4•10-15 | 2•10-15 | 1•10-15 | 4•10-13 | 0.0158 | 2.7055 | 3.8415 | 5.0239 | 6.6349 | 7.8794 |
| 2 | 0.0100 | 0.0201 | 0.0506 | 0.1026 | 0.2107 | 4.6052 | 5.9915 | 7.3778 | 9.2103 | 10.5966 |
| 3 | 0.0717 | 0.1148 | 0.2158 | 0.3518 | 0.5844 | 6.2514 | 7.8147 | 9.3484 | 11.3449 | 12.8381 |
| 4 | 0.2070 | 0.2971 | 0.4844 | 0.7107 | 1.0636 | 7.7794 | 9.4877 | 11.1433 | 13.2767 | 14.8602 |
| 5 | 0.4117 | 0.5543 | 0.8312 | 1.1455 | 1.6103 | 9.2363 | 11.0705 | 12.8325 | 15.0863 | 16.7496 |
| 6 | 0.6757 | 0.8721 | 1.2373 | 1.6354 | 2.2041 | 10.6446 | 12.5916 | 14.4494 | 16.8119 | 18.5476 |
| 7 | 0.9893 | 1.2390 | 1.6899 | 2.1673 | 2.8331 | 12.0170 | 14.0671 | 16.0128 | 18.4753 | 20.2777 |
| 8 | 1.3444 | 1.6465 | 2.1797 | 2.7326 | 3.4895 | 13.3616 | 15.5073 | 17.5346 | 20.0902 | 21.9550 |
| 9 | 1.7349 | 2.0879 | 2.7004 | 3.3251 | 4.1682 | 14.6837 | 16.9190 | 19.0228 | 21.6660 | 23.5893 |
| 10 | 2.1558 | 2.5582 | 3.2470 | 3.9403 | 4.8652 | 15.9871 | 18.3070 | 20.4831 | 23.2093 | 25.1882 |
| 11 | 2.6032 | 3.0536 | 3.8157 | 4.5748 | 5.5778 | 17.2750 | 19.6751 | 21.9200 | 24.7250 | 26.7569 |
| 12 | 3.0738 | 3.57.06 | 4.4038 | 5.2260 | 6.3038 | 18.5494 | 21.0261 | 23.3367 | 26.2170 | 28.2995 |
| 13 | 3.5650 | 4.1069 | 5.0087 | 5.8919 | 7.0415 | 19.8119 | 22.3621 | 24.7356 | 27.6883 | 29.8194 |
| 14 | 4.0747 | 4.6604 | 5.6287 | 6.5706 | 7.7895 | 21.0642 | 23.6848 | 26.1190 | 29.1413 | 31.3193 |
| 15 | 4.6009 | 5.2293 | 6.2621 | 7.2609 | 8.5467 | 22.3072 | 24.9958 | 27.4884 | 30.5779 | 32.8013 |
| 16 | 5.1422 | 5.8122 | 6.9077 | 7.9616 | 9.3122 | 23.5418 | 26.2962 | 28.8454 | 31.9999 | 34.2672 |
| 17 | 5.6972 | 6.4078 | 7.5642 | 8.6718 | 10.0852 | 24.7690 | 27.5871 | 30.1910 | 33.4087 | 35.7185 |
| 18 | 6.2648 | 7.0149 | 8.2307 | 9.3905 | 10.8649 | 25.9894 | 28.8693 | 31.5264 | 34.8053 | 37.1564 |
| 19 | 6.8440 | 7.6327 | 8.9065 | 10.1170 | 11.6509 | 27.2036 | 30.1435 | 32.8523 | 36.1908 | 38.5822 |
| 20 | 7.4339 | 8.2604 | 9.5908 | 10.8508 | 12.4426 | 28.4120 | 31.4104 | 34.1696 | 37.5662 | 39.9968 |
| 21 | 8.0337 | 8.8972 | 10.2829 | 11.5913 | 13.2396 | 29.6151 | 32.6705 | 35.4789 | 38.9321 | 41.4010 |
| 30 | 13.7867 | 14.9535 | 16.7908 | 18.4926 | 20.5992 | 40.2560 | 43.7729 | 46.9792 | 50.8922 | 53.6720 |
| 40 | 20.7065 | 22.1643 | 24.4331 | 26.5093 | 29.0505 | 51.8050 | 55.7585 | 59.3417 | 63.6907 | 66.7659 |
| 50 | 27.9907 | 29.7067 | 32.3574 | 34.7642 | 37.6886 | 63.1671 | 67.5048 | 71.4202 | 76.1539 | 79.4900 |
| 60 | 35.5346 | 37.4848 | 40.4817 | 43.1879 | 46.4589 | 74.3970 | 79.0819 | 83.2976 | 88.3794 | 91.9517 |
| 70 | 43.2752 | 45.4418 | 48.7576 | 51.7393 | 55.3290 | 85.5271 | 90.5312 | 95.0231 | 100.425 | 104.215 |
| 80 | 51.1720 | 53.5400 | 57.1532 | 60.3915 | 64.2778 | 96.5782 | 101.879 | 106.629 | 112.329 | 116.321 |
| 90 | 59.1963 | 61.7541 | 65.6466 | 69.1260 | 73.2912 | 107.565 | 113.145 | 118.136 | 124.116 | 128.299 |
| 100 | 67.3276 | 70.0648 | 74.2219 | 77.9295 | 82.3581 | 118.498 | 124.342 | 129.561 | 135.807 | 140.169 |

Приведем некоторые примеры статистической значимости ранжировок.

**Пример 11**. Три эксперта проранжировали влияние пяти факторов, наиболее сильно влияющих на протекание химического процесса. Результаты приведены в табл. 8. Найти результирующую ран-жировку и оценить согласованность мнений экспертов.

**Ранжировка пяти альтернатив тремя экспертами**

Табл. 8

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Эксперты | Факторы | | | | |
| *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 | *x*5 |
| Э1 | 3 | 2 | 4 | 1 | 5 |
| Э2 | 1 | 2 | 4 | 3 | 5 |
| Э3 | 1 | 2 | 4 | 3 | 5 |
| Сумма  рангов | 5 | 6 | 12 | 7 | 15 |

Прежде всего определим результирующую ранжировку. Применяя к ней правило построения перед примером 4, получим стандартную ранжировку 1, 2, 4, 3, 5

В данном примере N = 3, m = 5. Рассмотрим уровни значимости α = 0.050 и α = 0.025 Степень свободы *d* = *m* – 1 = 4. В табл. 7 находим два числа на пересечении строки с *d* = 4 и столбцов с заголовками 0.050 и 0.025. Они равны 9.4877 и 11.1433.

Далее возвращаемся к фактическим ранжировкам. По формуле (9) получаем *S* = . Так как = = 9, то, используя значения *rj* из последней строки табл. 8, получаем *S* = (5 – 9)2 + (6 – 9)2 + (12 – 9)2 +(7 – 9)2 + (15 – 9)2 = 16 + 9 + 9 + 4 +36 = 74. По формуле (11) (которой можно пользоваться, так как в исходных ранжировках нет связанных рангов) получаем

*W* = = = 672 **∕** 1080 = 0.8222.

Наконец, находим *UF* = *N*(*m*-1)*W* = 3•4•0.7111 = 9.8667. Сравнивая это число с ранее приведен-ными критическими значениями 9.4877 и 11.1433, приходим к следующим выводам. Поскольку 9.4877 < 9.8667, то можно считать, что на уровне значимости 0.050 мнения экспертов согласованы. Но поскольку 9.8667 < 11.1433, то на уровне значимости 0.025 гипотезу об отсутствии связи между ран­жировками следует принять и считать, что мнения экспертов несогласованны. ■

**Пример 12**. Пусть три эксперта проранжировали влияние пяти факторов, наиболее сильно вли-яющих на протека­ние химического процесса. Результаты ранжирования представлены в табл. 9.

Требуется оценить согласованность мне­ний экспертов.

**Другая ранжировка пяти альтернатив тремя экспертами**

Табл. 9

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Эксперты | Факторы | | | | |
| *x*1 | *x*2 | *x*3 | *x*4 | *x*5 |
| Э1 | 3 | 3 | 4 | 1.5 | 1.5 |
| Э2 | 4 | 2 | 5 | 2 | 2 |
| Э3 | 3.5 | 3.5 | 5 | 2 | 1 |
| Сумма  рангов | 10.5 | 8.5 | 14 | 5.5 | 3.5 |

В данном примере также N = 3, *m* = 5, но в отличие от предыдущего примера есть связанные ранги. Поскольку зависит только от N и *m*, то, как и в предыдущем примере, = 9. Вычислим S и W:

*S* = = (10.5 – 9)2 + (8.5 – 9)2 + (14 – 9)2 + (5.5 – 9)2 + (3.5 – 9)2 = 1.52 + 0.52 + 52 + 3.52 + 5.52 = 2.25 + 0.25 + 25 + 12.25 + 30.25 = 70.

Далее, учитывая связанные ранги, находим *Т*1 = 23 – 2 = 6; *Т*2 = 33 – 3 = 24; *Т*3 = 23 – 2 = 6; подставляя *S* и *Т*1, *Т*2, *Т*3 в формулу (10) для W, получаем

W = = 0.8642,

откуда

*UF* = *N*(*m*-1)*W* = 3•4•0.8642 = 10.3704.

Сравнивая найденное значение *UF* с критическими значениями из строки 4 табл. 7, убеждаемся, что представленные ранжировки можно считать согласованными на уровнях значимости 0.1 и 0.05, и считать несогласованными на уровнях значимости 0.025, 0.01 и 0.005.

Таким образом, в реальных ситуациях однозначных ответов, как и следует ожидать, нет. Окончательное решение, как всегда, остается за ЛПР. ■

**3. Метод парных сравнений**

Одним из вопросов, возникающих при обработке экспертной информации, яв­ляется следую-щий: каким образом получить оценку всей совокупности альтернатив на основе частных результа-тов парного сравнения, не накладывая условия транзи­тивности? Рассмотрим алгоритм решения этой задачи.

Пусть один эксперт производит оценку всех пар альтернатив, давая числовую оценку:

*rij* = (12)

Как и ранее, обозначим число экспертов, производящих аналогичные попарные сравнения, че-рез N. Если при оценке пары альтернатив Ai и Аj Ni экспертов высказались в пользу предпочтения , Nj экспертов высказались наоборот − , a Nh экспертов считают эти альтернативы равноценными, то оценка математического ожидания случайной величины *rij* равна

*xij* = *M*[*rij*] = 1• + 0.5• + 0•. (13)

Общее число экспертов *N* равно *Ni* + *Nj* + *Nh*. Выражая отсюда *Nh* и подставляя в предыдущую формулу, получим

*xij* = + (*i*, *j* = 1, ..., *m*). (14)

Очевидно, что *xij* + *xji* = 1 (все же докажите это!). Положим также *xii* = (*i* = 1, ..., *m*), просто потому, что, по мнению всех экспертов, каждая альтернатива эквивалентна самой себе. Совокупность всех величин *xij* образует матрицу *X* размера пп, на основе которой можно не только построить ранжи-ровку всех альтернатив, но и определить коэф­фициенты их относительной важности.

Суть дела такова. Напомним, что собственным значением квадратной матрицы *X* называется вещественное число λ, удовлетворяющее условию **|***X* – λ*E***|** = 0, а собственным вектором, соответст-вующим этому собственному значению – вектор *k*, удовлетворяющий условию *Xk* = λ*k*. Такие числа и, следовательно, вектора, существуют не всегда, но для матриц, построенных указанным способом, они существуют. Понятно, также, что вектор *k* определен «с точностью до произвольного множите-ля», что означает следующее: для всякого собственного вектора *k* и вещественного числа α вектор α*k* также является собственным вектором. Рассмотрим максимальное собственное значение матри-цы *X* и соответствующий ему собственный вектор. Оказывается, что компоненты данного вектора можно рассматривать как сравнительную важность соответствующих (т.е. имеющих те же номера, что и указанные компоненты) альтернатив. А ранжировать их нужно в порядке убывания компонент вектора *k*.

Решение уравнения **|***X* – λ*E***|** = 0 и последующее решение системы *m* линейных уравнений с *m* переменными – вычислительно сложная задача. Тем не менее, обе эти задачи можно «обойти», если воспользоваться известным итерационным методом. Для этого сделаем следующее.

Зададим произвольный начальный вектор *k*0. Определим последовательность векторов *k*1, *k*2, ... следующим образом:

*kn* = *Xkn*−1 (*n* = 1, 2, ...) (15)

Имеет место следующее общее

**Утверждение 4.** 1. Если все элементы матрицы *X* – положительные числа, то у нее существуют положительные собственные значение, и все компоненты собственного вектора, соответствующего максимальному собственному значению, положительны.

2. Если все компоненты начального вектора *k*0 положительны, то последовательность векторов *k*1 ∕ *l*1, *k*2 ∕ *l*2, ..., *kn* ∕ *ln*, ... (здесь векторы *k*1, *k*2, ..., *kn*, … определены формулой (15), числа *ln* равны максимальной компоненте вектора *kn*, *n* = 1, 2, ...) сходится к собственному вектору, соответству-ющему максимальному собственному значению.

3. Отношение λ*n* любой компоненты ненормированного вектора *kn* к той же компоненте вектора *kn*−1 стремится к максимальному собственному значению исходной матрицы *X*. ■

Вместо того, чтобы делить вектора на максимальную компоненту, можно воспользоваться лю-бой другой эквивалентной ей нормой, например, делить вектор на его длину, на сумму модулей ком-понент и др. Результат от этого не меняется. «Техническая» сходимость (т.е. совпадение компонент последовательных векторов *k*1, *k*2, ..., *kn*, … на уровне 1%) обычно наступает после 3-4 итераций.

**Пример 13.** Пусть попарные сравнения 4-ех альтернатив 3-мя экспертами представлены следующими тремя матрицами *R*1, *R*2 и *R*3 (см. (11)):

*R*1 = ; *R*2 = ; *R*2 = .

Далее, в соответствие с формулой (14), подсчитаем элементы матрицы *X* = (*xij*) (*i*, *j* = 1, 2, 3, 4):

*x*12 = + = ; *x*13 = + = ; *x*14 = + = ; *x*23 = + = ; *x*24 = + = ; *x*34 = + = .

Таким образом, найдены все элементы *xij*, у которых *i* < *j*, которые располагаются выше главной диагонали матрицы *X*. Элементы на главной диагонали матрицы равны по построению. Наконец, оставшиеся 6 элементов, расположенные под главной диагональю матрицы *X*, определяются как дополнения до 1 элементов, расположенных над главной диагональю, в силу равенства *xij* + *xji* = 1:

*x*21 = 1−= ; *x*31 =1− = ; *x*41 =1− = ; *x*32 = 1− = ; *x*42 = 1− = ; *x*43 = 1− = .

Вся матрица целиком оказывается таковой:

*X* = .

Далее, пусть для некоторой матрицы *X* выполняется равенство *Xk* = λ*k*. Умножим обе части послед-него равенства на произвольное не равное 0 число α и расставим скобки:

(α*X*)*k* = (αλ)*k*. (16)

Равенство (16) означает, что тот же самый вектор *k* является собственным вектором матрицы α*X*, соответствующий собственному значению αλ. При положительном α собственное значение будет положительным и максимальным, но уже не для исходной матрицы *X*, а для новой матрицы α*X*. Конечно, для нее также справедливо утверждение 4. Поэтому можно просто умножить все элементы матрицы *X* на общий знаменатель 6. Получим матрицу

*Y* = .

Именно для этой матрицы осуществляется итеративный процесс (15). Начинаем с вектора *k*0 = (1, 1, 1, 1). Получаем

*Yk*0 = = = *k*1.

Далее, получаем

*Yk*1 = = = = *k*2

и

*Yk*2 = = = = *k*3.

Теперь, в соответствие с описанием из утверждения 4, разделим каждый из векторов *k*1, *k*2, *k*3 на его максимальную компоненту. Получим векторы

*v*1 = (0.529; 1.000; 0.647; 0.647);

*v*2 = (0.533; 1.000; 0.604; 0.604);

*v*3 = (0.538; 1.000; 0.605; 0.605).

«Техническая» сходимость очевидна: самая большая разница между компонентами векторов *v*3 и *v*2 составляет около 0.005 или менее одного процента. Такая точность более чем достаточна для практических задач, особенно, если иметь в виду, что речь идет об человеческой оценке качествен-ных величин (типа сравнительной важности критериев), которые в принципе не могут быть измере-ны. Впрочем, это замечание относится ко всем рассмотренным в данном материале методам.

Наконец, оценим максимальное собственное значение для матрицы *Y*. Получаем λ1= 105 ∕ 9 = 11.667. Далее λ2 = 1185 ∕ 105 = 11.286. Возвращаясь к формуле (16) и учитывая, что в данном случае

α = 6, получаем, что максимальное собственное значение для исходной матрицы *X* примерно равно 11.286 **∕** 6 ≈1.88.

**ЗАДАНИЯ**

**Задание 1**. Найти средние значения и доверительные интервалы для заданного набора оценок при вероятности *P* = 0.95 и *P* = 0.99. См. для образца примеры 1 и 2.

13) 1.5 1.5 3 4.5 4.5 6 1 2.5

**Задание 2.** Представить данные порядковые ранжировки в виде стандартных ранжировок и определить показатель связанных рангов. Для образца см. примеры 5 и 6, правило перед примером 5 и пример 7.

13) *x*1≻*x*2∼*x*5≻*x*3≻*x*6∼*x*7≻*x*8≻*x*4

**Задание 3.** Исходя изранжировок, заданных экспертами:

1. Найти групповую (результирующую) группировку в балльном и порядковом виде.

2. Оценить согласованность мне­ний экспертов на уровне значимости 0.100, 0.050, 0.025, 0.010, 0.005. Для образца см. примеры 11 и 12. Буква «м» рядом с номером варианта означает, что лучшими альтернативами являются те, у которых оценки ниже; буква «б» там же означает, что лучшими альтернативами являются те, у которых оценки выше.

13-м

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2.5 | 2.5 | 3 | 5 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | 5 |
| 3 | 5 | 2 | 2 | 5 | 1 |
| 2 | 4 | 2 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 3 | 4 | 5 |

**Задание 4.** Посчитать коэффициент корреляции Спирмена для первой и последней ранжировки, данной экспертами. Данные взять из вариантов к заданию 3 с теми же номерами. Для образца см. пример 8.

**Задание 5.** Исходя из представленными несколькими экспертами матрицами попарных сравне-ний альтернатив, найти их веса методом, изложенным в разделе 3. Для образца см. пример 13. В каждый вариант задания входит три матрицы из приведенных ниже матриц *R*1 – *R*7.

*R*1 = ; *R*2 = ; *R*3 = ; *R*4 = ;

*R*5 = ; *R*6 = ; *R*7 = .

13) *R*1, *R*5, *R*6;