Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
(математика – 1)

Методические указания и контрольная работа № 1
для студентов 1-го курса заочной формы обучения

Санкт-Петербург
2012

Составители: Ю.А.Гусман, О.Е.Дик, М.А.Миркин.

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор В.Г.Фарафонов

Методические указания и контрольная работа № 1 предназначены для студентов 1-го курса экономического факультета ГУАПа заочной формы обучения.

Подготовлены к публикации кафедрой высшей математики и рекомендованы к изданию редакционно-издательским советом Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

Редактор
Верстальщик

Сдано в набор Подписано к печати
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.-печ. Л.
Уч.- изд. Л. Тираж экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., д. 67

Общие методические указания

Общий курс математики является фундаментом математического образования. Его изучение необходимо для успешного усвоения в дальнейшем общенаучных и специальных дисциплин.

Основной формой обучения студента заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, самопроверка, выполнение контрольных работ. В помощь студентам-заочникам в университете организовано чтение лекций и практические занятия. Указания студенту по текущей работе даются также в процессе рецензирования контрольных работ. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса высшей математики является сдача экзаменов.

Курс высшей математики (математика – 1) изучается студентами 1-го курса экономического факультета в первом и втором семестре. В первом семестре студенты сдают два экзамена: первый – по линейной алгебре и аналитической геометрии; второй – по дифференциальному и интегральному исчислению одной переменной. Во втором семестре студенты изучают теорию рядов и функций нескольких переменных.

Для изучения теоретического материала и решения задач по этим темам рекомендуется следующая литература:

1. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике. М.: Айрис-Пресс, 2000.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре.- М.: Добросвет, Издательство «КДУ», 2009. 320 с.
3. Высшая математика для экономистов. Под ред. Проф. Н.Ш.Кремера. М.: «Юнити», 2003.
4. Математика для экономистов. М.С.Красс, Б.П.Чупрунов. – СПб.: «Питер», 2007.

В процессе изучения курса высшей математики студенты должны выполнить на первом курсе 3 контрольные работы. В первом семестре студенты выполняют две контрольные работы по математике. Данное пособие посвящено линейной алгебре и аналитической геометрии; выполнение 1-й контрольной работы покажет степень усвоения этой темы.

Указания по выполнению контрольных работ

Студент должен выполнять контрольные работы по заданным задачам конкретного варианта, присвоенному ему в деканате.

При оформлении и выполнении контрольных работ необходимо соблюдать следующие правила:

1. В начале работы должны быть ясно написаны фамилия студента, инициалы, номер студенческого билета, шифр, номер контрольной работы и дата отсылки работы в университет.
2. Контрольная работа выполняется в тетради, а не на листах, обязательно чернилами или шариковой ручкой (но не красными) с полями для замечаний рецензента.
3. Решения задач контрольной работы располагаются в порядке номеров, указанных в контрольных работах; перед решением задачи должно быть записано полностью ее условие, исходя из данных своего варианта задания. В том случае, когда несколько задач имеют общую формулировку, переписывая условие задачи, следует заменить общие данные конкретными из своего варианта.
4. Решения задач и объяснения к ним должны быть подробными, аккуратными, без сокращений слов; чертежи можно выполнять от руки.

Получив из университета прорецензированную работу, студент должен исправить в ней все отмеченные ошибки и недочеты. Если работа не зачтена, она должна быть в короткий срок либо выполнена заново целиком, либо должны быть заново решены задачи, указанные рецензентом. Зачтенные контрольные работы предъявляют преподавателю на экзамене.

Краткие теоретические сведения

1. Линейная алгебра

1.1 Матрицы; действия над ними

1.1.1 Основные определения

Рассмотрим некоторую прямоугольную таблицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & ..., & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & ..., & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}, & a_{m2}, & ..., & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|,$$

элементы которой числа a_{ij} расположены в определенном порядке по m строкам и n столбцам. Двойной индекс ij указывает место элемента, т.е. номер строки i и номер столбца j, занимаемое этим элементом. Число строк и столбцов $[m\times n]$ характеризует размеры матрицы.

Матрица называется нулевой, если все ее элементы равны нулю. Две матрицы ***A*** и ***B*** называются равными, если они имеют одинаковые размеры (порядок) и равны их соответствующие элементы.

Матрица ***B*** называется транспонированной по отношению к матрице ***A***, если $b_{ij}=a_{ji}$, т.е. столбцы матрицы ***A*** являются строками матрицы ***B***.Такая матрица обозначается $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. Матрица называется квадратной, если число ее строк равно числу столбцов. Квадратная матрица называется симметричной, если $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. В квадратной матрице диагональ ее, содержащая элементы a_{ii}, называется главной. Если в квадратной матрице все элементы главной диагонали равны единице, а все остальные элементы матрицы равны нулю, то матрица называется единичной и обозначается $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & ..., & 0 \\ 0, & 1, & ..., & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0, & 0, & ..., & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$

1.1.2 Линейные операции над матрицами

Суммой матриц ***A*** и ***B*** одного порядка называется матрица *C* того же порядка, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов данных матриц (***C***=***A***+***B***, если $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$).

Произведением матрицы ***A*** на число λ называется матрица ***B*** того же порядка, каждый элемент которой равен произведению числа λ на соответствующий элемент матрицы (***B***=λ***A***, если $b_{ij}=\lambda a_{ij}$).

Матрица *B* называется противоположной матрице ***A*** , если сумма ***A*** и ***B*** есть нулевая матрица.

Разностью матриц ***A*** и ***B*** одного порядка называется матрица ***C*** того же порядка, если ***B***+***C***=***A*** и обозначается ***A***-***B***=***C***.

Умножение матриц ***A*** и ***B*** определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Произведением двух матриц ***A*** размерами [$m\times$n] и ***B*** размерами [n$\times p$] называется такая матрица ***C*** размерами [$m\times p$], каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i - строки матрицы ***A*** и j - го столбца матрицы ***B***.

Пример 1.1.1

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}, & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22},\\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}, & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}\end{pmatrix}.$$

1.2 Определители

Сопоставим квадратной матрице ***A*** некоторое число Δ***A*** по определенному правилу. Определения (ради простоты) проведем для матриц порядка не более трех.

Пусть матрица $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Тогда определитель второго порядка

$$\Delta\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a_{11}, & a_{12}\\ a_{21}, & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}. \qquad (1.1)$$

Сформулируем простейшие свойства определителей:

Свойство 1. Величина определителя не изменится, если строки его заменить столбцами.

Свойство 2. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

Свойство 3 Множитель, общий для элементов какой-либо строки (столбца), можно вынести за знак определителя.

Свойство 4. Величина определителя не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить слагаемое, пропорциональное элементам другой строки (столбца).

Свойство 5. Если в определителе какие-либо две строки (столбца) пропорциональны, то определитель равен нулю.

Запишем определитель третьего порядка:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1.2)$$

Минором $\Delta_{ij,}$, соответствующим элементу a_{ij} определителя (1.2), назовем определитель второго порядка, получаемый вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Алгебраическим дополнением, соответствующим элементу a_{ij} определителя (1.2), назовем число, равное $(-1)^{i+j}\,\Delta_{ij,}$.

Свойство 6. Определителем третьего порядка называется сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

1.3 Обратная матрица

Рассмотрим квадратную матрицу ***A*** размерами n×n.

Квадратная матрица ***B*** размера n×n называется обратной для квадратной матрицы ***A***, если выполнены условия ***A***·***B***=***B***·***A***=**E**.

Матрицу ***B*** принято обозначать ***B***=***A***$^{-1}$. Эту матрицу можно найти, если определитель матрицы ***A*** отличен от нуля.

Последовательность операций нахождения обратной матрицы, например, следующая: запишем союзную матрицу, состоящую из алгебраических дополнений матрицы *A*, транспонируем ее и делим на величину определителя матрицы ***A***.

Пример 1.1

Найти обратную матрицу для матрицы $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

$|\mathbf{A}| = 2\cdot 4 - \ -1\ \cdot 3 = 11 \neq 0.$

Союзная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Транспонированная союзная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Обратная матрица $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$.

1.4 Разрешимость систем линейных уравнений.

Одной из характеристик матрицы является ранг матрицы.

Рассмотрим произвольную матрицу ***A*** размера *m*×n

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Вычеркивая то или иное количество строк и столбцов ее, можно получить квадратные матрицы различного порядка. Определители таких матриц назовем минорами различного порядка (в том числе минорами первого порядка назовем сами элементы матрицы ***A***.

Рангом матрицы ***A*** называется число *r* равное наивысшему порядку минора, отличного от нуля, который можно составить из элементов матрицы ***A***.

Системой из *m* линейных уравнений с n неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.4}$$

где a_{ij} - коэффициенты этой системы, x_1, x_2,…,x_n - неизвестные, b_1, b_2,…,b_m - свободные члены.

Рассмотрим матрицу из коэффициентов при неизвестных, матрицу-столбец из неизвестных величин и матрицу-столбец из свободных членов системы (1.4), т.е.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1.4) может быть записана в матричной форме:

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}. \tag{1.5}$$

Наряду с матрицей ***A*** (1.3) введем матрицу $\overline{\mathbf{A}}$, которую будем называть расширенной матрицей системы (1.4):

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Теорема Кронекера-Капелли (теорема об условиях разрешимости линейных систем).

Для совместности системы (1.4) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы ***A***, составленной из коэффициентов при неизвестных, был равен рангу расширенной матрицы $\overline{\mathbf{A}}$. Причем, в случае, если система (1.4) совместна ($r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\mathbf{A}})$), то:

а) при $r(\boldsymbol{A})<\text{n}$ система (1.4) имеет бесчисленное множество решений, при этом n-$r(\boldsymbol{A})$ неизвестных этой системы могут быть произвольными, а остальные однозначно через них выражаются;

б) при m=n и $r(\boldsymbol{A})$=n система (1.4) имеет единственное решение.

1.5 Решение линейных систем

Рассмотрим методы решения систем (1.4)

1.5.1 Матричный способ решения квадратных систем

Квадратной системой будем называть систему (1.4), если m=n.

Если при этом определитель системы не равен нулю ($\Delta\boldsymbol{A}\neq 0$), то система

(1.5) $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ может быть решена матричным методом по формуле:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}. \qquad (1.7)$$

1.5.2 Правило Крамера

Квадратную систему при m=n и определителе системы не равным нулю ($\Delta\boldsymbol{A}\neq 0$) удобно решать и по правилу Крамера.

Поясним правило Крамера на примере квадратной системы при n=3.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Определитель системы (1.8) $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$

Назовем побочными определители, в которых соответствующий столбец заменен столбцом свободных членов:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}.$ (1.9)

1.5.3 Метод Гаусса

Приведенные выше решения системы линейных уравнений (матричным методом и методом Крамера) могут быть использованы лишь в том случае, когда число неизвестных равно числу уравнений и когда определитель системы отличен от нуля.

Более общим чем указанные выше методы, является метод Гаусса решения системы линейных уравнений или метод последовательного исключения неизвестных, так как он применим для любой системы из *m* уравнений с n неизвестными. Пусть

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Если a_{11}=0, то меняем уравнения местами так, чтобы коэффициент при первой переменной в первом уравнении стал отличен от нуля. Теперь, если $a_{11} \neq 0$, то умножаем первое уравнение на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и вычитаем его из второго, а затем умножаем первое уравнение на $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и вычитаем из третьего, после чего получаем

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ (a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12})x_2 + (a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13})x_3 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1, \\ (a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12})x_2 + (a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13})x_3 = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1. \end{cases}$$

Отметим, что во втором и третьем уравнениях отсутствует первая переменная. Аналогично вышеизложенному избавляемся в третьем уравнении от второй переменной и тогда система (1.10) примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = d_2, \\ c_{33}x_3 = d_3, \end{cases} \qquad (1.11)$$

где c_{22}, c_{23}, c_{33}, d_2, d_3 – новые коэффициенты системы и новые свободные члены.

Если диагональные коэффициенты системы (1.11) отличны от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти, решая данную систему «снизу вверх».

Если при решении системы уравнений одно из них примет вид «0=0», то это уравнение можно исключить из рассмотрения.

Если же в результате преобразования системы появится уравнение «0=b, b≠0,» не имеющее решений, то и вся система не будет иметь решений.

Если в преобразованной системе число переменных будет больше числа уравнений, то часть переменных можно выбрать в качестве параметров так, чтобы число оставшихся переменных совпадало с числом уравнений, и чтобы диагональные коэффициенты новой системы были отличны от нуля. В этом случае система будет иметь бесконечно много решений.

1.5.4 Однородные системы

Линейная система уравнений, в которой все свободные члены равны нулю, называется однородной:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

По теореме Кронекера-Капелли такая система всегда совместна, так как столбец из нулей не может увеличить ранг матрицы. Легко видеть, что (1.12) всегда имеет нулевое решение (т.е. состоящее из одних нулей).

Если в (1.12) число уравнений совпадает с числом неизвестных, то если определитель системы отличен от нуля, то система имеет только нулевое решение. Если определитель системы равен нулю, то система имеет бесконечно много решений (и ненулевые).

Если в (1.12) число уравнений больше числа неизвестных, то система имеет бесконечно много решений (естественно, среди них есть и ненулевые).

2 Аналитическая геометрия

2.1 Векторы, действия над ними

Вектором в пространстве будем называть столбец из трех чисел. Любой вектор $\vec{a}$ ⍰ единственным образом раскладывается по координатным ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ прямоугольной декартовой системы координат OXYZ: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$ где *x*,*y*,*z* - вещественные числа, называемые координатами вектора $\vec{a}.$ Вектор $\vec{a}$ можно записывать: $\vec{a} = \ x, y, z$.

В геометрической интерпретации вектору можно сопоставить направленный отрезок прямой, один из концов которого объявлен началом, а другой – концом вектора. Если известны начало $A(x_1, y_1, z_1)$ и конец $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\overrightarrow{AB},$ то его координаты вычисляются по формулам:

$x=x_2-x_1$, $y=y_2-y_1$, $z=z_2-z_1$.

Длина вектора $\vec{a} = \ x, y, z$ вычисляется по формуле

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.1}$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они параллельны одной прямой. Векторы $\vec{a} = \ x_1, y_1, z_1$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$ (2.2)

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются компланарными, если они параллельны одной плоскости. Условие компланарности векторов $\vec{a} = \ x_1, y_1, z_1$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}, \vec{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ заключается в равенстве нулю определителя, построенного по их координатам:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3}$$

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

($\vec{a}= \; x_1, y_1, z_1 \;$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$) называется число равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a},\vec{b} \; =\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi, \tag{2.4}$$

или в координатах $\vec{a},\vec{b} \; = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$ (2.5)

Если векторы ненулевые и их скалярное произведение равно нулю, они называются перпендикулярными (ортогональными).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}= \; x_1, y_1, z_1 \;$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, то векторное произведение вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ определяется формулой:

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

Из определения следует, что длина вектора $\vec{c}$ равна: $\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi,$ то есть произведению длины перемножаемых векторов на синус угла φ между ними. Таким образом, длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Этот вектор перпендикулярен плоскости, в которой лежат перемножаемые векторы, и направлен в соответствии с правилом «правого винта» при вращении первого вектора ко второму.

Смешанным произведением трех векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число, равное векторному произведению $[\vec{a},\vec{b}]$, умноженному скалярно на вектор $\vec{c}$ (обозначается $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$).

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ заданы своими координатами $\vec{a}= \; x_1, y_1, z_1 \;$, $\vec{b}=\{x_2, y_2, z_2\}$, $\vec{n}= \; x_3, y_3, z_3 \;$, то смешанное произведение определяется формулой:

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c} \; =\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{2.7}$$

Геометрическое истолкование смешанного произведения: абсолютная величина смешанного произведения равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах.

Условием компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ является равенство нулю их смешанного произведения.

2.2 Прямая на плоскости

Уравнением прямой на плоскости называется такое уравнение первой степени с переменными *x* и *y*, которому удовлетворяют координаты любой точки этой прямой.

Уравнение $Ax+By+C=0$ (2.8)

называется общим уравнением прямой.

Уравнение прямой, которое разрешено относительно переменной *y*, то есть уравнение вида $y=kx+b$, (2.9)

называется уравнением прямой с угловым коэффициентом. Параметр *k* называется угловым коэффициентом и равен тангенсу угла φ наклона прямой к оси О*X*, $k=tg\varphi$. Параметр *b* - величина отрезка, отсекаемого прямой на оси , считая от начала координат.

Уравнение вида $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ (2.10)

называется уравнением прямой в отрезках, здесь *a* и *b* - величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

Угол между двумя прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ вычисляется по формуле: $tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$. (2.11)

Условие параллельности двух прямых: $k_1=k_2$. (2.12)

Условие перпендикулярности: $k_1 \cdot k_2=-1$. (2.13)

Если прямые даны уравнениями в общем виде

$A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, то условие параллельности прямых можно записать так: $$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}, \qquad (2.14)$$

а условие перпендикулярности $A_1A_2+B_1B_2=0$. (2.15)

Если прямая имеет угловой коэффициент k и проходит через данную точку (x_0,y_0), то ее уравнение имеет вид: $y-y_0=k(x-x_0)$. (2.16)

Если прямая проходит через две данные точки (x_1,y_1), и (x_2,y_2), то уравнение $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \qquad (2.17)$$

называется уравнением прямой, проходящей через две данные точки.

Расстояние от точки (x_0,y_0) до прямой $Ax+By+C=0$ находится по формуле: $$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (2.18)$$

Деление отрезка в заданном отношении λ.

Пусть $M(x_1,y_1)$, и $N(x_2,y_2)$, тогда координаты точки (x_0,y_0), такой, что $\frac{MP}{PN}=\lambda,$ вычисляются по формулам:

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \qquad (2.19)$$

Длина отрезка MN находится по формуле:

$$MN=\sqrt{\ x_2-x_1\ ^2+\ y_2-y_1\ ^2}. \qquad (2.20)$$

2.3 Кривые второго порядка

Кривыми второго порядка являются: эллипс, гипербола и парабола.

2.3.1 Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная.

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2.21)$$

Координаты фокусов эллипса: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $c^2=a^2-b^2$.

Вершины эллипса: $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$.

Отрезки $A_1A_2=2a$, $B_1B_2=2b$ называются соответственно большой и малой осями эллипса, величины a, b - большой (малой) полуосями эллипса. Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине большой оси эллипса и обозначается:

$$\varepsilon=\frac{\tilde{n}}{a} \quad (\varepsilon<1). \tag{2.22}$$

Директрисами эллипса называются две прямые, параллельные малой оси эллипса и отстоящие от нее на расстояния, равном $\frac{a}{\varepsilon}$; уравнения директрис:

$$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}. \tag{2.23}$$

Фокальными радиусами называются расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки $M(x,y)$ эллипса до его фокусов F_1 и F_2 соответственно. Фокальные радиусы находятся по формулам:

$$r_1=a+\varepsilon x,\ r_2=a-\varepsilon x. \tag{2.24}$$

Отношение расстояний любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса:

$$\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon, \quad \frac{r_2}{d_2}=\varepsilon. \tag{2.25}$$

Окружность – вырожденный эллипс (с=0).

Каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2, \tag{2.26}$$

где (x_c,y_c) - координаты ее центра, а r - ее радиус.

Если центр окружности находится в начале координат, то ее уравнение имеет более простой вид:

$$x^2+y^2=r^2. \tag{2.27}$$

2.3.2 Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная.

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2.28)$$

Координаты фокусов гиперболы: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $c^2=a^2+b^2$.

Вершины эллипса: $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$.

Вещественной осью гиперболы называется отрезок $A_1A_2=2a$.

Мнимой осью гиперболы называется отрезок $B_1B_2=2b$, где $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к длине вещественной оси гиперболы и обозначается:

$$\varepsilon=\frac{\tilde{n}}{a} \quad (\varepsilon>1). \qquad (2.29)$$

Директрисами гиперболы называются две прямые, параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от нее на расстояния, равном $\frac{a}{\varepsilon}$; уравнения директрис: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$. (2.30)

Фокальными радиусами называются расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки $M(x,y)$ гиперболы до его фокусов F_1 и F_2 соответственно.

Фокальные радиусы находятся по формулам:

Для точек $M(x,y)$, лежащих на левой ветви гиперболы:

$r_1=-a-\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$. (2.31)

Для точек $M(x,y)$, лежащих на правой ветви гиперболы:

$r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=-a+\varepsilon x$. (2.32)

Асимптотами гиперболы являются диагонали прямоугольника, центр которого находится в центре гиперболы, а стороны равны и параллельны осям гиперболы. Уравнения асимптот гиперболы:

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \qquad (2.33)$$

Отношение расстояния r_1 (или r_2) от любой точки гиперболы до фокуса F_1 (или F_2) к соответствующему расстоянию d_1 (или d_2) от нее до директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету :

$$\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon, \quad \frac{r_2}{d_2}=\varepsilon. \tag{2.34}$$

Сопряженной называется гипербола, фокусы которой расположены на оси OY:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.35}$$

Равносторонней (равнобочной) называется гипербола с равными полуосями ($a=b$).

2.3.3 Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Координаты фокуса параболы: $F(p/2,0)$.

Уравнение директрисы параболы: $x=-p/2$.

Каноническое уравнение параболы: $y^2=2px$. (2.36)

Фокальным радиусом называется расстояние r от произвольной точки $M(x,y)$ параболы до ее фокуса F. Фокальный радиус находится по формуле:

$$r=x+p/2. \tag{2.37}$$

Отношение расстояния r от любой точки $M(x,y)$ параболы до фокуса F к расстоянию d от нее до директрисы называется ее эксцентриситетом, и он равен $\frac{r}{d}=\varepsilon=1$ (по определению параболы).

3. Решение типового варианта

Вариант № 0

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить $|\mathbf{A}|$, если: $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Решение.

Пользуясь свойствами определителей (см. тему 1.2), получаем:

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & 26 \\ 1 & -3 & 3 & -9 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot\ -1^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 8 & 26 \\ -3 & 3 & -9 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot\ -3\ \cdot\ -2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 13 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=12\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=12\cdot 1\cdot\ -1^{3+1}\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=12\cdot\ 4\cdot 2-12\cdot\ -1\ =240.$$

Ответ: 240.

2. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} 2x-y+2z=11, \\ -x+y-4z=-15, \\ 3x+4y+z=5. \end{cases}$$

Решение.

Сначала вычислим определитель системы (см. тему 1.5.2):

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 11 & 0 & 9 \end{vmatrix}=\ -1\ \cdot\ -1^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 11 & 9 \end{vmatrix}=1\cdot 9-\ -2\ \cdot 11=31.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то решение системы возможно по правилу Крамера, для чего вычислим побочные определители:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 11 & -1 & 2 \\ -15 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 11 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ 49 & 0 & 9 \end{vmatrix}=\ -1\ \cdot\ -1^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 49 & 9 \end{vmatrix}=\ -4\ \cdot 9-\ -2\ \cdot 49=62.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 11 & 2\\ -1 & -15 & -4\\ 5 & 5 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -19 & -6\\ -1 & -15 & -4\\ 0 & -40 & -11\end{vmatrix}= -1\ \cdot\ -1^{\,2+1}\begin{vmatrix}-19 & -6\\ -40 & -11\end{vmatrix}=$$

$$= -19\ \cdot\ -11\ -\ -6\ \cdot\ -40\ =209-240=-31.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 11\\ -1 & 1 & -15\\ 3 & 4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 11\\ 1 & 0 & -4\\ 11 & 0 & 49\end{vmatrix}= -1\ \cdot\ -1^{\,1+2}\begin{vmatrix}1 & -4\\ 11 & 49\end{vmatrix}=1\cdot 49-\ -4\ \cdot 11=93.$$

Поэтому $x=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{62}{31}=2,\quad y=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-31}{31}=-1,\quad z=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{93}{31}=3.$

Ответ: *x*=2; *y*=-1; *z*=3.

3. Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=1,\\ -x+y-4z=-12,\\ 5x+4y+z=29.\end{cases}$$

Решение.

Сначала вычислим определитель системы (см. тему 1.5.1):

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -4\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & -6\\ 0 & 1 & 0\\ 9 & 4 & 17\end{vmatrix}=1\cdot\ -1^{\,2+2}\begin{vmatrix}1 & -6\\ 9 & 17\end{vmatrix}=1\cdot 17-\ -6\ \cdot 9=71.$$

Так как определитель системы отличен от нуля, то решение системы возможно матричным методом, для чего вычислим для матрицы ***A*** обратную:

Имеем $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -4\\ 5 & 4 & 1\end{pmatrix}.$

Составим матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы ***A*** и транспонируем ее:

$$\begin{pmatrix}17 & -19 & -9\\ 10 & -7 & -22\\ 6 & 10 & 1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}17 & 10 & 6\\ -19 & -7 & 10\\ -9 & -22 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{71}\begin{pmatrix}17 & 10 & 6\\ -19 & -7 & 10\\ -9 & -22 & 1\end{pmatrix}.$

Так как решением системы ***AX***=***F*** является ***X***=$\boldsymbol{A}^{-1}$***F***, то

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 17 & 10 & 6 \\ -19 & -7 & 10 \\ -9 & -22 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 29 \end{pmatrix} = \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 17\cdot 1+10\cdot\ -12\ +6\cdot 29 \\ -19\ \cdot 1+\ -7\ \cdot\ -12\ +10\cdot 29 \\ -9\ \cdot 1+\ -22\ \cdot\ -12\ +1\cdot 29 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{71}\begin{pmatrix} 71 \\ 355 \\ 284 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: *x*=1; *y*=5; *z*=4.

4. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x+y-z=-7, \\ 3x-2y+z=-4, \\ -4x+3y+2z=19. \end{cases}$$

Решение.

Метод Гаусса (см. тему 1.5.3): заключается в последовательном исключении неизвестных, поэтому исключим из второго x и третьего уравнений x, для чего вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 3/2, а к третьему прибавим первое умноженное на 2.

$$\begin{cases} 2x+y-z=-7, \\ 3x-2y+z=-4, \\ -4x+3y+2z=19. \end{cases} \to \begin{cases} 2x+y-z=-7, \\ -3,5y+2,5z=6,5, \\ 5y=5. \end{cases} \to \begin{cases} 2x+y-z=-7, \\ -7y+5z=13, \\ y=1. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем *z*, а из первого *x*.

$$\begin{cases} 2x+y-z=-7, \\ -7y+5z=13, \\ y=1. \end{cases} \to \begin{cases} 2x+y-z=-7, \\ z=4, \\ y=1. \end{cases} \to \begin{cases} x=-2, \\ z=4, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: *x*=-2; *y*=1; *z*=4.

5. Решить систему

$$\begin{cases} x-4y-9z-11t=0, \\ x+3y+12z+10t=0, \\ 4x-2y+6z-2t=0. \end{cases}$$

Решение.

Решаем данную однородную систему (см. тему 1.5.4) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x-4y-9z-11t=0, \\ x+3y+12z+10t=0, \\ 4x-2y+6z-2t=0. \end{cases} \to \begin{cases} x-4y-9z-11t=0, \\ 7y+21z+21t=0, \\ 14y+42z+42t=0. \end{cases} \to \begin{cases} x-4y-9z-11t=0, \\ y+3z+3t=0, \\ y+3z+3t=0. \end{cases}$$

Так как третье уравнение является следствием первых двух уравнений, то система является неопределенной, поэтому обозначим «свободные» неизвестные *z*=*l* и *t*=*m* выразим *x* и *y* через *l* и *m*.

$$\begin{cases} x-4y-9z-11t=0, \\ y+3z+3t=0, \\ z=l, \\ t=m. \end{cases} \to \begin{cases} x-4y-9z-11t=0, \\ y=-3l-3m, \\ z=l, \\ t=m. \end{cases} \begin{cases} x=-3l-m, \\ y=-3l-3m, \\ z=l, \\ t=m. \end{cases}$$

И общее решение искомой системы:

Ответ: *x*=-3*l*-*m*; *y*=-3*l*-3*m*; *z*=*l*;*t*=*m*.

6. Решить уравнение ***XA***=***B***,

где $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -9 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} -71 & -19 \\ 26 & -6 \end{pmatrix}$.

Решение.

Если $\boldsymbol{A}^{-1}$ - обратная матрица для матрицы ***A***, то $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$.

Найдем $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Так как $\Delta\mathbf{A}=\begin{vmatrix} -9 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}= -9 \cdot 2- -5 \cdot -1 =-23,$ то $\boldsymbol{A}^{-1}$ существует.

Составим матрицу из алгебраических дополнений элементов матрицы ***A***: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$. Тогда

$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{\Delta\mathbf{A}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}^T=\dfrac{1}{-23}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\mathbf{X}=\mathbf{BA}^{-1}=\begin{pmatrix} -71 & -19 \\ 26 & -6 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-23}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{23}\begin{pmatrix} -71 \cdot 2-19\cdot 1 & -71 \cdot 5-19\cdot -9 \\ 26\cdot 2-6\cdot 1 & 26\cdot 5-6\cdot -9 \end{pmatrix}=\frac{-1}{23}\begin{pmatrix} -161 & -184 \\ 46 & 184 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *M*(3;2) и перпендикулярной прямой *y*=-2*x*+9.

Решение.

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку (см. (2.16)), имеет вид y-y_1=k(x-x_1) y-2=k(x-3).

Так как условие перпендикулярности прямых (см. (2.13)) имеет вид: k_1k_2=-1, то (-2)k=-1, k=1/2.

Поэтому искомое уравнение имеет вид:

$$y-2=\frac{1}{2}\ x-3\ ,\to y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Ответ: $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$

8. Даны вершины треугольника *A*(12;-4), *B*(0;5), *C*(-12;-11). Написать уравнения сторон и медианы, проведенной из точки *A*.

Решение.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (см. (2.17)), имеет вид $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, поэтому

$$AB\quad \frac{x-12}{0-12}=\frac{y-(-4)}{5-(-4)},\to\frac{x-12}{-4}=\frac{y+4}{3},\to 3x+4y-20=0.$$

$$AC\quad \frac{x-12}{-12-12}=\frac{y-(-4)}{-11-(-4)},\to\frac{x-12}{-24}=\frac{y+4}{-7},\to 7x-24y-180=0.$$

$$BC\quad \frac{x-0}{-12-0}=\frac{y-5}{-11-5},\to\frac{x}{3}=\frac{y-5}{4},\to 4x-3y+15=0.$$

Пусть медиана, проведенная из точки *A*, пересекает *BC* в точке *D*. Координаты точки *D* найдем по формулам деления отрезка в данном отношении (см. (2.19)).

$$x_D=\frac{0+\ -12}{2}=-6,\quad y_D=\frac{5+(-11)}{2}=-3.$$

Запишем уравнение прямой *AD* через две точки:

$AD\quad \frac{x-12}{-6-12}=\frac{y-\ -4}{-3-\ -4},\rightarrow \frac{x-12}{-18}=\frac{y-\ -4}{1},\rightarrow x+18y+60=0.$

Ответ: *AB* 3*x*+4*y*-20=0; *AC* 7*x*-24*y*-180=0; *BC* 4*x*-3*y*+15=0;

AD *x*+18*y*+60.

9. Найти расстояние от точки *M*(1;2) до прямой 3*x*-4*y*+15=0.

Решение.

Расстояние от точки до прямой (см. (2.18)), найдем по формуле

$$d=\frac{|3\cdot 1-4\cdot 2+15|}{\sqrt{3^2+\ -4\ ^2}}=\frac{10}{5}=2.$$

Ответ: 2.

10. Даны координаты вершин треугольника *A*(12;-4), *B*(0;5), *C*(-12;-11). Найти угол *B*.

Решение.

Запишем сначала уравнения сторон *AB* и *BC*. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (см. (2.17)), имеет вид

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, поэтому

$$AB\quad \frac{x-12}{0-12}=\frac{y-(-4)}{5-(-4)},\rightarrow \frac{x-12}{-4}=\frac{y+4}{3},\rightarrow y=-\frac{3}{4}x+5.$$

$$BC\quad \frac{x-0}{-12-0}=\frac{y-5}{-11-5},\rightarrow \frac{x}{3}=\frac{y-5}{4},\rightarrow y=\frac{4}{3}x+5.$$

Так как прямые перпендикулярны, то угол *B*=90°.

Ответ: 90°.

11. Даны координаты вершин пирамиды *A*(3;1;4), *B*(-1;6;1), *C*(-1;1;6), *D*(0;4;-1). Найти ее объем.

Решение.

Так как объем пирамиды равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах

$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},$ как на ребрах, то найдем координаты этих векторов и вычислим их смешанное произведение

$\overrightarrow{AB} = \; -1-3; 6-1; 1-4 \; = \; -4; 5; -3 \;,$

$\overrightarrow{AC} = \; -1-3; 1-1; 6-4 \; = \; -4; 0; 2 \;,$

$\overrightarrow{AD} = \; 0-3; 4-1; -1-4 \; = \; -3; 3; -5 \;.$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -5 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} -10 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -13 & 3 & -5 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|-2 \;\; -30+65 \;\right| = \frac{1}{6}\left|-70\right| = \frac{35}{3}.$$

Ответ: 35/3.

12. Найти уравнение эллипса, большая полуось которого равна a=0,5, а эксцентриситет равен ε=0,6.

Решение.

Эксцентриситет эллипса равен (см. (2.22)):

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \rightarrow c = a \cdot \varepsilon = 0,5 \cdot 0,6 = 0,3.$$

Так как b^2=a^2-c^2=0,25-0,09=0,16, то уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{0,25} + \frac{y^2}{0,16} = 1.$$

Ответ: $\frac{x^2}{0,25} + \frac{y^2}{0,16} = 1.$

4. Контрольная работа № 1

Вариант 1.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x-y+z=5 \\ 2x+y+z=6 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x-y+20z=18 \\ 2x-7y+z=-4 \\ 5x-y+z=5 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ 5x-y+4z=3 \\ x+2y+3z=5 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x-y+2z-t=0 \\ x+y-z-t=0 \\ x+3y-4z-t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{XA}=\mathbf{B}, \qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (3, 2) перпендикулярно прямой $\frac{x-2}{-5}=\frac{y+1}{-4}$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами A (2, -1), B (-1, 3), C (2, 4).

9. Найти расстояние от точки A (3, 1) до прямой $6x+8y+7=0$.

10. Найти угол *A* в треугольнике с вершинами *A* (4, 0), *B* (2, 4), *C* (-2, 0).

11. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(2,3,4)$, $\vec{b}(6,2,2)$, $\vec{c}(3,7,1)$ как на сторонах.

12. Написать уравнение окружности радиуса *R*=8 с центром в точке *C* (2, -5).

Вариант 2.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x+y-3z=-5 \\ x+4y+7z=9 \\ 5x-y+z=8 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 6x+7-3z=13 \\ x-5y-4z=-11 \\ -5x+y-z=-11 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x+6y+3z=21 \\ 4x+8y+z=18 \\ 3x+5y+4z=33 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \\ x-y-z+2t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{XA} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & -35 \\ -15 & 33 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* (4, 4) параллельно прямой $y=-6x+18$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами A (-1, -1), B (2, 1), C (3, 4).

9. Найти расстояние от точки A (3, 2) до прямой $12x+5y+9=0$.

10. Найти угол B в треугольнике с вершинами A (2, 2), B (7, 8), C (5, 3).

11. Найти объем пирамиды с вершинами A (2, 0, 0), B (0, 3, 0), C (0, 0, 6), D (2, 3, 8).

12. Составить уравнение окружности радиуса R=7, проходящей через точки A(7, 7) и B(−2, 4).

Вариант 3.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x-2y+4z=-17 \\ 4x+3y-2z=18 \\ 3x+y+3z=-7 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 4x+-2y+z=3 \\ 6x+8y-3z=13 \\ 5x-y+z=6 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x+7y-10z=8 \\ 9x-y+9z=63 \\ 7x-5y+7z=49 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \\ x-y-z+2t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B}, \qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} -64 & -52 \\ 25 & 30 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* (7, 1) перпендикулярно прямой $4x-5y+22=0$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами *A* (1, 0), *B* (3, 2), *C* (5, -2).

9. Найти расстояние от точки *A* (5, 0) до прямой $8x+15y+7=0$.

10. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $y=-5x-4$ и $y=-4x+3$.

11. Найти объем пирамиды с вершинами *A* (0, 0, 0), *B* (5, 2, 0), *C* (2, 5, 0), *D* (1, 2, 4).

12. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку *M* (-2, 2) и имеющего большую полуось *a*=4.

Вариант 4.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 1 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x+y-z=2 \\ -x-y+3z=1 \\ 4x-z=12 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 7x-y+z=42 \\ 5x+y-3z=28 \\ x+y+z=8 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x-y+z=4 \\ 3x+y-2z=3 \\ 6x-5y+z=-3 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y+z+t=0 \\ x+y+z+2t=0 \\ 3x-2y-5z+2t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{XA = B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 81 & 63 \\ 24 & 12 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* (6, 1) параллельно прямой $y=7x-8$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами *A* (1, -2), *B* (5, 4), *C* (-2, 0).

9. Найти расстояние от точки *A* (4, 1) до прямой $-12x+9y+3=0$.

10. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $-5x-4y-5=0$ и

$$-3x-5y+4=0.$$

11. Найти объем пирамиды с вершинами *A* (2, 2, 2), *B* (4, 3, 3), *C* (4, 5, 4), *D* (5, 5, 6).

12. Составить уравнение эллипса, если его большая полуось *a*=5 и эксцентриситет *e*=0.6.

Вариант 5.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ -6 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} -6x-y+4z=1 \\ -4x-4y+3z=-3 \\ 3x-2y-2z=-3 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x-5y+7z=0 \\ 2x+7y-z=15 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x-6y+z=8 \\ x-8y+2z=7 \\ 4x+9y+z=7 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} -x+y+z+t=0 \\ 2x-4y+z+2t=0 \\ 3x-y-z+t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 102 & 24 \\ 16 & -16 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* (4, -4) перпендикулярно прямой $y=-5x+16$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами *A* (1, -1), *B* (3, 5), *C* (-2, 1).

9. Найти расстояние от точки *A* (-3, 1) до прямой $-8x-6y+1=0$.

10. Найти угол *C* в треугольнике с вершинами *A* (3, 5), *B* (1, -1), *C* (-2, 1).

11. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(2,1,1)$, $\vec{b}(2,3,2)$, $\vec{c}(3,3,4)$ как на сторонах.

12. Составить уравнение гиперболы, если равно 26, а эксцентриситет *e*=13/12. расстояние между ее фокусами

Вариант 6.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 6x+4y+z=-17 \\ 5x+6y+2z=-10 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} -9x+y-z=-8 \\ 5x-y+2z=5 \\ 6x-y+z=5 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} -5x+4y-z=-3 \\ 9x-y-z=15 \\ -6x+y-2z=-12 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z+2t=0 \\ 3x-5y-8z+2t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -13 \\ 48 & 41 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (3, 2) параллельно прямой $y=9x-1$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами A (5, 4), B (1, -2), C (-2, 0).

9. Найти расстояние от точки A (2, 7) до прямой $-5x-12y-7=0$.

10. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $\frac{x-3}{-5}=\frac{y+4}{-4}$ и

$$\frac{x+1}{-4}=\frac{y-7}{-2}.$$

11. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(5,2,0)$, $\vec{b}(2,5,0)$, $\vec{c}(1,2,4)$ как на сторонах.

12. Составить уравнение эллипса, если даны точка эллипса $(\sqrt{15};-1)$ и расстояние между фокусами $2c=8$.

Вариант 7.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x+3y-z=11 \\ 2x-6y+3z=-5 \\ 3x+y+5z=57 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} -x-5y-z=-12 \\ 2x+3y-z=1 \\ 3x-y+3z=4 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x+6y-z=5 \\ 4x-5y+z=1 \\ 3x-2y+2z=6 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} 5x+y+z-t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \\ -x-y-z+2t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{XA = B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -84 & 13 \\ -28 & -9 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (3, 1) перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{-5}=\frac{y+3}{4}$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами A (4, 0), B (2, 4), C (-2, 0).

9. Найти расстояние от точки A (-7, 2) до прямой $-8x-15y-10=0$.

10. Найти угол A треугольника с вершинами A (1, -2), B (5, 4), C (-2, 0).

11. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(-2,3,0)$, $\vec{b}(-2,0,6)$, $\vec{c}(0,3,8)$ как на сторонах.

12. Составить уравнение эллипса, если даны точка эллипса (2,-5/3) и его эксцентриситет ε=2/3.

Вариант 8.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x - y + 6z = 22 \\ 3x + 7y + z = 26 \\ x + 6y - z = 12 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 8x + y + 3z = 9 \\ 3x - y + 2z = 5 \\ 6x + 7y - z = 3 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} -x + 5 + 3z = 11 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ 3x + y + z = 9 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2z - t = 0 \\ 2x - y - z + 8t = 0 \\ x - y - z + 2t = 0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 42 & 58 \\ 42 & 40 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (-1, 1) параллельно прямой $-5x - 4y - 25 = 0$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами *A* (-4, 2), *B* (5, 0), *C* (2, -5).

9. Найти расстояние от точки *A* (5, 1) до прямой $12x-9y+9=0$.

10. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $y=-5x-2$ и

$$y=-4x-9.$$

11. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(3,1,2)$, $\vec{b}(-4,3,-1)$, $\vec{c}(2,3,4)$ как на сторонах.

12. Составить уравнение эллипса, если его большая полуось *a*=8 и эксцентриситет *e*=0.5.

Вариант 9.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 7x+y-z=20 \\ 6x-y+5z=23 \\ 2x+9y+z=7 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 9x+2y+3z=8 \\ -x+3y+7z=17 \\ 3x+7y+z=9 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+7y-z=15 \\ 3x-5y+7z=0 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} -x-y+5z-t=0 \\ 9x-y-z+t=0 \\ -x-y-z-2t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{XA} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 45 & -8 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* (3, 2) перпендикулярно прямой $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+1}{9}$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами *A* (-1, 3), *B* (2, 5), *C* (7, -5).

9. Найти расстояние от точки *A* (3, 4) до прямой $6x - 8y + 11 = 0$.

10. Найти угол *B* треугольника с вершинами *A* (7, 4), *B* (7, 8), *C* (2, 2).

11. Найти объем пирамиды с вершинами *A* (4, 4, 10), *B* (4, 10, 2), *C* (2, 8, 4), *D* (9, 6, 9).

12. Составить уравнение гиперболы, если расстояние между ее фокусами равно 26, а эксцентриситет *e*=13/12.

Вариант 10.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 4x + 7y - z = 15 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + y + 9z = 30 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} -9x + y - z = -8 \\ 5x - y + 2z = 5 \\ 6x - y + z = 5 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x + 7y - 10z = 8 \\ 9x - y + 9z = 63 \\ 7x - 5y + 7z = 49 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} -9x+y+4z-5t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \\ -x-7y-z+2t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{AX=B}, \qquad \mathbf{A}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} -14 & 0 \\ -24 & 9 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (1, 2) параллельно прямой $-6x-7y+1=0$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами A (1, 4), B (3, -1), C (-4, 3).

9. Найти расстояние от точки A (-3, 9) до прямой $15x+8y+7=0$.

10. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $x+2y=0$ и $x-y+5=0$

11. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(5,7,-2)$, $\vec{b}(-3,1,3)$, $\vec{c}(1,-4,6)$ как на сторонах.

12. Написать уравнение окружности радиуса R=18 с центром в точке C (8, 2).

Вариант 11.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -9 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 5x-6y+z=8 \\ 4x+9y+z=7 \\ x-8y+2z=7 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 9x-y-z=46 \\ x+y+z=14 \\ 2x-y+3z=8 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 6x+8y-3z=13 \\ 5x-y+z=6 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} -9x+y+4z-5t=0 \\ x-8y-7z+t=0 \\ -x-7y-z+t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{XA = B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 14 & 14 \\ -20 & -32 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* (6, 1) перпендикулярно прямой $4x-5y+10=0$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами *A* (2, 2), *B* (7, 8), *C* (5, 3).

9. Найти расстояние от точки *A* (-1, 1) до прямой $5x+12y+9=0$.

10. Найти угол *C* треугольника с вершинами *A* (7, -5), *B* (2, 5), *C* (-1, 3).

11. Найти объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}(-1,4,3)$, $\vec{b}(3,2,-4)$, $\vec{c}(-2,-7,1)$ как на сторонах.

12. Составить уравнение окружности радиуса *R*=7, проходящей через точки *A*(7, 7) и *B*(–2, 4).

Вариант 12.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} -4x+7y+9z=25 \\ 3x-y+z=1 \\ -6x+9y+5z=19 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} -6x+y+z=-3 \\ -5x+7y+10z=16 \\ -x-y-25z=-4 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x+3y-2z=18 \\ 3x+y+3z=-7 \\ 3x-2y+4z=-17 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} -7x+y+2z-t=0 \\ -2x-y-z+t=0 \\ -x-y-z+t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{AX = B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 34 & -49 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* (3, 1) параллельно прямой $-9x+y-10=0$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами *A* (7, 8), *B* (5, 3), *C* (2, 2).

9. Найти расстояние от точки *A* (0, 1) до прямой $8x-6y+5=0$.

10. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $\frac{x-5}{-5}=\frac{y-1}{4}$ и

$$\frac{x-6}{-4}=\frac{y-4}{-2}.$$

11. Найти объем пирамиды с вершинами *A* (2, -1, 1), *B* (5, 5, 4), *C* (3, 2, -1), *D* (4, 1, 3).

12. Составить уравнение гиперболы, если расстояние между ее фокусами равно 26, а эксцентриситет *e*=13/12.

Вариант 13.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} -5x+7y-6z=-27 \\ x-6y+9z=4 \\ 6x-y+z=41 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 9x+2y+3z=8 \\ -x+3y+7z=17 \\ 3x+7y+z=9 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x-y+z=4 \\ 3x+y-2z=3 \\ 6x-5y+z=-3 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y+z+t=0 \\ x+y+z+t=0 \\ 3x-2y-5z-9t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{XA} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 41 & 8 \\ 0 & -96 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (7, 1) перпендикулярно прямой $y=6x+1$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами A (3, 5), B (1, -1), C (-2, 1).

9. Найти расстояние от точки A (2, 7) до прямой $-15x+8y-6=0$.

10. Найти угол A треугольника с вершинами A (1, -1), B (3, 5), C (-2, 1).

11. Найти объем пирамиды с вершинами A (2, 1, -1), B (3, 0, 1), C (2, -1, 3), D (0, 8, 0).

12. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку M (3, 2) и имеющего большую полуось a=4.

Вариант 14.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} -6x+9y-z=-2 \\ -5x+6y+z=-1 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} -x-5y-z=-12 \\ 2x+3y-z=1 \\ 3x-y+3z=4 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x+7y+z=26 \\ x+6y-z=12 \\ 2x-y+6z=22 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} -x+y+8z-5t=0 \\ - \quad x-y-z+t=0 \\ x-y-z+2t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -25 & -31 \\ -30 & -40 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (5, 1) параллельно прямой $-6x+y-9=0$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами A (3, 2), B (5, -2),

C (1, 0).

9. Найти расстояние от точки A (7, 3) до прямой $9x-12y+7=0$.

10. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $\frac{x+8}{-6}=\frac{y-4}{-4}$ и

$$\frac{x+9}{-3}=\frac{y-7}{-2}.$$

11. Найти объем пирамиды с вершинами A (2, 3, 1), B (4, 1, -2), C (6, 3, 7), D (-5, -4, 8).

12. Составить уравнение эллипса, если его большая полуось a=4 и эксцентриситет e=0.5.

Вариант 15.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 8x+9y+z=73 \\ x-y-z=-8 \\ 2x-3y+z=-17 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 4x+y-z=4 \\ 3x-6y-5z=-16 \\ x+9y-z=18 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x+6y+3z=21 \\ 4x+8y+z=18 \\ 3x+5y+4z=33 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+2z-t=0 \\ 2x-y-z+t=0 \\ x-y-z+2t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{XA} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -9 & -6 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -19 \\ -84 & -71 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* (2, 2) перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-1}{-4}$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами *A* (1, -2), *B* (5, 4), *C* (-2, 0).

9. Найти расстояние от точки *A* (4, 1) до прямой $-12x - 5y - 7 = 0$.

10. Найти угол *B* треугольника с вершинами *A* (1, -2), *B* (5, 4), *C* (-2, 0).

11. Найти объем пирамиды с вершинами *A* (2, -3, 5), *B* (0, 2, 1), *C* (-2, -2, 3), *D* (3, 2, 4).

12. Написать уравнение окружности радиуса *R*=4 с центром в точке *C* (3, 6).

Вариант 16.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 10 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 9x - y - z = 15 \\ -6x + y - 2z = -12 \\ -5x + 4y - z = -3 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 6x + 7 - 3z = 13 \\ x - 5y - 4z = -11 \\ -5x + y - z = -11 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x - 6y + z = 8 \\ x - 8y + 2z = 7 \\ 4x + 9y + z = 7 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} -x+y+z+t=0 \\ 2x-4y+z+2t=0 \\ 3x-y-z+t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{AX = B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -25 \\ -8 & -49 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A* (7, 2) параллельно прямой $3x-y+9=0$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами *A* (2, 2), *B* (3, -2), *C* (7, 8).

9. Найти расстояние от точки *A* (5, 1) до прямой $20x+15y-8=0$.

10. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $-3x-5y-1=0$ и

$$-5x-4y+5=0.$$

11. Найти объем пирамиды с вершинами *A* (-1, 2, 5), *B* (0, -4, 5), *C* (-3, 2, 1), *D* (1, 2, 4).

12. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку *M* (2, -3) и имеющего большую полуось *a*=4.

Вариант 17.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 4x-5y+z=1 \\ x+6y-2z=5 \\ 3x-2y+2z=6 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 4x+-2y+z=3 \\ 6x+8y-3z=13 \\ 5x-y+z=6 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x+7y-10z=8 \\ 9x-y+9=63 \\ 7x-5y+7z=49 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} -6x+y+z-t=0 \\ 2x-4y+z-2t=0 \\ -3x-y+z+t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{XA} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -11 & 18 \\ -27 & 45 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (3, 1) перпендикулярно прямой $\frac{x+1}{-6}=\frac{y-2}{-7}$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами A (5, 3), B (2, 2), C (3, -2).

9. Найти расстояние от точки A (3, 2) до прямой $15x-20y-9=0$.

10. Найти угол C треугольника с вершинами A (2, 4), B (4, 0), C (-2, 0).

11. Найти объем пирамиды с вершинами A (4, 2, 5), B (0, 7, 2), C (0, 2, 7), D (1, 5, 0).

12. Составить уравнение эллипса, если его большая полуось a=6 и эксцентриситет e=0.5.

Вариант 18.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x-2y+z=1 \\ 3x+y+z=9 \\ -x+5y+3z=11 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x-y+z=5 \\ 2x+y+z=6 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} -5x+4y-z=-3 \\ 9x-y-z=15 \\ -6x+y-2z=-12 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+z+2t=0 \\ 3x-5y-8z+2t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -60 & 37 \\ -13 & -50 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (5, 7) параллельно прямой $y=9x+7$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами A (7, 4), B (7, 8), C (2, 2).

9. Найти расстояние от точки A (1, 7) до прямой $-15x-8y-11=0$.

10. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $\frac{x-7}{-5}=\frac{y-1}{-4}$ и

$$\frac{x-8}{-4}=\frac{y-6}{-2}.$$

11. Найти объем пирамиды с вершинами A (4, 4, 10), B (4, 10, 2), C (2, 8, 4), D (9, 6, 9).

12. Составить уравнение эллипса, если его большая полуось a=5 и эксцентриситет e=0.2.

Вариант 19.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = 3 \\ 3x - y + 9 = 3 \\ 7x + y - 8z = 9 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x + 9y - z = 18 \\ 3x - 6y - 5z = -16 \\ 4x + y - z = 4 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x - y + z = 4 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ 6x - 5y + z = -3 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + t = 0 \\ x + y + z + 2t = 0 \\ 3x - 2y - 5z + 2t = 0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{XA} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -15 & 1 \\ -9 & -54 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (2, 0) перпендикулярно прямой $\frac{x-1}{-7} = \frac{y-3}{9}$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами A (5, -2), B (1, 0), C (3, 2).

9. Найти расстояние от точки A (2, 1) до прямой $20x + 15y - 3 = 0$.

10. Найти угол A треугольника с вершинами A (7, 8), B (2, 2), C (5, 3).

11. Найти объем пирамиды с вершинами A (3, 5, 4), B (8, 7, 4), C (5, 10, 4), D (4, 7, 8).

12. Составить уравнение эллипса, проходящего через точку M (2, 5) и имеющего большую полуось a=4.

Вариант 20.

Часть 1 Линейная алгебра

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 3x-5y+7z=0 \\ 2x+7y-z=15 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 7x-y+z=42 \\ 5x+y-3z=28 \\ x+y+z=8 \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x-y-z=-8 \\ 8x+9+z=73 \\ 2x-3y+z=-17 \end{cases}$$

5. Решить однородную систему уравнений

$$\begin{cases} 5x-y+z+t=0 \\ x+y+z+2t=0 \\ x-y-5+2t=0 \end{cases}$$

6. Решить матричное уравнение

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -20 & 43 \\ -76 & 13 \end{pmatrix}.$$

Часть 2 Аналитическая геометрия

7.Составить уравнение прямой, проходящей через точку A (6, 2) параллельно прямой $-3x+y-1=0$.

8. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами A (7, -5), B (2, 5),

C (-1, 3).

9. Найти расстояние от точки *A* (3, 0) до прямой $9x+12y+7=0$.

10. Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $\frac{x+7}{-5}=\frac{y+4}{-4}$ и

$$\frac{x+11}{-4}=\frac{y+3}{2}.$$

11. Найти объем пирамиды с вершинами *A* (-1, 2, 3), *B* (3, 3, 6), *C* (5, 1, 3), *D* (1, 7, 4).

12. Написать уравнение окружности радиуса *R*=7 с центром в точке *C* (7, -5).

Содержание