ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 9. НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦЫ.

9.1. Цель: изучение методов нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы и использование различных функций пакета MATLAB для их решения.

9.2. Порядок выполнения работы

1. Изучить теоретическую часть. Выполните задания, соответствующие номеру Вашего варианта, и продемонстрируйте их преподавателю.

2. Оформите отчет по лабораторной работе, который должен содержать:

- титульный лист;
- исходные данные варианта;
- решение задачи;
- результаты решения задачи;
- m-файл для решения задачи.

9.3. Методические рекомендации.

9.3.1. Основные понятия и определения. Большое число научно-технических задач, а также некоторые исследования в области вычислительной математики требуют нахождения собственных значений и собственных векторов матриц.

Рассмотрим матрицу A размерности $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (9.1)$$

Любой ненулевой вектор $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется *собственным вектором* матрицы A, соответствующим *собственному значению* λ, если он удовлетворяет системе уравнений

$$AX = \lambda X. \qquad (9.2)$$

Характеристической матрицей C данной матрицы A называется матрица вида

$$C = A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}, \qquad (9.3)$$

где E – единичная матрица.

Легко видеть, что систему (10.2) можно записать в виде

$$(A - \lambda E)X = 0 \text{ или } CX = 0. \qquad (9.4)$$

Если перейти к координатной форме записи вектора X, то с учетом (9.1) систему (9.4) можно записать в виде

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{9.5}$$

Система (9.5) или (9.4) является однородной системой n линейных уравнений с n неизвестными. Она имеет ненулевые решения лишь тогда, когда ее определитель равен нулю: det $C = \det(A - \lambda E) = 0$, причем решение не единственно.

Определитель матрицы C является многочленом n-й степени относительно λ:

$$\det C = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\lambda + c_n, \tag{9.6}$$

называемым *характеристическим многочленом*. Корни этого многочлена являются собственными значениями матрицы A.

Для нахождения собственных векторов матрицы требуется решить систему линейных алгебраических уравнений, решение которой не единственно. Из линейной алгебры известно, что в этом случае структура общего решения системы имеет следующий вид: одно или несколько неизвестных, называемых *свободными*, могут принимать любые значения, а остальные неизвестные выражаются через свободные. Число свободных неизвестных равно силу уравнений системы, являющихся следствием остальных уравнений. На практике, если свободное неизвестное одно (что часто и бывает), его полагают равным некоторому числу, например единице. После этого остальные неизвестные (компоненты вектора) находятся однозначно из подсистемы линейно независимых уравнений, в которой отброшено уравнение, являющееся следствием остальных. Эта процедура не влияет на результат решения задачи, поскольку, как уже отмечалось, собственные векторы находятся с точностью до постоянного множителя.

Пример. Вычислить собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10.$$

Найдем корни этого многочлена второй степени:

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 5.$$

Для нахождения собственных векторов X_1, X_2, соответствующих собственным значениям λ_1 и λ_2, составим системы уравнений типа (10.4), (10.5) для каждого из них.

При $\lambda_1 = 2$ получим

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 1 \\ 2 & 4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или, в координатной форме,

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Замечаем, что уравнения линейно зависимы. Поэтому оставляет лишь одно из них.

Из первого уравнения следует, что $x_2 = -x_1$. Неизвестное x_1 можно считать свободным, полагаем $x_1 = 1$. Тогда $x_2 = -1$, и собственный вектор, соответствующий собственному значению$\lambda_1 = 2$, имеет вид $X_1 = \{1, -1\}$ или $X_1 = e_1 - e_2$, где e_1, e_2 – единичные орты (вектора) выбранной базисной системы.

Аналогично находим второй собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 5$.

$$\begin{pmatrix} 3-5 & 1 \\ 2 & 4-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{cases} -2x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $X_2 = e_1 + 2e_2$.

9.3.2. Полная и частичная проблема собственных значений. В общем случае, особенно для матриц высокого порядка, задача о нахождении их собственных значений и собственных векторов, называемая *полной проблемой собственных значений*, значительно более сложная. Наиболее часто применяемым методом в данном случае является метод вращений.

Часто в практических вычислениях бывают нужны не все собственные значения, а лишь некоторые из них. В этих случаях нецелесообразно решать полную проблему собственных значений.

Для решения *частичной проблемы собственных значений*, состоящей в определении одного или нескольких собственных значений и соответствующих им собственных векторов, обычно используются итерационные методы.

Построим итерационный процесс, применяя метод итераций к решению системы уравнений

$$\lambda X = AX. \tag{9.7}$$

Модифицируем рассмотренный ранее метод простой итерации.

Запишем (10.7), введя вспомогательный вектор Y:

$$Y = AX. \tag{9.8}$$

$$\lambda X = Y. \tag{9.9}$$

Пусть $X^{(0)}$ – начальное приближение собственного вектора X, причем собственные векторы на каждой итерации нормированы, так что $| x^{(k)} | = 1$ ($k = 0, 1, \ldots$). Вектор x называется нормированным или единичным, если длина вектора $|x| = \sqrt{x^2} = 1$, $x^2 = x \cdot x$ – скалярное произведение.

Используем соотношение (9.8) для вычисления $Y^{(1)}$.

$$Y^{(1)} = AX^{(0)}.$$

Соотношение (9.9) используем для вычисления первого приближения $\lambda^{(1)}$, применяя умножение обеих частей равенства скалярно на $X^{(0)}$:

$$\lambda^{(1)}X^{(0)} = Y^{(1)}, \ \lambda^{(1)}X^{(0)} \cdot X^{(0)} = Y^{(1)} \cdot X^{(0)},$$

$$\lambda^{(1)} = \frac{Y^{(1)} \cdot X^{(0)}}{X^{(0)} \cdot X^{(0)}} = Y^{(1)} \cdot X^{(0)}.$$

Здесь учтено, что вектор $X^{(0)}$ нормирован, т.е. $X^{(0)} \cdot X^{(0)} = 1$. Следующее приближение собственного вектора $X^{(1)}$ вычислить, нормируя вектор $Y^{(1)}$.

Окончательно итерационный процесс записывается в виде

$$\begin{aligned} &Y^{(k+1)} = AX^{(k)}, \\ &\lambda^{(k+1)} = Y^{(k+1)} \cdot X^{(k)}, \\ &X^{(k+1)} = \frac{Y^{(k+1)}}{\left|Y^{(k+1)}\right|}, \ k = 0, 1, ..., \end{aligned} \tag{9.10}$$

и продолжается до установления постоянных значений λ и X. При этом нужно учесть, что применяя критерии завершения итераций, следует проверять близость векторов $(\text{sign}\ \lambda^{(k+1)})x^{(k+1)}$ и $x^{(k)}$, а не $x^{(k+1)}$ и $x^{(k)}$.

Найденное в результате итерационного процесса (10.10) число λ является наибольшим по модулю собственным значением матрицы A, а X – соответствующим ему собственным вектором. Скорость сходимости этого итерационного процесса зависит от удачного выбора начального приближения. Если начальный вектор близок к истинному собственному вектору, то итерации сходятся быстро.

Данный итерационный процесс носит название *метода скалярных произведений*, алгоритм которого приведен ниже.

9.3.3. Алгоритм метода скалярных произведений.

Алгоритм решения этой задачи состоит из следующих шагов (рисунок 9.1).

Шаг 1. Задать начальный вектор $X^0 \neq 0$.

Шаг 2. Вычислить вектор $Y^{(k+1)}$ по формуле $Y^{(k+1)} = AX^{(k)}$.

Шаг 3. Найти скалярные произведения $t^{(k+1)} = Y^{(k+1)} \cdot X^{(k)}$, $s^{(k+1)} = Y^{(k+1)} \cdot Y^{(k+1)}$.

Шаг 4. Уточнить собственное значение по формуле $\lambda^{(k+1)} = t^{(k+1)}$.

Шаг 5. Уточнить приближение к собственному вектору $X^{(k+1)} = \dfrac{Y^{(k+1)}}{\sqrt{s^{(k+1)}}}$.

Шаг 6. Если $\max\{(\text{sign}\ \lambda^{(k+1)})x^{(k+1)} - x^{(k)}\}$ меньше допустимой абсолютной погрешности ε, то работа алгоритма завершена и найдены наибольшее по модулю собственное значение и соответствующий ему собственный вектор, иначе возврат на шаг 2.

9.3.4. Численный пример.

Для матрицы найти наибольшее собственное значение и соответствующий ему собственный вектор:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

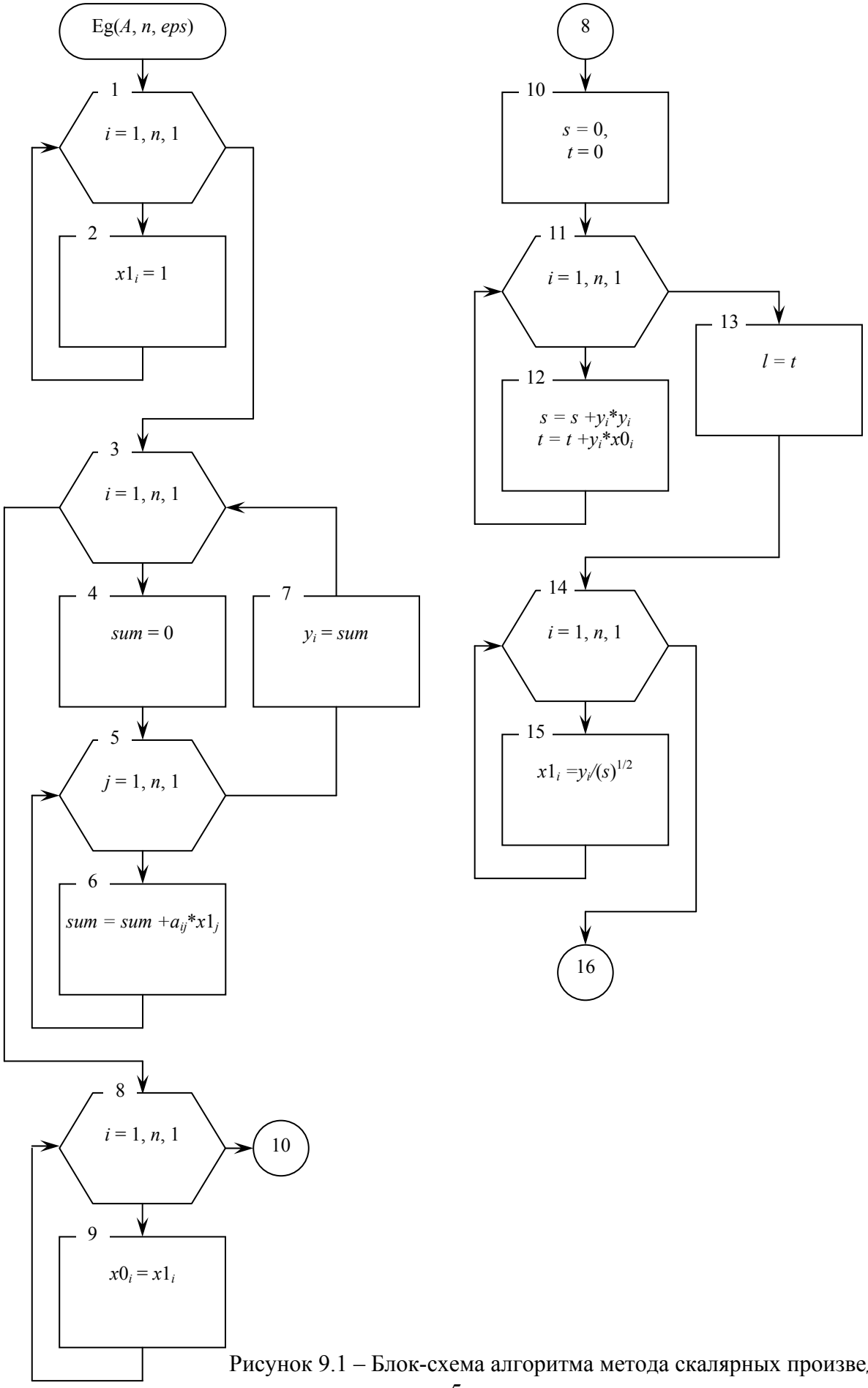
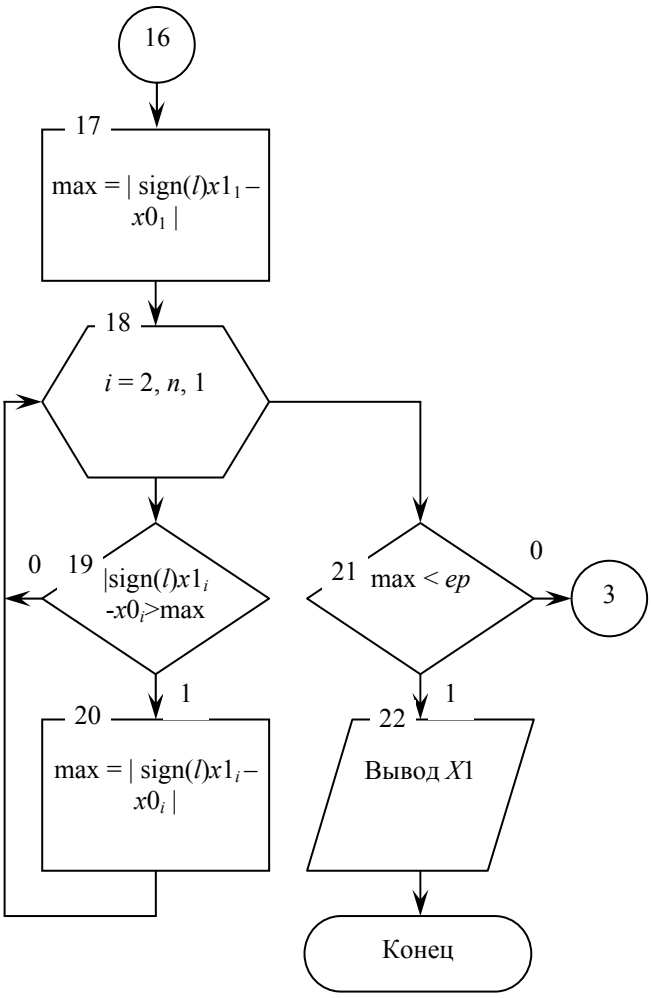


Рисунок 9.1 – Блок-схема алгоритма метода скалярных произведений



Продолжение рисунка 10.1

Решение. Зададим начальный вектор $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и начальное значение $\lambda^0 = 0$.

Вычислим $Y^{(1)} = AX^{(0)}$, т.е. $Y^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Найдем $\lambda^{(1)} = Y^{(1)} \cdot X^{(0)} = 27$.

Вычислим следующее приближение собственного вектора

$$X^{(1)} = \frac{Y^{(1)}}{\left|Y^{(1)}\right|} = \frac{Y^{(1)}}{\sqrt{Y^{(1)} \cdot Y^{(1)}}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} / 13.7477 = \begin{pmatrix} 0.5819 \\ 0.3637 \\ 0.5819 \\ 0.4364 \end{pmatrix}.$$

Все промежуточные результаты приведены в таблице 9.1. Данный процесс продолжаем до тех пор, пока max | (sign $\lambda^{(k+1)}$)$x^{(k+1)} - x^{(k)}$ | < ε = 0,01.

Таблица 9.1 – Промежуточные результаты вычислений

№ итерации	***X***	***Y***	λ	**№ итерации**	***X***	***Y***	λ
0	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$	-	-	3	$\begin{pmatrix}0.6002\\0.4062\\0.5100\\0.4633\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.1432\\2.8037\\3.5202\\3.1983\end{pmatrix}$	6.9005
1	$\begin{pmatrix}0.5819\\0.3637\\0.5819\\0.4364\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8\\5\\8\\6\end{pmatrix}$	27	4	$\begin{pmatrix}0.5955\\0.4020\\0.5210\\0.4608\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.1098\\2.7740\\3.5954\\3.1802\end{pmatrix}$	6.9006
2	$\begin{pmatrix}0.6127\\0.3946\\0.5192\\0.4465\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.2916\\2.7641\\3.6370\\3.1278\end{pmatrix}$	6.9842	5	$\begin{pmatrix}0.5978\\0.4000\\0.5223\\0.4581\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4.1378\\2.7684\\3.6146\\3.1703\end{pmatrix}$	6.9210

Так как $\max\{(\text{sign } \lambda^{(k+1)})x^{(5)} - x^{(4)}\} < \varepsilon = 0.01$, то собственное значение и собственный вектор матрицы найден:

$$X = \begin{pmatrix}0.5978\\0.4000\\0.5223\\0.4581\end{pmatrix}, \lambda = 6{,}9210.$$

Решение можно будет проверить, подставив найденные значения в уравнение $(A - \lambda E)x = 0$.

9.3.5. Встроенные функции MATLAB для собственных векторов матрицы

Во многих областях математики и прикладных наук большое значение имеют средства для вычисления собственных значений (собственных чисел, характеристических чисел) матриц и принадлежащих им векторов. В новой версии MATLAB собственные вектора нормализуются, иначе, чем в предыдущих. Основной критерий: либо $V'V = E$, либо $V'BV = E$, где V – собственный вектор, E – единичная матрица. Поэтому результаты вычислений в новой версии, как правило, отличаются.

Пусть A – матрица размерности $n \times n$. В пакете MATLAB предусмотрены следующие встроенные функции для нахождения собственных значение и векторов матрицы A.

1) [X, L] = eig(A) – возвращает вектор собственных значений L и матрицу собственных векторов X, соответствующих собственным значениям, квадратной полной или симметрической разреженной матрицы A обычно после автоматического масштабирования, но для больших разреженных матриц, а также во всех случаях, где помимо собственных значений необходимо получать и собственные вектора разреженной матрицы, вместо нее рекомендовано использовать eigs(A);

2) eig(A, B) – возвращает вектор обобщенных собственных значений квадратных матриц A и B;

3) eig(A, 'nobalance') – находит собственные векторы и собственные значения без предварительного масштабирования. Иногда это улучшает обусловленность входной матрицы, обеспечивая большую точность вычисления собственных векторов для необычно масштабированных матриц;

4) eig(A,B, 'chol') – возвращает вектор, содержащий обобщенные собственные значения, используя разложение матрицы *B* по методу Холецкого; если *A* – симметрическая квадратная матрица и *B* – симметрическая положительно определенная квадратная матрица, то eig(A,B) по умолчанию работает точно так же;

5) eig(A,B, 'qz') – не требует, чтобы матрицы были симметрическими и возвращает вектор, содержащий обобщенные собственные значения, используя *QZ*-алгоритм; при явном указании этого флага *QZ*-алгоритм используется вместо алгоритма Холецкого даже для симметрической матрицы и симметрической положительно определенной матрицы *B*, так как может давать более стабильные значения, чем предыдущий метод.

```
>> a=[2 1 4 1; 3 0 1 1; -1 2 3 4; 3 1 1 1];
>> [X,L]=eig(a)
X =
  0.5981        -0.2044 - 0.4649i        -0.2044 + 0.4649i        0.0556
  0.4009        -0.3901 + 0.1299i        -0.3901 - 0.1299i       -0.9168
  0.5205                   0.6227                   0.6227        0.0956
  0.4589        -0.3397 + 0.2644i        -0.3397 - 0.2644i        0.3837

L =
  6.9182          0                    0                    0
     0       -0.1066 + 2.8619i         0                    0
     0            0              -0.1066 - 2.8619i          0
     0            0                    0                 -0.7049
```

9.4. Задание.

1. Создать m-файл для нахождения наибольшего собственного значения и соответствующего ему собственного вектора.

2. Найти наибольшее собственное значение и соответствующий ему собственный вектор ручным способом, с помощью разработанного m-файла и встроенных функций MATLAB, сравнить полученные результаты.

Входные аргументы *m*-файла-функции: $A = \{a_{ij}\}$ – матрица, *eps* – абсолютная погрешность.

Выходные параметры *m*-файла-функции: *l* – наибольшее собственное значение матрицы, $X = \{x_j\}$ – собственный вектор.

Варианты заданий.

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 11) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

19) $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 21) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

22) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ 6 & 15 & -6 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$;

25) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 26) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

28) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & -13 \end{pmatrix}$.

9.5. Примерные вопросы на защите работы:

1. Что собственное значение матрицы?
2. Что такое собственный вектор матрицы?
3. В чем разница между полной проблемы собственных значений и частичной проблемы собственных чисел?
4. Приведите схему итерационного процесса решения частичной проблемы собственных значений.
5. Приведите алгоритм метода скалярных произведений.
6. Что является характеристической матрицей?
7. Дайте определение понятия характеристический многочлен и приведите его формулу.
8. Перечислите встроенные функции MATLAB для нахождения собственных значений и векторов.
9. Приведите блок-схему алгоритма метода скалярных произведений.
10. Какие переменные называются свободными?