

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Тема. Матрицы и определители. Элементы векторной алгебры. Элементы аналитической геометрии

1-10. В лесхозе имеется три питомника для выращивания семян кедра, сосны и ели. По многолетним статистическим данным, на площади i -го питомника, выживаемость j -ой породы в течение последующего периода ее выращивания составляет a_{ij} (в долях от первоначального числа семян). Для посева было использовано c_i семян каждой породы (тыс. шт.). По заданным матрицам $A = a_{ij}$ и $C = c_i$ определить общее количество семян (тыс. шт.) указанных пород, которое может представить для реализации каждый из питомников.

$$1. A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 & 0,6 \\ 0,7 & 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0,8 \\ 0,7 & 0,6 & 0,6 \\ 0,7 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,8 \\ 0,4 & 0,5 & 0,6 \\ 0,8 & 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad 4. A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0,7 \\ 0,6 & 0,7 & 0,4 \\ 0,7 & 0,8 & 0,5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,7 & 0,7 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad 6. A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,6 \\ 0,7 & 0,6 & 0,6 \\ 0,6 & 0,7 & 0,8 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,7 & 0,8 \\ 0,4 & 0,6 & 0,6 \\ 0,4 & 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad 8. A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 & 0,8 \\ 0,5 & 0,6 & 0,6 \\ 0,7 & 0,7 & 0,6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & 0,6 & 0,6 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad 10. A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,8 & 0,8 \\ 0,7 & 0,6 & 0,6 \\ 0,7 & 0,6 & 0,5 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

11-20. При проведении ремонта лесохозяйственных тракторов различных марок используются детали трех наименований ($i=1,2,3$). Для ремонта трактора j -ой марки в соответствии с нормативами расхода запчастей требуется a_{ij} деталей i -ого наименования. Известно, что при проведении ремонта тракторов было использовано b_i деталей i -ого наименования. По заданным матрицам $A = a_{ij}$ и $B = b_i$ составить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

и определить число тракторов каждой марки x_i ($i=1,2,3$), которое было отремонтировано за отчетный период. Систему уравнений решить двумя способами: 1) методом Гаусса, 2) методом Крамера.

$$11. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 23 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix}; \quad 12. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 19 \\ 19 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 18 \\ 17 \\ 19 \end{pmatrix}; \quad 14. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 23 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}; \quad 16. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 17 \\ 21 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}; \quad 18. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 22 \\ 14 \\ 21 \end{pmatrix}; \quad 20. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 24 \end{pmatrix}$$

21-30. В пространстве заданы точки A, B, C, D.

Найти: 1) длину вектора $\vec{x} = 3\vec{BD} - 2\vec{AC}$

2) угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$

3) векторное произведение векторов $\vec{BD}$ и $\vec{AC}$.

- | | | | |
|------------------|---------------|--------------|---------------|
| 21. A (2,1,0); | B (3,4,6); | C (-2,1,5); | D (1,4,5). |
| 22. A (1,5,-7); | B (-3,6,3); | C (-2,7,3); | D (-4,8,-12). |
| 23. A (-1,2,-3); | B (4,-1,0); | C (2,1,-2); | D (3,4,5). |
| 24. A (1,2,0); | B (3,0,-3); | C (5,2,6); | D (8,4,-9). |
| 25. A (0,-1,-1); | B (-2,3,5); | C (1,-5,-9); | D (-1,-6,3). |
| 26. A (1,1,2); | B (-1,1,3); | C (2,-2,4); | D (-1,0,-2). |
| 27. A (2,-4,-3); | B (5,-6,0); | C (-1,3,-3); | D (-10,-8,7). |
| 28. A (-1,2,4); | B (-1,-2,-4); | C (3,0,-1); | D (7,-3,1). |
| 29. A (1,-5,-9); | B (-1,-6,3); | C (0,-1,-1); | D (-2,3,5). |
| 30. A (4,0,-1); | B (2,3,8); | C (-1,4,7); | D (-3,4,-8). |

31-40. Даны координаты вершин треугольника ABC.

Найти: 1) длину стороны BC; 2) уравнение прямой BC;

3) уравнение высоты, проведённой из вершины A;

4) уравнение медианы BE;

5) точку пересечения медианы и высоты.

Сделать чертёж.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 31. A (-4; 8), B (4,-4), C (10; 12). | 32. A (-6; 8), B (4,-5), C (10; 11). |
| 33. A (0; 8), B (4,-6), C (12; 10). | 34. A (-1; 6), B (2,-2), C (10; 14). |
| 35. A (-2; 8), B (4,-3), C (8; 12). | 36. A (-5; 7), B (0,-4), C (12; 12). |
| 37. A (-5; 5), B (4,-4), C (16; 12). | 38. A (-4; 7), B (1,-2), C (13; 14). |
| 39. A (-8; 8), B (0,-5), C (12; 11). | 40. A (-1; 5), B (3,-4), C (15; 12). |

41-50. Дана плоскость в пространстве $A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$ и точка $M_0 (x_0, y_0, z_0)$. Проверить, лежит ли точка M_0 на плоскости, а если нет, то

найти расстояние от точки M_0 до плоскости.

41. $x + 2y + 2z - 3 = 0$; $M_0 (1, -1, 1)$.
42. $2x - 2y + z - 1 = 0$; $M_0 (2, -1, 3)$.
43. $-2x + y - 2z + 7 = 0$; $M_0 (-1, 2, 1)$.
44. $x - 2y - 2z + 1 = 0$; $M_0 (0, 1, 1)$.
45. $x + 4y - z + 7 = 0$; $M_0 (1, 1, 1)$.
46. $2x - y + 3z + 1 = 0$; $M_0 (-1, 1, 0)$.
47. $3x - 2y + z - 5 = 0$; $M_0 (-1, 1, 1)$.
48. $5x - 3y + 2z - 1 = 0$; $M_0 (2, -1, 4)$.
49. $x + 4y - z + 3 = 0$; $M_0 (0, 1, 0)$.
50. $x + 2y - z + 7 = 0$; $M_0 (1, 1, 1)$.

51-60. Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка и построить полученную кривую.

51. $9x^2 + 4y^2 - 16y = 20$
52. $16x^2 + 32x + 9y^2 - 128 = 0$
53. $9x^2 + 36x - 4y^2 = 0$
54. $16x^2 - 9y^2 + 36y = 108$
55. $x^2 - 2x + y^2 + 6y + 6 = 0$
56. $x^2 - 6x - y + 8 = 0$
57. $x^2 - 8x + y + 18 = 0$
58. $y^2 - 6y - x + 7 = 0$
59. $y^2 + 10y - x + 29 = 0$
60. $25x^2 - 50x + 4y^2 + 25 = 0$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^4 + 6x^2 + 5}{3x^4 - x^8 + 2x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x + 1}{3x^2 + 4x + 2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 4x}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x - 3x^2}{x^5 + x^3 + 3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x}-2}{x^2-4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 4}{2x^3 + 5x - 1}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x \sin x}$$

$$67. 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 - 4x + 3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x$$

$$68. 1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 - x - x^2}{3x^2 + 8x - 3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3}-3}{x-3}$$

$$69. 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{5x^2 - 4x - 1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}$$

$$70. 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{8 - x^3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-3} - \sqrt{9-x}}{x^2 - 36}$$

71-80. Исследовать на непрерывность следующие функции. Если имеются точки разрыва, то указать характер разрыва и изобразить графически поведение функции вблизи точек разрыва:

$$71. y = \frac{x+3}{x-1}$$

$$73. y = \frac{3x+5}{2x-1}$$

$$74. y = 2^{\frac{1}{x-1}}$$

$$76. y = 4^{\frac{1}{x-2}}$$

$$77. y = \frac{3}{x-5}$$

$$79. y = \frac{x+6}{x-2}$$

$$80. y = 5^{\frac{1}{x-2}}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 1}{3x^3 + x + 3}$$

$$66. 1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 2x$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}$$

Тема. Производная функции одной переменной и её приложения

81-90. Найти производные заданных функций:

81. 1) $y = 3x^2 + \lg x - \ln x$ 2) $y = (3-x) \cdot e^x$ 3) $y = \sqrt{\arctg 2x}$

82. 1) $y = 2x^7 + \cos x - e^x$ 2) $y = \frac{(x+5)}{\ln x}$ 3) $y = 2 \arctg(4x+1)$

83. 1) $y = \sqrt{x} + \sin x - \ln x$ 2) $y = (2+x) \cdot e^x$ 3) $y = \operatorname{ctg}^3 6x$

84. 1) $y = 6x^5 + \arcsin x + e^x$ 2) $y = \frac{\cos x}{\ln x}$ 3) $y = \sqrt{\ln(6x-1)}$

85. 1) $y = \sqrt[3]{x} + \operatorname{ctg} x - 2^x$ 2) $y = (x-4) \cdot \ln x$ 3) $y = e^{\arcsin(2x+4)}$

86. 1) $y = 2x^2 + \arccos x - \ln x$ 2) $y = \frac{x+7}{e^x}$ 3) $y = \cos \sqrt{3x}$

87. 1) $y = \sqrt[5]{x} + \operatorname{tg} x - 3^x$ 2) $y = (2 + \ln x) \cdot x$ 3) $y = e^{\arccos(3x-2)}$

88. 1) $y = 7x^3 + \operatorname{arctg} x + 5^x$ 2) $y = \frac{\ln x + 7}{x}$ 3) $y = \sqrt{\sin(6x+3)}$

89. 1) $y = \sqrt[3]{x} + \operatorname{arctg} x - \ln x$ 2) $y = (2+x) \cdot e^x$ 3) $y = \cos^4(3x-4)$

90. 1) $y = x^{10} - \operatorname{tg} x + 5^x$ 2) $y = \frac{x-4}{\ln x}$ 3) $y = \arcsin(\sqrt{(4x+5)})$

91-100. Исследовать средствами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$, используя результаты исследования, построить её график.

Исследование функции проводить, придерживаясь следующей схемы:

1. Найти область определения функции.
2. Определить поведение функции в точках разрыва и при $x \rightarrow \pm\infty$.
3. Исследовать функцию на чётность и нечётность.
4. Найти точки экстремума функции, интервалы монотонности.
5. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости.
6. Найти уравнения асимптот графика функции.
7. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
8. Построить график функции.

91. $y = 3x^2 - 0,25x$ 92. $y = (x-1) \cdot x^2$

93. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ 94. $y = \frac{x-1}{x^2}$

95. $y = (x-1)^2 \cdot (x+1)^3$ 96. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

97. $y = x + \frac{1}{x^2}$ 98. $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

99. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ 100. $y = x + \frac{1}{x}$

101-110. Вычислить интегралы:

101. а) $\int (7 \cos x - 2\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{4-x^2}}) dx$; 102. а) $\int (\sqrt[3]{x} + \frac{8}{x} - \sin 3x) dx$;

б) $\int e^{x^2+2} \cdot x dx$;

б) $\int \frac{\ln x + 5}{x} dx$;

в) $\int \sin 2x \cdot x dx$

в) $\int \cos 5x \cdot x dx$

103. а) $\int (8\sqrt{x} - 5^x + \frac{2}{\sin^2 x}) dx$;

104. а) $\int (5 + \frac{3}{\cos^2 x} - x^4) dx$;

б) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 7}}$;

б) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$;

в) $\int (x+4) \cos x dx$

в) $\int e^{2x} \cdot x dx$

105. а) $\int (3 - 6x^9 + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}) dx$;

106. а) $\int (4x^3 - 7e^x + \frac{1}{9+x^2}) dx$;

б) $\int \frac{tgx - 1}{\cos^2 x} dx$;

б) $\int \frac{x^2}{(x^3 - 5)^2} dx$;

в) $\int x \sin 7x dx$

в) $\int x \cos 2x dx$

107. а) $\int (\sqrt{x} - \frac{3}{\sin^2 x} + 8 \cos 8x) dx$;

108. а) $\int (\frac{7}{x} - 5^x + \frac{3}{9-x^2} x^2) dx$;

б) $\int \frac{3 - \ln x}{x} dx$;

б) $\int \frac{ctgx}{\sin^2 x} dx$;

в) $\int (x-5)e^x dx$

в) $\int e^x (2+x) dx$

109. а) $\int (7\sqrt{x} - \frac{2}{x} - \frac{5}{16+x^2}) dx$; 110. а) $\int (\frac{4}{x^3} - \frac{5}{\cos^2 x} - 3) dx$;

б) $\int \frac{2^x}{(2^x + 7)^3} dx$;

б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x + 5}}$;

в) $\int x \cos 7x dx$

в) $\int x e^{5x} dx$

111-120. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями. Сделать чертеж.

111. $y = x^2$; $3x + y - 4 = 0$; $y = 0$.

112. $y = 2x^2$; $y = 4 - 2x$.

113. $y = 4x^2$; $y = -2x + 6$.

114. $y = x^2$; $y = -2x + 3$.

115. $y = (x-2)^2$; $y = 4x - 8$.

116. $y = 2x^2$; $y = -3x + 14$.

117. $y = 3x^2 + 6x - 3$; $y = -2x + 5$.

118. $y = \frac{1}{3}x^2$; $y = -2x + 9$.

119. $y = 2x - x^2$; $y = 2 - x$;

120. $y = -x^2 + 5x - 6$; $y = 0$;