Практикум 16
Раздел 16. «*Теория вероятностей: случайные величины*»

Требования к выполнению заданий

Решение задач необходимо располагать в порядке, указанном в заданиях, сохраняя номера задач. Перед решением каждой задачи желательно кратко записать имеющиеся данные из условия. Решение же следует излагать подробно и аккуратно, объясняя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи. Записывайте или выделяйте ответы.

Критерии оценки заданий

Правильное полное решение всех заданий оценивается в 10 баллов (1 задача=2 балла). При наличии неточностей или ошибок выставляемый за задачу балл может быть уменьшен до 0 либо 1.

Разбор типовых задач

Пример 1. В студенческой группе 5 отличников, 4 хороших студента и 3 троечника. Отличник всегда сдает экзамен на 5, хороший студент – на 4 и троечник – на 3. Случайным образом были выбраны два студента и проэкзаменованы. Средний балл по этому экзамену – случайная величина. Написать ее закон распределения.

Решение.

Если экзаменовались два отличника, то средний балл – 5. Два отличника попадают в выборку с вероятностью $C_5^2/C_{12}^2 = 5/33$. Если экзаменовались отличник и хороший студент, то средний балл равен 4,5. Такой состав выборки получается с вероятностью $5\cdot 4/C_{12}^2 = 10/33$. Средний балл равен 4, если в выборку попали два хороших студента. Такой же средний балл получается, если в выборке отличник и троечник. Суммарная вероятность этих событий $C_4^2/C_{12}^2 + 5\cdot 3/C_{12}^2 = 7/22$. Средний балл равен 3,5, если экзаменовали хорошего студента и троечника. Вероятность такого состава выборки равна $4\cdot 3/C_{12}^2 = 2/11$. Таким образом, средний балл равен 3, если экзаменовали двух троечников, что могло произойти с вероятностью $C_3^2/C_{12}^2 = 1/22$. В результате получаем закон распределения среднего балла:

ξ	3	3,5	4	4,5	5
p	1/22	2/11	7/22	10/33	5/33

Ответ: закон распределения среднего балла:

ξ	3	3,5	4	4,5	5
p	1/22	2/11	7/22	10/33	5/33

Пример 2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	-2	-1	0	2	3
P	0	0	0	p	0

	,2	,3	,1		,2

Найти вероятность p_4, функцию $F(x)$, ее график, $M(x)$ и $D(x)$.

Решение.

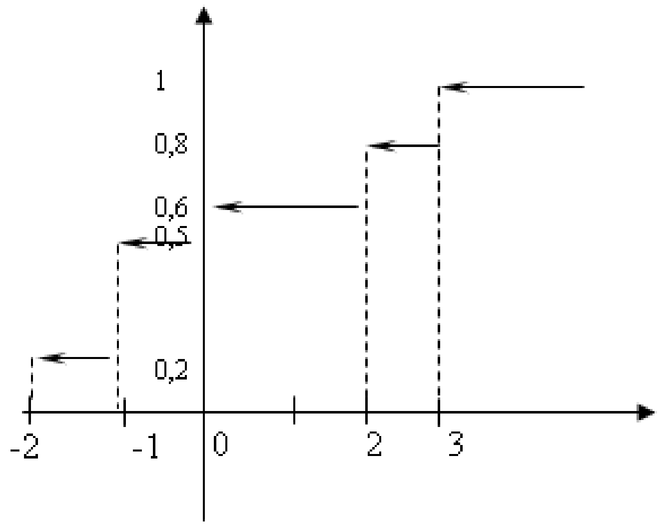
Известно, что сумма вероятностей всевозможных значений дискретной случайной величины X равна 1, то

$$p_4 = 1 - (0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 + 0{,}2) = 0{,}2.$$

Найдем функцию $F(x) = P(X < x)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \; \textit{если} \;\; x \le -2, \\ 0{,}2, \; \textit{если} \; -2 < x \le -1, \\ 0{,}5, \; \textit{если} \; -1 < x \le 0, \\ 0{,}6, \; \textit{если} \;\; 0 < x \le 2, \\ 0{,}8, \; \textit{если} \;\; 2 < x \le 3, \\ 1, \; \textit{если} \;\; x > 3. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ имеет вид:



Найдем числовые характеристики $M(x)$ и $D(x)$, применив формулы:

$$M(x) = \sum_{\kappa=1}^{n} x_k p_k \;,$$

$$D(x) = \sum_{\kappa=1}^{n} x^2{}_k p_k - M^2(x),$$

$$M(x) = (-2)\times 0{,}2 + (-1)\times 0{,}3 + 0\times 0{,}1 + 2\times 0{,}2 + 3\times 0{,}2 = -0{,}-0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}6 = 0{,}3,$$

$$D(x) = (-2)^2 \times 0{,}2 + (-1)^2 \times 0{,}3 + 0\times 0{,}1 + 2^2 \times 0{,}2 + 3^2 \times 0{,}2 - (0{,}3)^2 = 0{,}8 + 0{,}3 + 0{,}8 + 1{,}8 - 0{,}09 = 3{,}61$$

.

Ответ: $p_4 = 0{,}2$, $M(x) = 0{,}3$, $D(x) = 3{,}61$.

Пример 3. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$p(x)=\begin{cases} c\cos x, & -\pi/2\le x\le \pi/2, \\ 0, & x<-\pi/2;\ x>\pi/2. \end{cases}$$

Найти $M\xi, D\xi, F(x), P(\pi/6<x<\pi/3).$

Решение.

Определим величину параметра c. По свойству нормировки имеем:

$$c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x dx=1.$$

Отсюда следует, что c=1/2. Математическое ожидание случайной величины равно 0, так как плотность распределения – четная функция. Дисперсию случайной величины определим по формуле

$$D\xi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x^2\cos x dx.$$

Вычислив определенный интеграл, получаем

$$D\xi = \pi^2/4 - 1.$$

Функция F(x) на промежутке (–∝;–π/2) равна нулю, на промежутке (–π/2;π/2) эта функция равна (1 + sinx)/2, на промежутке (π/2; ∝) функция равна 1.

$$P(\pi/6<\xi<\pi/3)=(1+\sin x)/2\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Ответ:

$M\xi=0; D\xi=\pi^2/4-1;$

функция F(x) на промежутке (–∝;–π/2) равна нулю,
на промежутке (–π/2;π/2) - (1 + sinx)/2,
на промежутке (π/2; ∝) функция равна 1;

$P(\pi/6<\xi<\pi/3)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}.$

Пример 4. Задана дискретная двумерная случайная величина (X,Y):

Y	X		
	x_1	x_2	x_3

$y_1 =$	0,15	0,3	0,35
$y_2 =$	0,05	0,12	0,03

Найти:

а) безусловные законы распределения составляющих;

б) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1 = 0{,}4$;

в) условный закон распределения составляющей Y при условии, что $X = x_2 = 5$.

Решение.

а) Сложим вероятности «по столбцам», запишем закон распределения X:

X	2	5	8
p	0,2	0,42	0,38

Сложив вероятности «по строкам», найдем закон распределения Y:

Y	0,4	0,8
p	0,8	0,2

б) Найдем условные вероятности возможных значений X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1 = 0{,}4$:

$$p(x_1|y_1) = p(x_1, y_1)/p(y_1) = 0{,}15/0{,}8 = 3/16,$$
$$p(x_2|y_1) = p(x_2, y_1)/p(y_1) = 0{,}3/0{,}8 = 3/8,$$
$$p(x_3|y_1) = p(x_3, y_1)/p(y_1) = 0{,}35/0{,}8 = 7/16.$$

Таким образом, условный закон распределения X примет вид:

X	2	5	8
$p(x$	3/16	3/8	7/16

в) Аналогично найдем условный закон распределения Y:

Y	0,4	0,8
$p(y$	5/7	2/7

Для контроля вычислений целесообразно убедиться, что сумма вероятностей условного распределения равна 1.