Построение эпюр внутренних усилий, расчет прочности и построение упругой линии балки при плоском изгибе (2 задачи)

Исходные данные задач и параметры, подлежащие определению.

1. Для балки, изображенной на рис. 1:

$$q = 10 \ кН/м; \ P = 20 \ кН; \ M = 30 \ кН \cdot м; \ l = 10 \ м; \ a = 5 \ м; \ c = 3 \ м;$$

материал балки – сталь: $[\sigma] = 250 \ МПа$; $[\tau] = 150 \ МПа$; $E = 2 \cdot 10^5 \ МПа$.

– определить реакции опор и построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z;

– подобрать из условия прочности:

- прямоугольное поперечное сечение при установленном соотношении сторон $b = \dfrac{h}{3}$
- двутавровое поперечное сечение;

– построить эпюры изменения нормальных и касательных напряжений по высоте полученных сечений;

– определить по уравнению изогнутой оси вертикальные перемещения и построить эпюру их изменения по длине балки.

2. Для балки, изображенной на рис. 2:

$$P = q \cdot l \ кН; \ M = \frac{q \cdot l^2}{2} \ кН \cdot м;$$

$$l = 5 \ м; \ a = 2 \ м; \ c = 1 \ м;$$

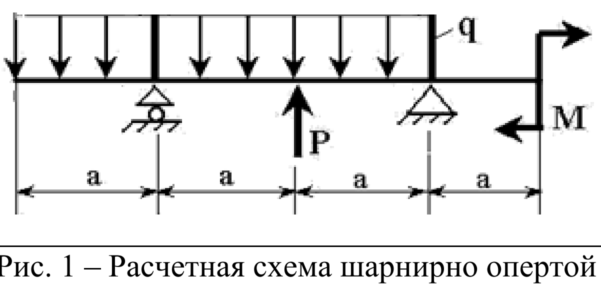
сечение балки – прямоугольное – со сторонами $b = 10 \ см$; $h = 20 \ см$;

материал балки – дерево: $[\sigma] = 25 \ МПа$; $[\tau] = 5 \ МПа$; $E = 0.1 \cdot 10^5 \ МПа$.

– определить в общем виде реакции опор и построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_z;

– подобрать из условий прочности грузоподъемность балки $[q]$ и построить эпюры изменения нормальных и касательных напряжений по высоте опасного сечения;

– методом начальных параметров определить прогиб и угол поворота сечения совпадающего со свободным концом балки.



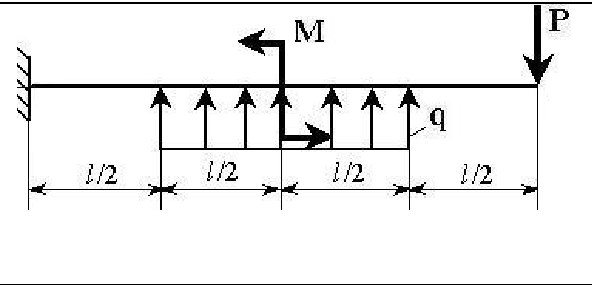
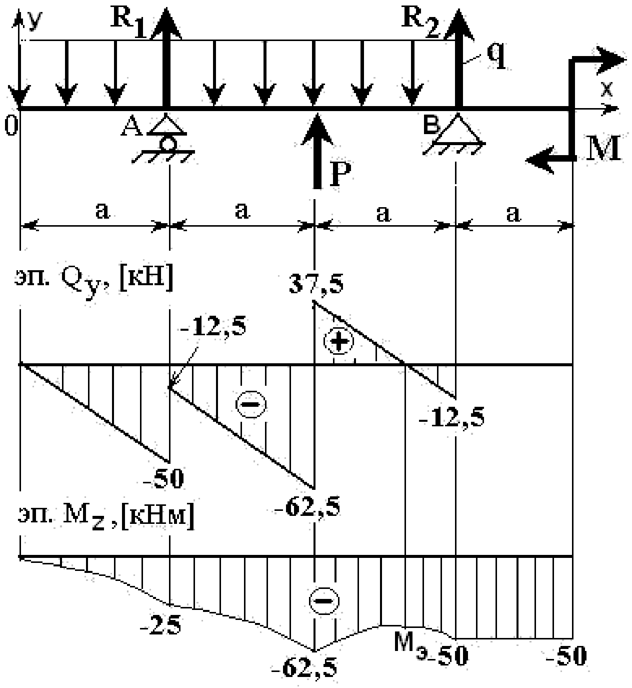


Рис. 1 – Расчетная схема шарнирно опертой балки	Рис. 2 – Расчетная схема консольной балки (определение грузоподъемности)

Построение эпюр внутренних усилий и расчет прочности при изгибе статически-определимых балок

шарнирно-опертая балка



$P = 100$ кН,
$M = 50$ кН·м,
$q = 50$ кН/м,
$a = 1$ м

$[\sigma] = 240$ МПа, $[\tau] = 100$ МПа:

1. Определение реакций опор:

Совмещаем начало координат с левым концом балки.

Сумма всех сил на вертикальную ось: $\sum_y = 0: -R_1 - R_2 + q\cdot 3a - P = 0,$

Сумма моментов относительно точки А:

$$\sum_A M = 0: R_2\cdot 2a - q\cdot 3a\cdot 0{,}5a + P\cdot a - M = 0 \Rightarrow R_2 = \frac{50-100+50\cdot 1{,}5}{2} = 12{,}5 \text{ кН};$$

При подстановке в первое уравнение получим:

$$R_1 = -R_2 + q\cdot 3a - P = -12{,}5 + 50\cdot 3 - 100 = 37{,}5 \text{ кН}.$$

Проверка – сумма моментов относительно точки В:

$$\sum_B M = 0: -R_1\cdot 2a + q\cdot 3a\cdot 1{,}5a - P\cdot a - M = -37{,}5\cdot 2 + 50\cdot 4{,}5 - 100 - 50 \equiv 0.$$

2. Определение значений поперечных сил $Q_y(x)$ и изгибающих моментов $M_z(x)$:

а) по участкам

$0 \le x_1 < a: Q_y(x_1) = -q\cdot x_1,$

$M_z(x_1) = -q\cdot x_1^2/2;$

$a \le x_2 < 2a: Q_y(x_2) = -q\cdot x_2 + R_1,$

$M_z(x_2) = -q\cdot x_2^2/2 + R_1\cdot(x_2 - a);$

$2a \le x_3 < 3a: Q_y(x_3) = -q\cdot x_3 + R_1 + P,$

$M_z(x_3) = -q\cdot x_3^2/2 + R_1\cdot(x_3 - a) + P\cdot(x_3 - 2a);$

$3a \le x_4 < 4a: Q_y(x_4) = -3qa + R_1 + P + R_2,$

$M_z(x_4) = -3qa\cdot(x_4 - 1{,}5a) + R_1\cdot(x_4 - a) + P\cdot(x_4 - 2a) + R_2\cdot(x_4 - 3a);$

б) Выражения для поперечной силы и изгибающего момента в одну строчку:

$$\mathbf{Q_y(x) = -q\cdot x + \underset{x>a}{\|}\ R_1 + \underset{x>2a}{\|}\ P + \underset{x>3a}{\|}\big[R_2 + q\cdot(x-3a)\big] =}$$

$$\mathbf{= -50\cdot x + \underset{x>1}{\|}\ 37{,}5 + \underset{x>2}{\|}\ 100 + \underset{x>3}{\|}\big[12{,}5 + 50\cdot(x-3)\big];}$$

$$\mathbf{M_z(x) = -q\cdot x\cdot\frac{x}{2} + \underset{x>a}{\|}\ R_1\cdot(x-a) + \underset{x>2a}{\|}\ P\cdot(x-2a) + \underset{x>3a}{\|}\left[R_2\cdot(x-3a) + q\cdot(x-3a)\cdot\frac{x-3a}{2}\right] =}$$

$$\mathbf{= -25\cdot x^2 + \underset{x>1}{\|}\ 37{,}5\cdot(x-1) + \underset{x>2}{\|}\ 100\cdot(x-2) + \underset{x>3}{\|}\big[12{,}5\cdot(x-3) + 25\cdot(x-3)^2\big];}$$

Заносим значения внутренних усилий в характерных точках в таблицу и строим эпюры

Координата	$\mathbf{x,[м]}$	0	1-0	1+0	2-0	2+0	3-0	3+0	4
Сила	$\mathbf{Q_y,[кН]}$	0	-50	-12,5	-62,5	37,5	-12,5	0	0
Момент	$\mathbf{M_z,[кН\cdot м]}$	0	-25	-25	-62,5	-62,5	-50	-50	-50

Определяем координату на третьем участке $\mathbf{2\le x\le 3}$, где поперечная сила равна нулю: $\mathbf{Q_y(x^*) = 50\cdot x^* + 137{,}5 = 0 \Rightarrow x^* = 2{,}75\ м}$, при этом $\mathbf{M_z^{экстр}}(\mathbf{x^*} = 2{,}75\,\mathbf{м}) = -48{,}44\,\mathbf{кН\cdot м}$ имеет максимум.

3. Выбор минимально-необходимых размеров поперечного сечения:

Опасное сечение по нормальным напряжениям $\mathbf{x = 2\ м}$: $\mathbf{\left|M_z^{max}\right| = 62{,}5\ кН\cdot м}$,

опасное сечение по касательным напряжениям $\mathbf{x = 2\ м}$: $\mathbf{\left|Q_y^{max}\right| = 62{,}5\ кН}$.

Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем минимально необходимый осевой момент сопротивления поперечного сечения:

$$\left|\sigma_x^{max}\right| = \frac{|\mathbf{M_z^{max}}|}{\mathbf{W_z}} \le [\sigma] \Rightarrow \mathbf{W_z^{min}} = \frac{\left|\mathbf{M_z^{max}}\right|}{[\sigma]} = \frac{\mathbf{62{,}5\cdot 10^3}}{\mathbf{240\cdot 10^6}} = \mathbf{260{,}4\cdot 10^{-6}\,м^3 = 260{,}4\,см^3},$$

для одного швеллера $\mathbf{W_z^{min} = 130{,}2\,см^3}$. По сортаменту выбираем швеллер № 18а, у которого осевой момент сопротивления $\mathbf{W_z = 132\,см^3}$, осевой момент инерции $\mathbf{I_z = 1190\,см^4}$, статический момент полусечения относительно нейтральной оси $\mathbf{S_z^{полусеч.} = 76{,}1\,см^3}$ и толщина стенки швеллера $\mathbf{d = 5{,}1\,мм}$.

Проверяем выполнение условия прочности по касательным напряжениям для выбранного сечения

$$\left|\tau^{max}\right| = \frac{\left|\mathbf{Q_y^{max}}\right|\cdot \mathbf{2S_z^{полусеч.}}}{\mathbf{2I_z\cdot 2d}} = \frac{\mathbf{62{,}5\cdot 10^3\cdot 2\cdot 76{,}1\cdot 10^{-6}}}{\mathbf{2\cdot 1190\cdot 10^{-8}\cdot 2\cdot 5{,}1\cdot 10^{-3}}} = \mathbf{39{,}2\cdot 10^6\,Па = 39{,}2\,МПа < [\tau] = 100\,МПа \Rightarrow}$$

условие прочности по касательным напряжениям выполнено.

4. Построение распределений нормальных и касательных напряжений для выбранного сечения

Нормальные напряжения на уровне нейтральной оси равны нулю, а касательные напряжений достигают наибольших значений, которые определены в предыдущем пункте.

Поскольку выбранное сечение в большую сторону отличается от минимально-необходимого, то максимальные действующие нормальные напряжения отличаются в меньшую сторону от допустимых: $\left|\sigma_x^{max}\right| = \dfrac{|M_z^{max}|}{2W_z^{18a}} = \dfrac{62{,}5 \cdot 10^3}{2 \cdot 132 \cdot 10^{-6}} = 0{,}238 \cdot 10^9\ \text{Па} = 238\ \text{МПа}$

Определяем значения касательных напряжений для точки 2 (находится на пересечении стенки и полки швеллера по вертикали). Отсеченная часть площади сечения соответствует площади полки:

$$S_z^{полки} = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 7{,}4 \cdot 0{,}93 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{0{,}93}{2}\right) = 58{,}7\ \text{см}^3$$

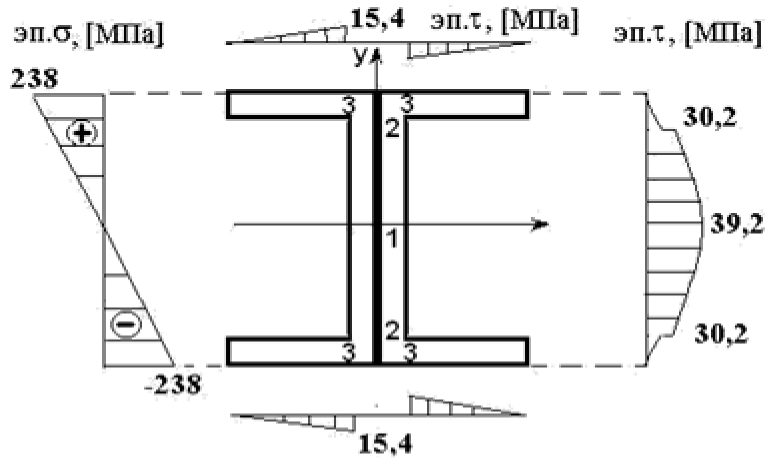
$$\left|\tau_2\right| = \frac{\left|Q_y^{max}\right| \cdot 2S_z^{полки}}{2I_z \cdot 2d} = \frac{62{,}5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 58{,}7 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1190 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-3}} = 30{,}2 \cdot 10^6\ \text{Па} = 30{,}2\ \text{МПа}$$

Определяем значения касательных напряжений для точки 3 (находится на пересечении полки и стенки швеллера по горизонтали):

$$S_{z3} = (b - d) \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = (7{,}4 - 0{,}51) \cdot 0{,}93 \cdot \left(\frac{18}{2} - \frac{0{,}93}{2}\right) = 54{,}7\ \text{см}^3$$

$$\left|\tau_3\right| = \frac{\left|Q_y^{max}\right| \cdot S_{z3}}{2I_z \cdot t} = \frac{62{,}5 \cdot 10^3 \cdot 54{,}7 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1190 \cdot 10^{-8} \cdot 9{,}3 \cdot 10^{-3}} = 15{,}4\ \text{МПа}.$$

По полученным точкам строим распределения напряжений.



5. Определение значений прогибов балки в характерных точках методом начальных параметров

Универсальное уравнение изогнутой оси балки для заданной схемы имеет вид:

$$v(x) = v_0 + v_0' \cdot x - \frac{q \cdot x^4}{24EI_z} + \underset{x>a}{\|} \frac{R_1(x-a)^3}{6EI_z} + \underset{x>2a}{\|} \frac{P(x-2a)^3}{6EI_z} + \underset{x>3a}{\|} \left[\frac{R_2(x-3a)^3}{6EI_z} + \frac{q \cdot (x-3a)^4}{24EI_z}\right];$$

Граничные условия:

$$x = 0: \quad Q_y(0) = 0,\ M_z(0) = 0; \quad x = 4a: \quad Q_y(4a) = 0,\ M_z(4a) = -m;$$

Условия на промежуточных шарнирных опорах:

$$x = a: \quad v(a) = 0; \quad x = 3a: \quad v(3a) = 0.$$

Подставляя последние условия в выражение $\mathbf{v(x)}$ получим:

$$\mathbf{v(a) = v_0 + v_0' \cdot a - \frac{q \cdot a^4}{24EI_z} = 0},$$

$$\mathbf{v(3a) = v_0 + v_0' \cdot 3a - \frac{q \cdot (3a)^4}{24EI_z} + \frac{R_1(3a-a)^3}{6EI_z} + \frac{P(3a-2a)^3}{6EI_z} = 0}.$$

Решая полученную систему уравнений, получим:

$$\mathbf{v_0 = \frac{-47{,}92}{EI_z} = \frac{-47{,}92 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 1190 \cdot 10^{-8}} = -0{,}02\ м}$$ (перемещение вниз),

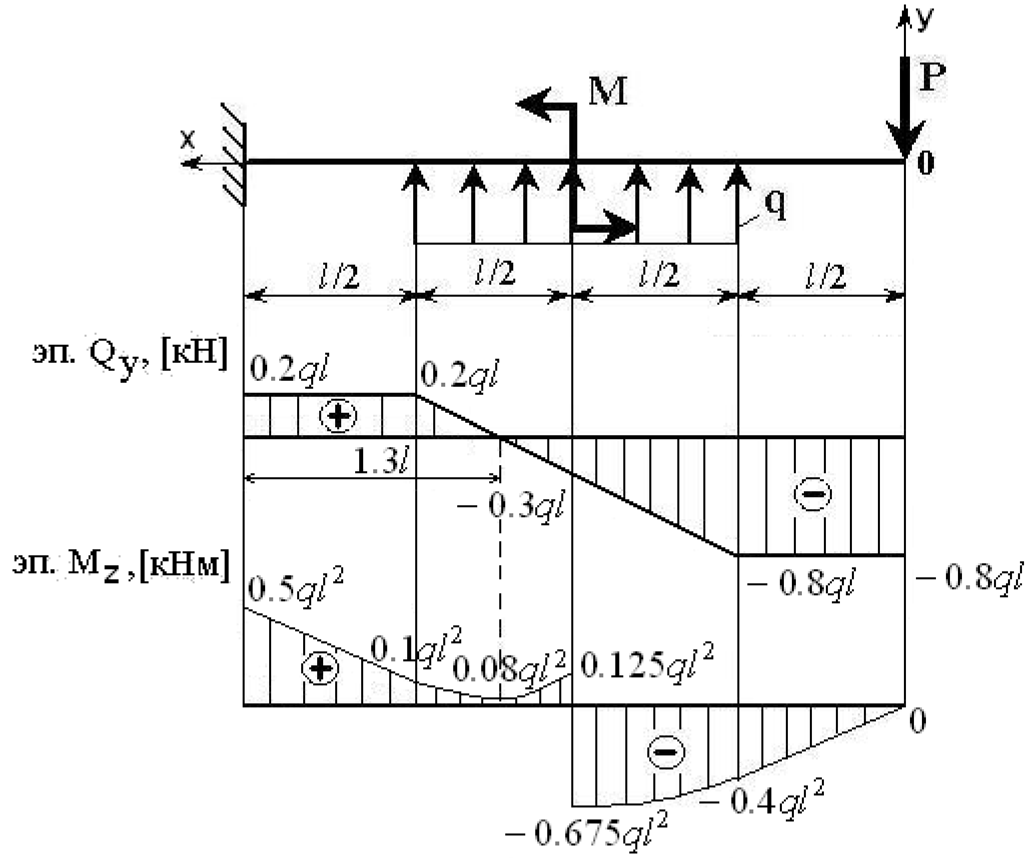
$$\mathbf{v_0' = \frac{50}{EI_z} = \frac{50 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 1190 \cdot 10^{-8}} = 0{,}021\ рад}$$ (поворот против часовой стрелки).

Определяем значения перемещений в остальных характерных точках

$$\mathbf{v(2a) = v_0 + v_0' \cdot 2a - \frac{q \cdot (2a)^4}{24EI_z} + \frac{R_1 a^3}{6EI_z} = 0{,}011\ м},$$

$$\mathbf{v(4a) = v_0 + v_0' \cdot 4a - \frac{q \cdot (4a)^4}{24EI_z} + \frac{R_1(3a)^3}{6EI_z} + \frac{P(2a)^3}{6EI_z} + \frac{R_2 a^3}{6EI_z} + \frac{q \cdot a^4}{24EI_z} = -0{,}032\ м};$$

Определение грузоподъемности для консольной балки



$P = 0.8ql$, $M = 0.8ql^2$, $l = 5\ м$, $[\sigma] = 240\,МПа$, $[\tau] = 100\,МПа$, $E = 2 \cdot 10^5\ МПа$

сечение – двутавр № 30.

Совмещаем начало координат со свободным концом балки (в этом случае не нужно определять реакции, возникающие в заделке)

1. Определение значений поперечных сил $\mathbf{Q_y(x)}$ и изгибающих моментов $\mathbf{M_z(x)}$:

а) по участкам:

$0 \le x_1 < \dfrac{l}{2}: \quad Q_y(x_1) = -P,$ $M_z(x_1) = -P \cdot x_1;$	$\dfrac{l}{2} \le x_2 < l: \quad Q_y(x_2) = -P + q \cdot \left(x_2 - \dfrac{l}{2}\right),$ $M_z(x_2) = -P \cdot x_2 + \dfrac{q \cdot \left(x_2 - \dfrac{l}{2}\right)^2}{2};$
$l \le x_3 < \dfrac{3l}{2}: \quad Q_y(x_3) = -P + q \cdot \left(x_3 - \dfrac{l}{2}\right),$ $M_z(x_3) = -P \cdot x_3 + \dfrac{q \cdot \left(x_3 - \dfrac{l}{2}\right)^2}{2} + M;$	$\dfrac{3l}{2} \le x_4 < 2l: \quad Q_y(x_4) = -P + q \cdot \left(x_4 - \dfrac{l}{2}\right) - q \cdot \left(x_4 - \dfrac{3l}{2}\right),$ $M_z(x_4) = -P \cdot x_4 + \dfrac{q \cdot \left(x_4 - \dfrac{l}{2}\right)^2}{2} + M - \dfrac{q \cdot \left(x_4 - \dfrac{3l}{2}\right)^2}{2};$

б) записываем выражения для $\mathbf{Q_y(x)}$ и $\mathbf{M_z(x)}$ в одну строку:

$$Q_y(x) = -P + \underset{\frac{l}{2}}{\|}\, q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right) - \underset{\frac{3l}{2}}{\|}\, q \cdot \left(x - \frac{3l}{2}\right) = -0.8ql + \underset{\frac{l}{2}}{\|}\, q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right) - \underset{\frac{3l}{2}}{\|}\, q \cdot \left(x - \frac{3l}{2}\right);$$

$$M_z(x) = -P \cdot x + \underset{\frac{l}{2}}{\|}\, \frac{q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{2} + \underset{l}{\|} M - \underset{\frac{3l}{2}}{\|}\, \frac{q \cdot \left(x - \frac{3l}{2}\right)^2}{2} =$$

$$= -0.8ql \cdot x + \underset{\frac{l}{2}}{\|}\, \frac{q \cdot \left(x - \frac{l}{2}\right)^2}{2} + \underset{l}{\|} 0.8ql^2 - \underset{\frac{3l}{2}}{\|}\, \frac{q \cdot \left(x - \frac{3l}{2}\right)^2}{2}.$$

Вычисляем значения внутренних усилий $\mathbf{Q_y(x)}$ **и** $\mathbf{M_z(x)}$ и строим эпюры

x,[м]	0	$\frac{l}{2}$	$l-0$	$l+0$	$\frac{3l}{2}$	$2l$
$\mathbf{Q_y}$**,[кН]**	$-0.8ql$	$-0.8ql$	$-0.3ql$	$-0.3ql$	$0.2ql$	$0.2ql$
$\mathbf{M_z}$**,[кН·м]**	0	$-0.4ql^2$	$-0.675ql^2$	$0.125ql^2$	$0.1ql^2$	$0.5ql^2$

Определяем координату на третьем участке $l \le x_3 < \dfrac{3l}{2}$, где поперечная сила равна 0:

$Q_y(x^*) = -0.8ql + q \cdot (x^* - \dfrac{l}{2}) = 0 \Rightarrow x^* = 0.8l + 0.5l = 1.3l$ *м*, при этом

$M_z(x^* = 1{,}3\ м) = -0.8ql \cdot 1.3l + \dfrac{q(1.3l - 0.5l)^2}{2} + 0.8ql^2 = 0.08ql^2$ *кН · м* имеет минимум.

2. Определение грузоподъемности $[q]$

Все необходимые геометрические характеристики сечения находим в сортаменте, для двутавра № 30: $W_z = 472\ см^4$, $I_z = 7080\ см^4$, $S_z = 268\ см^3$, $d = 6{,}5\ мм$.

Максимальное значение изгибающего момента: $M_z = -0.675ql^2\ кН \cdot м$, а максимальное значение поперечной силы: $Q_y = -0.8ql\ кН$.

Подберем нагрузку $[q]_1$ в первом приближении из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\left|\sigma^{\max}\right| = \left|\frac{M_z^{\max}}{W_z}\right| = \frac{0.675[q]_1 l}{W_z} \le [\sigma] \;=>\; [q]_1 \le \frac{[\sigma]\cdot W_z}{0.675l} = \frac{240\cdot 10^6 \cdot 472\cdot 10^{-6}}{0.675\cdot 5} = 34\ \frac{кН}{м}$$

Проверим выполнение условия прочности по касательным напряжениям:

$$\left|\tau^{\max}\right| = \frac{\left|Q_y^{\max}\right|\cdot S_z}{I_z \cdot b} = \frac{0.8[q]_1 l \cdot S_z}{I_z \cdot b} = \frac{0.8\cdot 34\cdot 10^3 \cdot 5\cdot 268\cdot 10^{-6}}{7080\cdot 10^{-8}\cdot 6{,}5\cdot 10^{-3}} = 80\ МПа > [\tau] = 100\ МПа$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполнено => грузоподъемность системы: $[q] = 34\ \dfrac{кН}{м}$.

3. Определение значений прогибов балки в характерных точках методом начальных параметров.

Универсальное уравнение изогнутой оси балки для заданной схемы имеет вид:

$$v(x) = v_0 + v_0' \cdot x + \frac{1}{EI_z}\left[-0.8ql\cdot\frac{x^3}{6} + \Big\|_{\frac{l}{2}} \frac{q\cdot\left(x-\frac{l}{2}\right)^4}{24} + \Big\|_{l} 0.8ql^2 \cdot \frac{(x-l)^2}{2} - \Big\|_{\frac{3l}{2}} \frac{q\cdot\left(x-\frac{3l}{2}\right)^4}{24}\right];$$

Угол поворота для заданной схемой определяется следующим уравнением:

$$\theta(x) = v'(x) = v_0' + \frac{1}{EI_z}\left[-0.8ql\cdot\frac{x^2}{2} + \Big\|_{\frac{l}{2}} \frac{q\cdot\left(x-\frac{l}{2}\right)^3}{6} + \Big\|_{l} 0.8ql^2 \cdot (x-l) - \Big\|_{\frac{3l}{2}} \frac{q\cdot\left(x-\frac{3l}{2}\right)^3}{6}\right];$$

Граничные условия – в заделке прогиб и угол поворота равны нулю.

$$x = 2l: \quad v(2l) = 0; \quad v'(2l) = 0.$$

Подставляя последние условия в выражение $v(x)$, получим:

$$v(2l) = v_0 + v_0' \cdot 2l + \frac{1}{EI_z}\left[-0.8ql\,\frac{(2l)^3}{6} + \frac{q\cdot\left(\frac{3l}{2}\right)^4}{24} + 0.8ql^2\cdot\frac{(l)^2}{2} - \frac{q\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^4}{24}\right] = 0;$$

$$\theta(2l) = v'(2l) = v_0' + \frac{1}{EI_z}\left[-0.8ql\cdot\frac{(2l)^2}{2} + \frac{q\cdot\left(\frac{3l}{2}\right)^3}{6} + 0.8ql^2\cdot l - \frac{q\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^3}{6}\right] = 0;$$

Решая полученную систему уравнений, получим:

$v_0 = -0{,}088$ *м* (перемещение вниз), $\theta_0 = v_0' = -0{,}078$ *рад* (поворот по часовой стрелке).

Определяем значения перемещений в остальных характерных точках

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = -0{,}03\ \text{м},\ \ v(l) = -0{,}10\ \text{м};\ \ v\left(\frac{3l}{2}\right) = 0{,}08\ \text{м}.$$