Учебное издание

Прилипко Виктор Константинович
Щербак Сергей Яковлевич
Якимова Ольга Александровна

ФИЗИКА

Учебно-методическое пособие

Редактор *А. В. Подчепаева*

Компьютерный набор и верстка *Н. С. Степановой*

Сдано в набор 11.02.04. Подписано к печати 24.03.04. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 4,4. Усл. кр.-отт. 4,5. Уч.-изд. л. 4,75. Тираж 200 экз. Заказ № 302.

Редакционно-издательский отдел
Отдел электронных публикаций и библиографии библиотеки
Отдел оперативной полиграфии
СПбГУАП
190000, Санкт-Петербург, ул. Б. Морская, 67

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

В. К. Прилипко, С. Я. Щербак,
О. А. Якимова

ФИЗИКА

Учебно-методическое
пособие

Санкт-Петербург
2004

УДК 53(075)
ББК 22.3
П76

Прилипко В. К., Щербак С. Я., Якимова О. Я.

П76 Физика: Учебно-методическое пособие / СПбГУАП. СПб., 2004. 76 с.: ил.

Учебно-методическое пособие содержит задачи и примеры их решения по курсу общей физики для студентов-заочников технических специальностей.

Рецензент
доктор физико-математических наук профессор *Н. А. Балошин*
(Санкт-Петербургский государственный университет точной механики и оптики)

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

ПРЕДИСЛОВИЕ

При написании пособия ставилась цель создания компактного сборника задач по основным разделам курса физики, содержащего несложные в математическом отношение задачи. В то же время была сделана попытка избежать копирования существующих на отечественном рынке учебников, поэтому в качестве источника было использовано 3-е издание популярного за рубежом, но не переводившегося у нас учебника по физике Д. Халидея и Р. Резника.

Пособие содержит программу курса общей физики и указания к выполнению контрольных работ.

Приводимые задачи разделены на две части: "Механика. Колебания и волны. Термодинамика. Статистическая физика" и "Электричество и магнетизм." В каждой части рассмотрены примеры решения задач.

Ввиду особой важности для физики векторных величин в пособие помимо обязательных разделов включен раздел, посвященный векторам и действиям с ними.

ПРОГРАММА КУРСА

Введение

Важнейшие этапы истории физики. Роль физики в развитии техники. Методы физического исследования: опыт, гипотеза, эксперимент, теория. Общая характеристика курса физики.

Физические основы классической и релятивистской механики

Предмет механики. Механическое движение. Понятие состояния в классической механике. Детерминизм классической механики. Границы применимости классической механики. Релятивистская и квантовая механика.

Кинематика

Кинематика движения материальной точки. Скорость и ускорение. Нормальное и касательное ускорения. Радиус кривизны траектории. Основная задача кинематики материальной точки. Кинематика движения абсолютно твердого тела. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Связь линейных и угловых величин при вращательном движении.

Динамика

Инерциальные системы отсчета. Основные законы классической динамики – законы Ньютона. Основная задача динамики материальной точки. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции. Закон сохранения импульса. Центр масс и его движение. Система центра масс.

Работа и энергия

Механическая работа и мощность. Кинетическая энергия. Поля сил. Консервативные и диссипативные силы. Условие потенциальности поля сил. Замкнутые и незамкнутые системы. Потенциальная энергия системы. Связь между потенциальной энергией и полем консервативных сил. Законы изменения и сохранения механической энергии. Связь закона сохранения энергии с изотропностью пространства и времени. Системы единиц.

Динамика вращательного движения твердого тела

Момент силы и момент импульса. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса. Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси. Момент инерции. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела. Уравнения движения и условия равновесия твердого тела. Законы сохранения и свойства симметрии пространства и времени.

Элементы специальной теории относительности

Принцип относительности Галилея, преобразования Галилея. Постулаты специальной теории относительности. Интервал, его инвариантность Преобразования Лоренца. Следствия из преобразований Лоренца: понятие одновременности, относительность промежутков времени между событиями, сокращение линейных размеров движущихся тел, преобразование скоростей, интервал.

Релятивистский импульс. Основное уравнение релятивистской динамики. Кинетическая энергия релятивистской частицы. Закон взаимосвязи массы и энергии. Связь между энергией и импульсом частицы. Основные идеи общей теории относительности.

Физика колебаний и волн

Гармонические и ангармонические колебания (математический и физический маятники, колебания под действием упругой силы). Сложение колебаний. Физический смысл спектрального разложения. Дифференциальное уравнение колебаний. Затухающие колебания. Вынужденные колебания. Резонанс.

Кинематика волновых процессов (плоские и сферические волны). Волновое уравнение. Принцип суперпозиции. Энергия волны. Поток энергии. Интенсивность волны. Стоячая волна. Звук. Основные характеристики звуковой волны. Эффект Доплера для звуковых волн.

Термодинамика и элементы статистической физики

Термодинамические состояния и процессы. Понятие функции состояния. Внутренняя энергия. Количество теплоты. Работа тела при изменении его объема. Первое начало термодинамики. Температура и внутренняя энергия как функция состояния. Теплоемкость. Энтропия. Второе и третье начала термодинамики. Теоремы Карно. Закон возрастания энтропии.

Идеальный газ (уравнение состояния, внутренняя энергия, теплоемкости, уравнение адиабаты, работа при различных процессах, энтропия). Вероятность и флуктуации. Распределения Максвелла. Скорости теплового движения молекул. Средняя кинетическая энергия молекулы. Основное уравнение кинетической теории идеальных газов. Распределение Больцмана. Энтропия и вероятность. Фазовые равновесия и превращения. Элементы неравновесной термодинамики. Кинетические явления.

Электрическое поле в вакууме

Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Системы единиц. Принцип суперпозиции. Электрический диполь. Работа сил электростатического поля. Теорема о циркуляции вектора напряженности. Потенциальность электростатического поля. Напряженность и потенциал электростатического поля, связь между ними. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме. Применение теоремы Гаусса к расчету полей.

Электрическое поле в веществе

Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков. Свободные и связанные заряды. Диэлектрическая восприимчивость. Диэлектрическая проницаемость. Электрическое смещение (индукция). Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектрике. Условия на границе раздела двух диэлектриков. Поле внутри проводника и у его поверхности. Общая задача электростатики. Электроемкость проводника. Конденсаторы. Энергия системы электрических зарядов, заряженного проводника. Объемная плотность энергии электрического поля.

Электрический ток

Условия существования электрического тока. Уравнение неразрывности. Электродвижущая сила. Непотенциальность поля сторонних сил. Законы Ома и Джоуля-Ленца в интегральной и дифференциальной формах.

Магнитное поле в вакууме

Магнитная индукция. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции. Поле движущегося заряда. Магнитное поле прямолинейного тока. Магнитное поле кругового тока. Закон Ампера. Взаимодействие токов. Системы единиц. Контур с током в магнитном поле. Сила Лоренца.

Теорема Гаусса для магнитного поля. Вихревой характер магнитного поля. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции для магнитного поля в вакууме. Магнитное поле соленоида и тороида.

Магнитное поле в веществе

Намагниченность. Молекулярные токи. Магнитная восприимчивость. Магнитная проницаемость. Напряженность магнитного поля. Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля (интегральная и дифференциальная формы). Условия на границе двух магнетиков. Электромагнитная индукция.

Закон Фарадея. Правило Ленца. Самоиндукция. Индуктивность. Взаимная индукция. Взаимная индуктивность. Объемная плотность энергии магнитного поля.

Уравнения Максвелла

Вихревое электрическое поле. Ток смещения. Система уравнений Максвелла. Материальные уравнения. Квазистационарные токи. Инвариантность уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца. Принцип относительности в электродинамике.

Волновая оптика

Волновое уравнение для электромагнитной волны. Основные свойства электромагнитных волн. Вектор Пойнтинга. Интенсивность света. Эффект Допплера для электромагнитных волн.

Геометрическая и волновая оптика. Принцип Ферма

Интерференция света. Когерентность и монохроматичность. Дифракция света. Принцип Гюйгенса-Френеля. Метод зон Френеля и его применение. Дифракция по Фраунгоферу на щели и дифракционной решетке. Понятие о голографии. Естественный и поляризованный свет. Закон Малюса. Поляризация света при отражении и преломлении. Закон Брюстера. Двойное лучепреломление.

Нормальная и аномальная дисперсия света. Фазовая и групповая скорости. Формула Рэлея. Элементы Фурье – оптики.

Основы квантовой оптики

Тепловое излучение тел. Закон Кирхгофа. Абсолютно черное тело. Законы излучения абсолютно черного тела. Квантовая гипотеза и формула Планка. Вывод из формулы Планка законов Вина и Стефана-Больцмана. Фотоэффект, опыты Столетова. Фотоны – частицы с нулевой массой. Давление света. Корпускулярно-волновой дуализм электромагнитного излучения. Эффект Комптона.

Квантовая механика

Теория Бора. Опыты Франка и Герца. Спектры. Корпускулярно-волновой дуализм микрочастиц. Гипотеза де Бройля и ее экспериментальное подтверждение. Фазовая и групповая скорости волн де Бройля. Волновой пакет. Соотношения неопределенностей Гейзенберга. Естественная ширина спектральных линий. Статистическое истолкование волн де Бройля.

Волновая функция ее основные свойства. Принцип причинности в квантовой механики. Временное уравнение Шредингера. Стационарное уравнение Шредингера. Свободная частица. Частица в бесконечно глубокой потенциальной яме, квантование энергии. Квантовый осциллятор. Нулевая энергия, нулевые колебания. Прохождение микрочастиц через потенциальный барьер. Туннельный эффект. Атом водорода в квантовой механике. Квантовые числа. Орбитальный механический и магнитный моменты электрона в атоме. Орбитальное гиромагнитное отношение. Опыт Штерна и Герлаха. Спин электрона.

Принцип тождественности микрочастиц. Фермионы и бозоны. Симметрия волновой функции системы одинаковых частиц. Принцип Паули. Объяснение периодической системы элементов Д. И. Менделеева.

Элементы квантовой электроники

Индуцированные и спонтанные переходы. Коэффициенты Эйнштейна. Свойства индуцированного излучения. Инверсная заселенность уровней. Усиление излучения. Принцип работы лазера. Типы лазеров. Свойства лазерного излучения.

Статистическая физика

Статистический метод. Фазовое пространство. Распределение Гибса. Статистическое истолкование энтропии. Свободная энергия. Статистическое описание квантовой системы, различие между квантово-механической и статистической вероятностями. Статистика Максвелла-Больцмана. Квантовые статистики Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна. Сравнение различных статистик. Распределение Ферми-Дирака для электронного газа. Энергия Ферми, вырожденный и невырожденный электронный газ. Электронная теплоемкость. Теплоемкость

кристаллической решетки. Классическая теория, теория Эйнштейна и Дебая. Фононы. Фотонный газ. Вывод формулы Планка.

Физика ядра и элементарных частиц

Строение атомных ядер. Нуклоны. Дефект массы и энергия связи ядра. Элементарные частицы. Их классификация и взаимная превращаемость. Четыре типа фундаментальных взаимодействия. Кварки. Понятие об основных проблемах современной физики и астрофизики.

Рекомендуемая литература

Основная

1. *Савельев И. В.* Курс общей физики: В 3 т. М.: Наука, 1989.

2. *Трофимова Т. И.* Курс физики. М.: Высш. шк., 1990.

3. Физика (механика): Метод. указания к практическим занятиям/ СПбГААП. СПБ., 1990.

4. Физика (колебания и волны, молекулярная физика): Метод. указания к практическим занятиям/ СПбГААП. СПБ., 1991.

Дополнительная

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. М.: Наука, 1989. Т. 1

2. *Чертов А. Г., Воробьев А. А.* Задачник по физике. М.: Высш. шк., 1988.

3. *Яворский Б. М., Детлаф А. А.* Справочник по физике. М.: Наука, 1990.

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1. Специальности 1903 и 2007 изучают физику в 1, 2, 3 и 4-м семестрах; специальности 2013, 2204 и 2203 – в 1, 2 и 3-м семестрах; специальность 2307 – во 2, 3 и 4-м семестрах.

Контрольные работы выполняются по одной в каждом семестре и сдаются в деканат заочного факультета в установленные сроки.

2. Номера вариантов определяются по последней цифре номера студенческого билета.

3. Контрольные работы нужно выполнять в школьной тетради, на обложке которой привести сведения по следующему образцу:

СПбГУАП ЗАОЧНЫЙ ФАКУЛЬТЕТ
Контрольная работа № 1 по физике Студента (ки) Киселева А. В. Шифр/ (№ студ. билета) Группа № ...

4. Условия задач в контрольной работе надо переписать полностью без сокращений. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставлять поля.

5. В конце контрольной работы указать, каким учебным пособием студент пользовался при изучнии физики (название учебника, автор, год издания). Это делается для того, чтобы рецензент в случае необходимости мог указать, что следует студенту изучить для завершения контрольной работы.

6. Зачтенные контрольные работы предъявляются экзаменатору. Студент должен быть готов во время экзамена дать пояснения по существу решения задач, входящих в контрольные работы.

7. Решения задач следует сопровождать краткими, но исчерпывающими пояснениями; в тех случаях, когда это возможно, дать чертеж, выполненный с помощью чертежных принадлежностей.

8. Решать задачу надо в общем виде, т. е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи. При таком способе решения не производятся вычисления промежуточных величин.

9. После получения расчетной формулы проверьте ее правильность с точки зрения размерности: подставьте в формулу вместо символов величин обозначения единиц этих величин, произведите с ними действия в соответствии с формулой и убедитесь в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это значит, что задача решена неверно.

10. Числовые значения величин при подстановке их в расчетную формулу следует выражать только в единицах СИ.

11. При подстановке в расчетную формулу, а также при записи ответа числовые значения величин следует записывать как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, вместо 3520 надо записать $3{,}52 \cdot 10^3$, вместо 0,00129 записать $1{,}29 \cdot 10^{-3}$ и т. п.

12. Вычисления по расчетной формуле надо проводить с соблюдением правил приближенных вычислений (см. в "Задачнике по физике" А. Г. Чертова, А. А. Воробьева "Приложение о приближенных вычислениях"). Как правило, окончательный результат следует записывать с тремя значащими цифрами. Это относится и к случаю, когда результат получен с применением калькулятора.

Варианты по 1-й части курса

Варианты	Номера задач									
0	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
1	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
2	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
3	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
4	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
5	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
6	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
7	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
8	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
9	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Варианты по 2-й части курса

Вариант	Номера задач									
0	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
1	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
2	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
3	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
4	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
5	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
6	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
7	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
8	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
9	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

МЕХАНИКА. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ. ТЕРМОДИНАМИКА. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Векторы. Действия с ними

1. Рассмотрите два перемещения: модуль первого равен 3 м, а второго – 4 м. Изобразить на рисунке, как должны складываться векторы перемещений, чтобы вектор результирующего перемещения имел модуль: а) 7 м; б) 1 м; в) 5 м.

2. Складываются векторы $\vec a$ и $\vec b$. Доказать, что результирующий вектор не может быть больше $a + b$ или меньше $|a - b|$.

3. Даны два вектора: $\vec a = 4\vec i - 3\vec j + \vec k$ и $\vec b = -\vec i + \vec j + 4\vec k$. Найти: а) $\vec a + \vec b$; б) $\vec a - \vec b$; в) вектор $\vec c$, который удовлетворяет равенству: $\vec a - \vec b + \vec c = 0$.

4. Даны два вектора: $\vec a = 4\vec i - 3\vec j$ и $\vec b = 6\vec i + 8\vec j$. Найти величину и направление $\vec a, \vec b, \vec a + \vec b, \vec b - \vec a$, и $\vec a - \vec b$.

5. Два вектора $\vec a$ и $\vec b$ имеют компоненты в условных единицах: $a_x = 3{,}2$; $a_y = 1{,}6$; $b_x = 0{,}5$; $b_y = 4{,}5$. 1. Найти угол между $\vec a$ и $\vec b$. 2. Найти компоненты вектора $\vec c$, который перпендикулярен $\vec a$, лежит в плоскости $x - y$ и имеет величину 5,0 у. е.

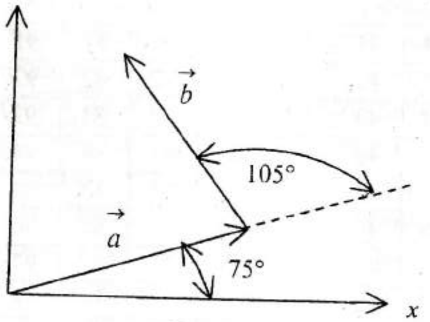


Рис.1

6. Что представляет собой геометрическое место точек конца радиус-вектора $\vec r = \vec a + \xi \vec b$, где $\vec a$ и $\vec b$ – постоянные векторы, а ξ – переменное число?

7. Два вектора имеют одинаковую величину, равную 10 ед. Они ориентированы, как показано на рис. 1. Их

векторная сумма равна $\vec r$. Найти: а) x- и y-компоненты $\vec r$; б) модуль вектора $\vec r$; в) угол, который вектор $\vec r$ составляет с осью ox.

8. Задан вектор $\vec a = 4\vec i + 7\vec j$. Найти его проекцию на ось l, которая образует угол $\alpha = 30°$ с осью x.

9. Даны три вектора: $\vec a = 3\vec i + 3\vec j - 2\vec k$; $\vec b = -\vec i - 4\vec j + 2\vec k$; $\vec c = 2\vec i + 2\vec j + \vec k$.

Найти: а) $\vec a \cdot (\vec b \times \vec c)$; б) $\vec a \cdot (\vec b + \vec c)$; в) $\vec a \times (\vec b + \vec c)$.

10. На рис. 2 показаны два вектора $\vec a$ и $\vec b$ и две координатные системы, которые отличаются друг от друга тем, что оси x и x', а также y и y' составляют между собой угол α. Доказать аналитически, что их сумма – вектор $\vec a + \vec b$ имеет величину и направление, независящие от координатной системы.

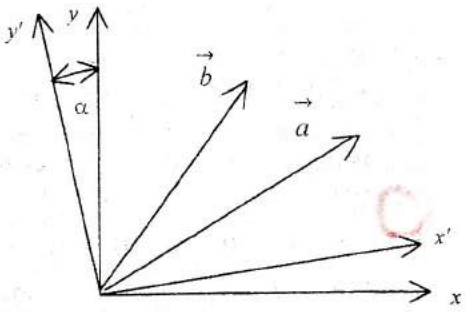


Рис. 2

Кинематика

11. Поезд движется с постоянной скоростью 60 км/час в направлении на восток в течение 40 мин., затем под углом 45° на северо-восток в течение 20 мин. и, наконец, на запад в течение 50 мин. Определить среднюю скорость поезда за время поездки.

12. Частица движется вдоль положительного направления оси ox и занимает в последующие моменты времени следующие положения:

x(м)	0,08	0,05	0,04	0,05	0,08	0,13	0,2
t(с)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0

1. Изобразить графически зависимость перемещения от времени.
2. Определить среднюю скорость частицы в интервалах времени 0,0–1,0 с; 0,0–2,0 с; 0,0–3,0 с; 0,0–4,0 с.
3. Определить наклон кривой в точках: 0,0; 1,0; 2,0; 3,0; 4.0 и 5,0 с.
4. Построить график зависимости угла наклона от времени и по графику определите ускорение в моменты времени 2,0; 3,0 и 4,0 с.

13. Электрон начинает двигаться из состояния покоя с ускорением, зависящим от времени по закону $a = kt$, где $k = 1{,}5$ м/с. 1. Изобразить графически зависимость a от времени для первых 10 с движения. 2. По графику *1* построить график зависимости скорости v электрона от времени и определить скорость электрона в конце пятой секунды. 3. По графику *2* построить график зависимости координаты x электрона от времени и определить величину перемещения электрона за первые пять секунд движения.

14. Координата частицы зависит от времени по закону $x = at^2 - bt^3$, где x – в метрах, t – в секундах, $a = 3\text{м}/\text{с}^2$, $b = 1\text{м}/\text{с}^3$. 1. За какое время координата частицы достигнет максимального положительного значения? 2. Какой путь пройдет частица за первые четыре секунды? 3.Чему равна скорость в конце каждой из первых четырех секунд? 4. Чему равно ускорение к концу каждой из первых четырех секунд? 5. Чему равна средняя скорость в интервале времени 2–4 с?

15. Радиус-вектор частицы зависит от времени по закону $\vec{r}(t) = \vec{i} + 4\quad t^2\vec{j} + t\vec{k}$. 1. Написать выражения для векторов скорости и ускорения частицы. 2. Получить уравнение для траектории движения частицы.

16. Радар радиолокационной станции ведет наблюдение за приближающимся снарядом. В некоторый момент времени получена следующая информация: снаряд достиг максимальной высоты и движется горизонтально со скоростью v; расстояние до снаряда по прямой – L, угол между направлением на снаряд и горизонтом – α. Определить расстояние d между наблюдателем и местом предполагаемого падения снаряда.

17. Частица движется в плоскости по закону

$$x = R\sin(wt) + wRt,$$
$$y = R\cos(wt) + R,$$

где w и R – постоянные коэффициенты. Эта кривая называется *циклоидой*. По такой кривой движется точка, лежащая на ободе колеса, которое движется вдоль оси ox без проскальзывания. 1. Нарисовать график траектории. 2. Рассчитать скорость и ускорение точки там, где y минимально и максимально.

18. Зависимость радиус-вектора частицы от времени описывается законом $\vec{r} = at\vec{i} - bt\vec{j}$, где a и b – положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории частицы; б) скорость $\vec{V}(t)$ и ускорение $\vec{a}(t)$ частицы; в) модули скорости v и ускорения a; г) среднюю скорость частицы $\langle V \rangle$ за время от нуля до t.

19. Написать уравнение для угла поворота тела, совершающего 33 оборота в минуту, если начальный угол $\theta_0 = 1{,}2$ рад.

20. Диск вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через центр диска и перпендикулярной его плоскости (рис. 3). В некоторый момент времени известны угловая скорость $\vec{\omega}$ и угловое ускорение $\vec{\beta}$ диска. Найти скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ произвольной точки A диска, положение которой задается вектором $\vec{r}$, проведенным из центра диска. Рассмотреть случаи: а) $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ параллельны; б) $\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ антипараллельны. Ответы иллюстрировать рисунком.

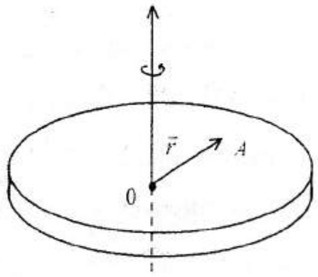


Рис. 3

Динамика материальной точки

21. Две частицы массой m каждая связаны невесомой струной длиной $2l$. Постоянная сила F приложена к средней точке струны ($x = 0$)перпендикулярно к ней (рис. 4). Чему равно ускорение каждой частицы в направлении оси x?

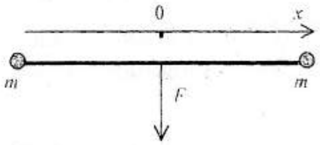


Рис. 4

22. Лампа висит на шнуре в опускающемся лифте. Лифт, перед тем как остановиться, движется с замедлением 2,4 м/с^2. 1. Чему равна масса лампы, если натяжение шнура 89 Н? 2. Чему равняется натяжение шнура, если лифт поднимается с ускорением 2,4 м/с^2?

23. Парашютист массой 80 кг опускается с ускорением 2,5 м/с^2. Масса парашюта 5 кг. Определите: а) силу, с которой воздух действует на парашют; б) с какой силой парашютист действует на парашют?

24. Тело массой m скользит по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. Вся система расположена в лифте. Найти ускорение груза вдоль наклонной поверхности в следующих случаях: а) лифт опускается с постоянной скоростью v; б) лифт поднимается с постоянной скоростью v; в) лифт опускается с ускорением a; г) лифт поднимается с ускорением a; д) трос лифта лопнул; е) для случая *в* найти силу, с которой тело давит на наклонную плоскость.

25. Тело падает в воздухе. Сила сопротивления воздуха удовлетворяет уравнению $f = -kv$, где v – скорость тела относительно воздуха, а k – постоянный коэффициент. 1. Показать, что уравнение второго закона Ньютона имеет вид $mg - k\dfrac{dy}{dt} = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$, где y – вертикальная координата тела. 2. Показать, что тело будет ускоряться, пока его скорость не станет равной $v_t = \dfrac{mg}{k}$ – скорости установившегося движения. 3. Подстановкой в *1* показать, что скорость v тела удовлетворяет уравнению $v = v_t(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$. Изобразить эту зависимость графически. 4. Изобразить графически зависимость координаты y и ускорения a от времени, имея в виду, что начальное ускорение равно g, а в конце оно равно нулю.

26. Полагая, что только передние колеса автомобиля могут сообщить ему ускорение и что на эти колеса приходится половина веса машины, определите максимально возможное ускорение, если коэффициент трения колес о дорогу $k = 0{,}35$.

27. Тело соскальзывает по наклонной плоскости под углом α к горизонту с постоянной скоростью. 1. Как далеко поднимется тело вверх по указанной плоскости до остановки, если его начальная скорость равняется v_0? 2. Соскользнет ли тело вниз после этого?

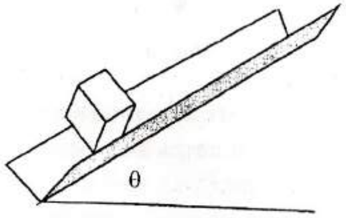


Рис. 5

28. Кирпич массой m скользит по наклоненному под углом θ к горизонту желобу прямоугольного сечения (рис. 5). Коэффициент трения скольжения тела о желоб равен k. Найти ускорение тела.

29. Маленький кубик массы m расположен внутри воронки, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью n об/с. Стенки воронки образуют с горизонтальной плоскостью угол θ. Коэффициент трения между кубиком и воронкой – μ; расстояние от кубика до оси вращения – r. Определить максимальную и минимальную величины угловой скорости, при которых кубик остается неподвижным относительно воронки (рис. 6).

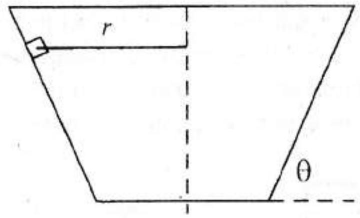


Рис. 6

30. Самолет летит в горизонтальной плоскости по кругу со скоростью $V = 480$ км/ч. Каков радиус этого круга, если крылья самолета наклонены под углом 45° к вертикали?

Работа. Энергия

31. Кусок льда весом 440 Н скользит вдоль наклонной плоскости длиной 1,5 м и высотой 0,9 м. Человек, придерживая его, действует на него силой, направленной вдоль наклонной плоскости так, что кусок движется с постоянной скоростью. Коэффициент трения льда о поверхность равен 0,1. Найти: а) силу, с которой человек действует на лед; б) работу, совершенную человеком; в) работу силы тяжести; г) работу сил, действующих на лед со стороны поверхности; д) изменение кинетической энергии льда.

32. Сила действует на тело по закону: $F = \dfrac{a}{x^2}$, где $a = 9$ н/м^2 и смещает его из положения $x = 1$ в $x = 3$. Найти работу указанной силы на этом перемещении.

33. Исходя из определения работы рассчитайте: а) работу силы F по медленному отклонению на угол ϕ от вертикального направления тела массой m, висящего на подвесе длиной l. Сила все время направлена горизонтально; б) какую работу при этом совершит сила натяжения подвеса? в) чему равна работа, если F направлена вдоль направления перемещения тела?

34. Тело массой M имеет в начальный момент времени скорость V_0, направленную вправо и находится в таком положении, что со стороны пружины на него сила не действует, так как пружина недеформирована. Тело движется вправо и, пройдя расстояние l, останавливается (рис. 7). Коэффициент упругости пружины k, а коэффициент трения тела о поверхность – μ. Когда тело переместится в указанное положение рассчитать: а) работу сил трения; б) работу силы, действующей на тело со стороны пружины; в) если есть еще силы, действующие на тело, то чему равна их работа? г) чему равна работа всех сил, действующих на тело? д) исходя из теоремы о кинетической энергии выразить l через M, V_0, g и k.

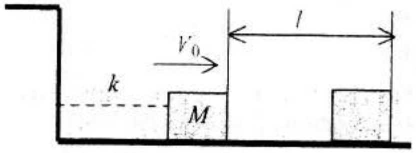


Рис. 7

35. Сила действует на тело массой m = 3 кг так, что положение тела изменяется по закону $x = 3t - 4t^2 + t^3$, где x – в метрах, а t – в секундах. 1. Найти работу этой силы в течение первых четырех секунд. 2. Найти мощность силы в момент времени 1,0 с.

36. Цепь лежит на гладком столе, свешиваясь через его край на одну пятую ее длины. Если масса цепи m и длина l, то какую работу надо совершить, чтобы втянуть на стол свешивающуюся часть цепи?

37. Некоторая пружина не удовлетворяет закону Гука. Сила упругости пружины в ньютонах зависит от растяжения x (в метрах) по закону $52{,}8x + 38{,}4x^2$ и направлена в сторону, противоположную растяжению. 1. Найти работу, необходимую для растяжения пружины от $x = 0{,}5$ до $x = 1{,}0$ м; 2. Один конец пружины закрепили, а к другому прикрепили тело массой 2,17 кг и растянули пружину на $x = 1{,}0$ м. Если тело затем отпустить, то чему равна скорость тела в момент прохождения $x = 0{,}5$ м? 3. Является ли сила, развиваемая пружиной, консервативной?

38. Написать выражение для силы, которой соответствует потенциальная энергия $U = -ax^2 + bxy + z$.

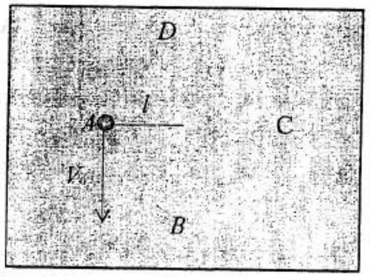


Рис. 8

39. Легкий стержень длиной l подвешен за конец так, что может свободно вращаться относительно него. На другом конце закреплен груз массой m. Система приводится во вращение со скоростью V_0, как показано на рис. 8. Тело достигает верхней точки и останавливается. 1. Вывести формулу для V_0 через параметры l, m и g.

2. Каково натяжение стержня в точке B? 3. В точке подвеса появилось трение, после чего тело (при тех же начальных условиях) поднялось в точку C. Рассчитать в этом случае работу сил трения до момента полной остановки, после того как груз совершил несколько колебаний.

40. Эскалатор длиной 12 м соединяет два этажа, отстоящие по высоте на 7,6 м. Скорость ленты эскалатора 0,61 м/с. 1. Рассчитать мощность двигателя эскалатора, если необходимо поднимать 100 человек в минуту. Средняя масса одного человека 73 кг. 2. Один человек (710 Н) поднимается по эскалатору за 10 с. Какую работу совершает двигатель в этом случае? 3. Если человек повернет на середине пути и начнет спускаться по эскалатору так, что его положение в пространстве останется неизменным, совершает ли двигатель работу в этом случае? Какая мощность двигателя требуется в этом случае?

Закон сохранения импульса. Столкновения частиц

41. Массы и координаты четырех частиц следующие: 5 кг, $x = y = 0$, см.; 3 кг, $x = y = 8$ см; 2 кг, $x = 3$ см, $y = 0$ см; 6 кг, $x = -2$ см, $y = -6$ см. Найти координаты центра масс этого собрания частиц.

42. Мяч массой m и радиусом R помещен внутри полой сферы такой же массы с внутренним радиусом $2R$. Начальное положение мяча и сферы показано на рис. 9. Система исходно покоится на гладкой горизонтальной поверхности. Затем мяч отпускают, и он начинает кататься внутри сферы и через некоторое время останавливается в нижней ее точке. На какое расстояние сместится сфера в течение этого процесса?

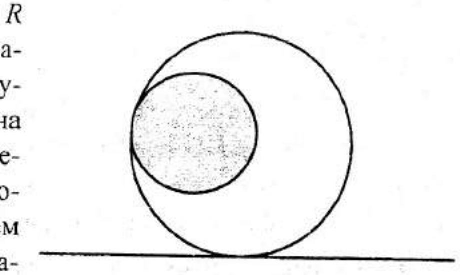


Рис. 9

43. Пулемет стреляет пулями массой 50 г каждая, вылетающими со скоростью 1000 м/с. Пулеметчик способен удерживать пулемет силой 180 Н. Определите максимально возможное число выстрелов в минуту.

44. Очень гибкая однородная цепь массой M и длиной l подвешена за один из концов так, что другой ее конец касается стола. В некоторый момент времени верхний конец освобождают и цепь падает на стол так, что каждое ее звено сразу после падения на стол перестает двигаться. Найти силу удара цепи о стол как функцию веса той части цепи, которая лежит на столе.

45. Тело массой 8 кг движется свободно со скоростью 2 м/с. В некоторый момент времени тело взрывается на два осколка одинаковой массы 4 кг. Взрыв сообщает получившейся системе 16 Дж кинетической энергии поступательного движения. Полагая, что после взрыва осколки двигаются вдоль той же прямой, что и вначале, определите скорость и направление движения каждого из осколков.

46. Тело массы m соскальзывает с высоты h по наклоненной к горизонту под углом α грани клина массы M. Клин в начальный момент времени покоится на горизонтальной поверхности. Пренебрегая силами трения и полагая начальную скорость тела равной нулю, определить скорость клина в момент, когда тело достигнет его основания (рис. 10).

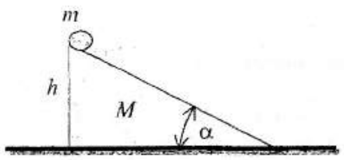


Рис. 10

47. Ракета массой 6 т запускается вертикально вверх. Полагая скорость истечения газов равной 1000 м/с, найти расход топлива в двух случаях: а) для преодоления веса ракеты; б) для придания ракете начального ускорения 20 м/с^2.

48. Электрон упруго сталкивается с покоящимся атомом водорода. До и после удара движение происходит вдоль одной прямой. Какая доля начальной кинетической энергии электрона передается атому водорода? Масса атома водорода в 1840 раз больше массы электрона.

49. Два мяча A и B, имеющие различные неизвестные массы, сталкиваются друг с другом. Мяч A вначале покоится, а B имеет скорость V. После столкновения мяч B имеет скорость $V/2$ и движется перпендикулярно первоначальному направлению движения. 1. Определить угол, под которым движется мяч A после удара. 2. Можно ли определить скорость мяча A из имеющейся информации?

50. α-частица сталкивается с ядром атома кислорода, первоначально покоящимся. α-частица в результате рассеяния отклонилась на 64° от направления движения до удара, а ядро кислорода приобрело скорость

в направлении, составляющем 51° от направления движения до удара, но по другую сторону от линии удара. Чему равно отношение скоростей α-частицы и ядра, если масса ядра кислорода в четыре раза больше массы α-частицы.

Динамика вращательного движения.
Закон сохранения момента импульса

51. Радиус-вектор точки приложения силы $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$, а сила $\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z$. Определить момент силы $\vec{M}$.

52. Частица p массой 2 кг находится в положении, указанном на рис. 11. На частицу действует сила $\vec{F}$. Все три вектора $\vec{r}, \vec{V}, \vec{F}$ лежат в одной плоскости. Полагая $r = 3$ м, $V = 4$ м/с и $F = 2$ Н, найти: а) момент импульса частицы; б) момент силы, действующей на частицу.

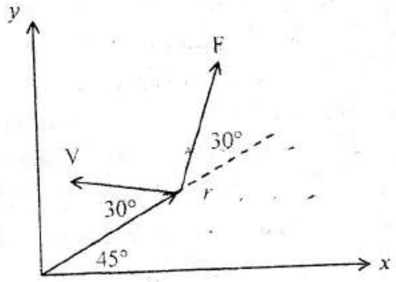


Рис. 11

53. Две частицы, каждая массой m, движутся с одинаковой скоростью в противоположных направлениях вдоль параллельных прямых, расстояние между которыми равно d. Показать, что вектор момента импульса этой системы не зависит от выбора начала отсчета.

54. Рассматривая Землю как сферу с однородной плотностью вещества, определить кинетическую энергию вращения Земли (принять радиус Земли равным 6400 км и массу 6×10^{24} кг). Полагая, что эта энергия может быть использована в практических целях, рассчитать, как долго Земля сможет снабжать мощностью в 1 кВт каждого из $4,2\times10^{9}$ жителей планеты?

55. Стержень метровой длины стоит вертикально на полу, а затем выводится из состояния покоя и начинает падать. Определить скорость верхнего конца в момент падения стержня. Нижний конец стержня в процессе падения не проскальзывает.

56. Колесо с моментом инерции 1×10^4 г·см^2 и радиусом 10 см раскручивается силой, приложенной к ободу по касательной и изменяющейся во времени по закону $F = 0{,}5t + 0{,}30t^2$, где F – в ньютонах, а t – в секундах. Считая, что в начальный момент колесо покоилось, найти его угловую скорость в конце третьей секунды.

57. На концах однородного стального стержня длиной 1,2 м и массой 6,4 кг закреплены маленькие шарики массой 1,06 кг каждый. Система приводится во вращение в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через середину стержня. В некоторый момент она совершает 39 оборотов в секунду. Из-за трения в оси она останавливается спустя 32 с. Полагая трение в оси постоянным, найти: а) угловое ускорение; б) момент силы трения в оси; в) работу, совершенную силой трения; г) число оборотов, совершенных системой до полной остановки.

58. Обруч радиусом 3 м и массой 150 кг катится вдоль горизонтальной поверхности со скоростью центра масс 0,15 м/с. Какую работу нужно совершить, чтобы остановить его?

59. Лента, массой которой можно пренебречь, намотана вокруг цилиндра массой M и радиусом R. Ленту тянут вверх с такой скоростью, что цилиндр не падает и его центр масс остается на одной высоте. 1. Каково натяжение нити? 2. Какая работа совершена, если цилиндр раскрутился до угловой скорости ω? 3. Сколько ленты смотано с цилиндра за это время?

60. Волчок вращается с частотой 30 Гц вокруг оси, составляющей угол 30° с вертикалью. Его масса 0,5 кг и момент инерции 5×10^{-4} кг·м^2. Центр масс расположен на 4 см выше точки опоры. Если вращение при наблюдении сверху происходит по часовой стрелке, то какова величина и направление угловой скорости прецессии?

Статика. Равновесие твердых тел

61. Однородная сфера весом W покоится между двумя наклонными плоскостями с углами наклона θ_1 и θ_2 (рис. 12). 1. Полагая, что трение отсутствует, определить величины и направления сил, действующих на сферу со стороны плоскостей. 2. Что в принципе изменится, если принять в расчет силу трения ?

62. Неоднородная балка весом W покоится горизонтально на двух легких тросах, как показано на рис. 13. Углы, которые тросы составляют с вертикальным направлением: $\theta_1 = 36{,}9°$ и $\theta_2 = 53{,}1°$. Длина балки $L = 6{,}1$ м. Найти расстояние от левого конца балки до центра тяжести (рис. 13).

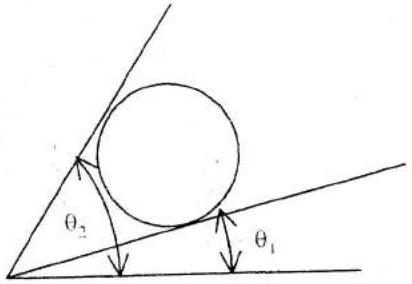


Рис. 12

63. Какую силу необходимо приложить к оси колеса в горизонтальном направлении, чтобы оно въехало на прямоугольную ступеньку высотой h. Радиус колеса r, а масса M.

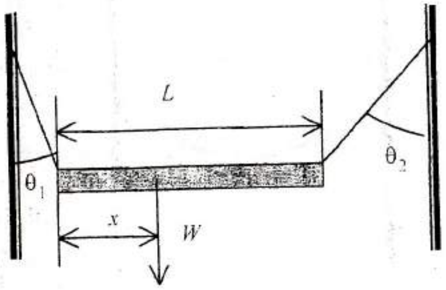


Рис. 13

64. Тонкий невесомый стержень AB длины L расположен горизонтально. В точке A стержень закреплен шарнирно на стене, а в точке B поддерживается тонкой проволокой BC, наклоненной под углом θ к горизонту. Некоторый груз весом W может передвигаться вдоль стержня. 1. Найти зависимость натяжения проволоки T от расстояния x до стенки. 2. Найти горизонтальную и вертикальную компоненты силы, действующей на стержень со стороны шарнира A (рис. 14).

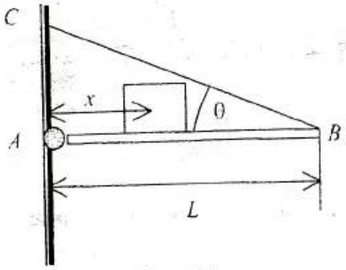


Рис. 14

65. Дверь высотой 210 см и шириной 91 см имеет массу 27 кг. Дверь поддерживается петлями, расположенными на расстоянии 30 см – одна от верхней, а вторая – от нижней кромки дверей. На каждую петлю приходится половина веса двери. Считая, что центр тяжести находится в геометрическом центре двери, рассчитать горизонтальную и вертикальную силы, действующие со стороны петель на двери.

66. Система, изображенная на рис. 15, находится в равновесии. Масса груза, свешивающегося со стрелы S, равна 30 кг, а масса самой стре-

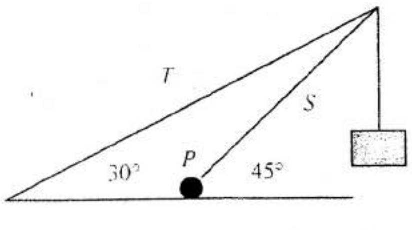


Рис. 15

лы – 45 кг. Найти: а) натяжение T троса; б) силу, действующую на стрелу со стороны упора P стрелы.

67. Стержень метровой длины балансирует на кончике ножа на отметке 50 см. Когда на отметку 12 см положили две монеты массой 5 г каждая, положение точки баланса стало – 45,5 см. Какова масса стержня?

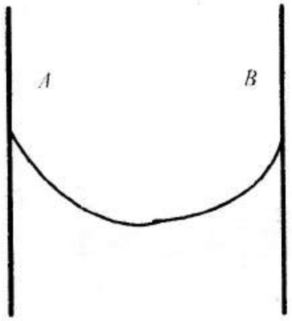


Рис. 16

68. Гибкая цепь весом W закреплена в точках A и B на одной высоте (рис. 16). Найти: а) вектор силы, действующей на точки A и B; б) натяжение цепи в низшей точке цепи.

69. Найти положение центра тяжести однородного диска радиусом R, в котором вырезан круг радиусом r на расстоянии $R/2$ от центра диска.

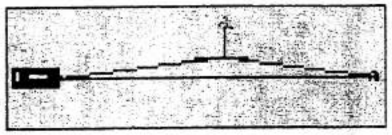


Рис. 17

70. Человек пытается вытянуть автомобиль из кювета (рис. 17). Для этого он привязал трос длиной 18 м одним концом к дереву, а другим – к переднему бамперу автомобиля. Надавив затем на трос в середине его с силой 125 Н он прогнул его на 30 см и при этом, автомобиль стронулся с места. С какой силой трос действует на автомобиль?

Колебания

71. Частица совершает гармонические колебания около точки $x = 0$. В момент времени $t = 0$ она смещена на $x = 0{,}37$ см и имеет скорость $V = 0$ см/с. Частота колебаний 0,25 Гц. Найти: а) период; б) угловую частоту; в) амплитуду; г) смещение в момент времени t; д) скорость в момент времени t; е) максимальную скорость; ж) максимальное ускорение; з) смещение в момент времени $t = 3$ с; и скорость в момент времени $t = 3$ с.

72. Две пружины с коэффициентами упругости k_1 и k_2 и тело массой m соединены между собой и стенками, как показано на рис. 18. Показать, что частота колебаний описывается выражением

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}.$$

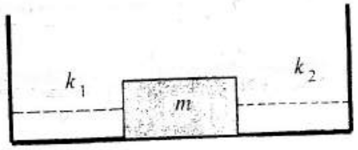


Рис. 18

73. Обруч радиусом 2 м и весом 8 кг висит на гвозде. Найти частоту малых колебаний обруча. Чему равна длина эквивалентного математического маятника ?

74. Электроны в осциллографе отклоняются двумя взаимно перпендикулярными электрическими полями так, что смещение электрона в момент времени t равно: $x = A\cos\omega t$, $y = A\cos(\omega t + \varphi)$. Написать уравнение траектории и построить ее графики для случаев: а) $\phi = 0°$; б) $\phi = 30°$; в) $\phi = 90°$.

75. Два тела одинаковой массы m соединены в комбинацию, показанную на рис. 19. Пусть x_1 и x_2 – смещения масс из положения равновесия. 1. Показать что $m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = K(x_2 - 2x_1)$, $m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = K(x_1 - 2x_2)$. 2. Найти частоты колебаний системы, считая, что решения уравнений имеют вид $x_1 = A_1\cos\omega t$, $x_2 = A_2\sin\omega t$.

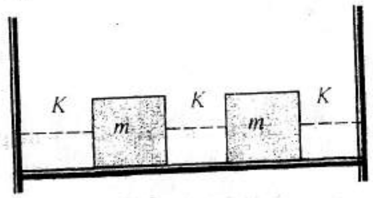


Рис. 19

76. Сила взаимодействия атомов в двухатомной молекуле имеет вид $F = -\dfrac{a}{r^2} + \dfrac{b}{r^3}$, где a и b – некоторые положительные константы, а r – расстояние между атомами. Построить график зависимости F от r. 1. Показать: а) в равновесии расстояние между атомами равно b/a; б) что в случае малых колебаний коэффициент упругости равен $\dfrac{a^4}{b^3}$. 2. Найти период этого движения.

77. Тело совершает гармонические колебания на пружине. Амплитуда колебаний 0,1 м, энергия 1 Дж, максимальная скорость 1 м/с . Найти: а) коэффициент упругости пружины; б) массу тела; в) частоту колебаний.

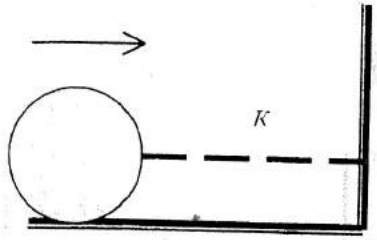


Рис. 20

78. Присоединим массивный цилиндр к невесомой горизонтальной пружине, так, что он сможет кататься без проскальзывания по горизонтальной поверхности, как показано на рис. 20.

Коэффициент упругости пружины равен 3 н/м. Систему отпустили из положения, в котором пружина растянута на 0,25 м. 1. Найти: а) кинетическую энергию поступательного движения; б) кинетическую энергию вращательного движения в момент времени, когда тело проходит равновесное положение. 2. Показать, что центр масс цилиндра совершает колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{3M}{2K}}$, где M – масса цилиндра.

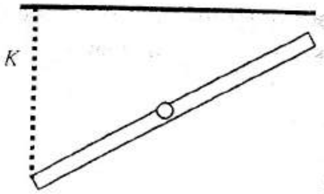


Рис. 21

79. Стержень длиной L и массой m может совершать колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. Пружина с коэффициентом упругости K расположена горизонтально и связывает конец стержня с вертикальной стенкой (рис. 21 – вид сверху). Чему равен период малых колебаний стержня?

80. Диск диаметром 1 м вырезан из листа жести. Диск совершает малые колебания в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей перпендикулярно его плоскости и отстоящей от центра диска на расстоянии l м. 1. Для какого численного значения l период этих колебаний равен 1,7 с? 2. Для какого l период этих колебаний будет минимальным ?

Волны

81. Уравнение поперечной волны, распространяющейся вдоль очень длинной струны дается уравнением $y = 6\sin(0{,}02\pi x + 4\pi t)$, где x и y выражены в сантиметрах, а t – в секундах. Найти: а) амплитуду; б) длину волны; в) частоту; г) скорость; д) направление распространения волны; е) максимальное значение скорости частиц в волны.

82. Синусоидальная волна распространяется вдоль струны. Если время, в течение которого некоторая точка смещается из максимально отклоненного положения в положение со смещением, равным нулю, равно 0,17 с, то чему равен: а) период; б) частота. Если длина волны равняется 1,4 м, то какова скорость волны?

83. Синусоидальная волна распространяется по струне со скоростью 80 см/с. Смещение точек струны на расстоянии x = 10 см изменяется со временем в соответствии с уравнением $y = 5\sin(1 - 4t)$ в см. Линейная плотность струны 4 г/см. 1. Найти: а) частоту волны; б) длину волны. 2. Написать уравнение волны.

84. Однородный канат массой m и длиной l свешивается с подоконника. 1. Показать, что скорость поперечных волн в канате является функцией от y – расстояния от нижнего конца каната и описывается выражением $V = \sqrt{gy}$. 2. Показать, что время прохождения волной всей длины каната $t = 2\sqrt{l/g}$.

85. Сферическая волна испускается источником мощностью 1 Вт и распространяется в изотропном непоглощающем веществе. Чему равна интенсивность волны на расстоянии 1 м от источника?

86. Источник и приемник высокочастотных волн расположены на поверхности Земли на расстоянии d друг от друга. Прямая волна от источника и волна отраженная от слоя, расположенного параллельно Земле на высоте H приходят в приемник в одинаковой фазе. Угол падения волны на слой равен углу отражения. Когда слой поднимают вверх дополнительно на h сигнал в приемнике пропадает. Пренебрегая поглощением в атмосфере, найти длину волны λ, на которой это происходит.

87. Струна колеблется по закону $y = 0{,}5\sin(\frac{\pi x}{3}\cos 40\pi t)$, где x и y – в сантиметрах, t – в секундах. 1. Чему равны амплитуды и скорости волн, суперпозиция которых приводит к указанному колебанию? 2. Найти расстояние между узлами волны. 3. Чему равна скорость точки струны с координатой x = 1,5 см в момент времени t = 9/8c?

88. Сирена, излучающая звуковую волну на частоте 1000 Гц, удаляется от наблюдателя со скоростью 10 м/с по направлению к скале. 1. Какова частота колебаний, принимаемых прямо от сирены? 2. Какова частота колебаний в звуковой волне, отраженной от скалы? 3. Услышит ли наблюдатель сигнал биений?

89. Девушка сидит у открытого окна поезда, едущего на восток со скоростью 10 м/с. Ее дядя стоит около дороги и наблюдает за отходом поезда. Свисток локомотива издает звук на частоте 500 Гц. Воздух спокоен: а) какую частоту слышит дядя? б) какую частоту слышит девушка? С востока подул ветер со скоростью 10 м/с: в) какую частоту услышит дядя? г) какую частоту услышит девушка?

90. Электромагнитные волны, распространяющиеся со скоростью света (≈300000 км/с) отражаются от приближающегося самолета. Частота биений (равная разности частот отраженного сигнала и сигнала источника)равняется 900 Гц. Длина волны источника – 0,1 м. Определить скорость самолета.

Термодинамика и статистическая физика

91. Рассчитать теплоемкость металла исходя из следующих данных: сосуд изготовлен из металла массой 3,6 кг и содержит 14 кг воды. Кусок металла массой 1,8 кг с температурой 180 °С опускают в воду. Начальная температура воды и сосуда 16 °С, а температура, установившаяся после опускания в воду металла, – 18 °С.

92. В эксперименте Джоуля тело массой 6 кг падает с высоты 5 м и при этом приводит в действие устройство, перемешивающее воду в количестве 6 кг. Найдите температуру воды, если начальная температура 15 °С.

93. Определить значение J механического эквивалента теплоты из следующих данных: в систему поступило 2000 кал теплоты; система совершила 3350 Дж механической работы; внутренняя энергия системы увеличилась на 5030 Дж.

94. Цилиндрический сосуд с хорошо пригнанным поршнем содержит воду и водяные пары при температуре 100 °С. Масса поршня 2 кг, площадь поверхности поршня 2 см^2. Из-за потерь тепла через стенки цилиндра конденсируется. Плотность пара в цилиндре $6{,}0 \times 10^{-4}$ г/см^3. Найти: а) скорость конденсации паров; б) скорость изменения внутренней энергии пара и воды; в) скорость истечения тепла через стенки сосуда.

95. Воздух, содержащийся в объеме 0,14 м^3 при давлении 1.034×10^5 Па, расширился изотермически до атмосферного давления, а затем охладившись, при постоянном давлении, сжался до первоначального объема. Рассчитать работу, произведенную газом.

96. Рассчитайте температуру, при которой среднеквадратичная скорость молекулы равна скорости отрыва от Земли: а) молекулы водорода; б) молекулы кислорода. Проделать тоже самое для Луны, считая ускорение свободного падения на ее поверхности равным $0{,}16\,g$. Подъем температуры в верхних слоях атмосферы Земли составляет около 1000 К. Можно ли рассчитывать обнаружить там много молекул водорода; кислорода?

97. Масса молекулы газа может быть найдена по значению теплоемкости при постоянном объеме. Для аргона $C_v = 0{,}075$ Ккал/кг·К. Рассчитать: а) массу атома аргона; б) атомный вес аргона.

98. Четыре моля идеального двухатомного газа, взятые при высокой температуре, дополнительно нагреваются на 60 °С при постоянном давлении. 1. Какое количество теплоты при этом передано газу. 2. На сколько увеличилась внутренняя энергия газа? 3. Какую работу совершил газ? 4. На сколько возросла кинетическая энергия поступательного движения молекул?

99. Молекула водорода (диаметр 1×10^{-8} см) попадает из пламени горелки (температура 4000 К) в камеру, содержащую атомы холодного аргона (диаметр 3×10^{-8} см) с плотностью 4×10^{19} атомов/см^3. 1. Какова скорость молекулы водорода? 2. Найти наибольшее расстояние между центрами молекулы водорода и атома аргона, при котором они сталкиваются (считая молекулы сферами). 3. Найти начальное число столкновений молекулы водорода в единицу времени.

100. Имеется ансамбль частиц со следующим распределением по скоростям:

N_i	2	4	6	8	2
V_i, см/с	1	2	3	4	5

1. Рассчитать среднюю скорость частиц. 2. Рассчитать среднеквадратичную скорость частиц. 3. Какая из приведенных в таблице скоростей является наиболее вероятной?

101. Мелкие частицы в космосе подвергаются постоянной бомбардировке молекулами водорода, входящего в состав межзвездного газа. В результате частицы совершают поступательное и вращательное броуновское движение. Считая, что сферы частиц диаметром 4×10^{-6} см и плотностью 1 г/см^3 и температура газа 100 К, найти: а) среднеквадратичную скорость частиц между столкновениями; б) среднюю частоту вращения частиц.

102. Изобразить графически цикл Карно на диаграмме P–V для 1 моля идеального газа. В начальной точке цикла давление $p = 1$ атм и температура $T = 300$ К; в точке, соответствующей началу адиабатического расширения, $p = 0,5$ атм, $T = 300$ К. Температуру холодильника считать равной 100 К, показатель адиабаты $\gamma = 1,5$. 1. Определить по графику работу, совершенную газом за цикл. 2. Рассчитать работу аналитически.

103. Мотор холодильника имеет мощность 200 Вт. Температура фреона 270 К, а температура снаружи холодильника 300 К. Найти максимальное количество теплоты, которое может быть извлечено из фреона за 10 мин.

104. Один моль одноатомного идеального газа переводится из состояния с давлением P и объемом V в состояние с давлением $2P$ и обьемом $2V$ двумя разными способами. В первом случае газ вначале изотермически расширяют до удвоенного обьема, а затем изохорически увеличивают давление до значения $2P$. Во втором случае газ вначале изотермически сжимают до удвоенного давления, а затем увеличивают его обьем изобарически до значения $2V$. Найти: а) количества теплоты, поглощенные на каждом этапе указанных процессов; б) работу, совершенную газом на каждом этапе; в) полное изменение внутренней энергии; г) изменение энтропии газа в процессе.

105. Кубик льда массой 10 г, взятый при температуре –10 °С опускают в озеро с температурой воды 15 °С. Рассчитать изменение энтропии системы после того, как кубик льда пришел с озером в тепловое равновесие.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Векторы, действия с ними

Вектор $\vec{a}$ лежит в плоскости x–y под углом 250°, отсчитанным против часовой стрелки от положительного направления оси ox. Модуль вектора $\vec{a}$ равен 7,4 единиц. Вектор $\vec{b}$ имеет модуль 5,0 единиц и направлен вдоль оси oz. Найти: а) скалярное произведение векторов $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) векторное произведение векторов $\vec{a}\times\vec{b}$.

Решение

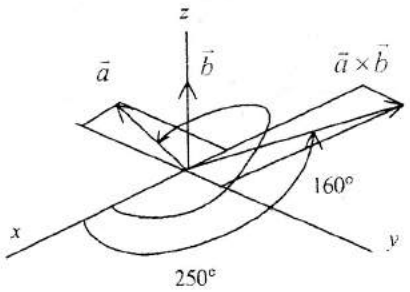
а. Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны друг другу, то угол φ между ними равен 90° и cosφ = cos90° = 0. Таким образом, скалярное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\phi = a\cdot b\cos 90^\circ(7,4)\cdot(5,0)\cdot 0 = 0.$$

б. Величина векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b} = a\cdot b\cdot\sin\phi = (7,4)\cdot(5,0)\cdot\sin 90^\circ = 37.$$

Направление вектора $\vec{a}\times b$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Таким образом, как показано на рисунке, он лежит в плоскости x–y (перпендикулярной вектору $\vec{b}$) под углом 250° – 90° = 160° к положительному направлению оси x в соответствии с правилом правой руки.



Кинематика

В известном лекционном эксперименте в мишень M, поднятую на некоторую высоту, тщательно целятся и производят выстрел из воздушного ружья. В момент выстрела с помощью специального устройства мишень высвобождается и начинает свободно падать вниз. Найти время, прошедшее от выстрела до момента попадания в мишень. Доказать, что цель будет поражена независимо от начальной скорости пули.

Решение

Для анализа ситуации воспользуемся уравнением, описывающим зависимость радиус-вектора как пули , так и мишени от времени для равнопеременного движения:

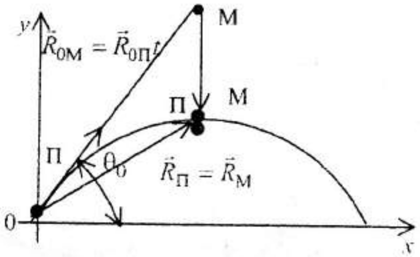
$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

В рассматриваемом случае движения в поле сил тяжести указанное уравнение для пули имеет вид $\left(\vec{R}_0 = 0,\ \vec{a} = \vec{g}\right)$;

$$\vec{R}_{П} = \vec{V}_{0П}t + \frac{\vec{g}t^2}{2},$$

Движение мишени описывается уравнением $\left(\vec{R}_0 = \vec{R}_{0М},\ \vec{a} = \vec{g}, \vec{V}_0 = 0\right)$:

$$\vec{R}_{М} = \vec{R}_{0М} + \frac{\vec{g}t^2}{2}.$$



В момент попадания пули в мишень $\vec{R}_{П} = \vec{R}_{М}$ (см. рисунок).

Приравнивая правые части последних уравнений, получим $\vec{V}_{0П}t = \vec{R}_{0М}$, а это означает, что попадание произойдет в момент времени

$$t = \frac{\vec{R}_{0V}}{\vec{V}_{0П}}.$$

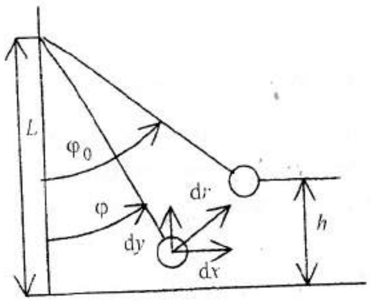
Это время, необходимое для того, чтобы пуля пролетела расстояние, равное начальному удалению ружья от мишени, если скорость пули в полете не изменяется. Из полученного уравнения следует, что попадание рано или поздно, но произойдет.

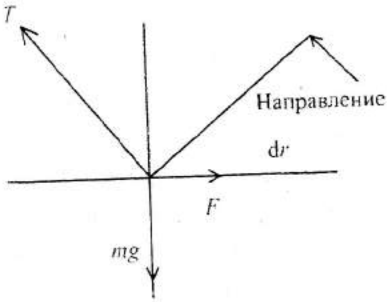
Работа. Энергия

Тело массой m подвешено на невесомой нити длины L. К телу приложили силу F, направленную горизонтально и медленно отклонили

тело на угол φ_0 от положения равновесия (в положении равновесия угол $\varphi = 0$). Рассчитать работу указанной силы.

Решение





Работа силы F при отклонении тела от L до φ_0 :

$$A = \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0} \vec{F}, d\vec{r} = \int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0} F\cdot\cos\varphi\cdot dr,$$

или в другом виде

$$A = \int\limits_{x=0,\ y=0}^{x=(L-h)\cdot\mathrm{tg}\varphi_0, y=h} (F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y). \qquad (1)$$

Сосчитаем последний интеграл. Из первого закона Ньютона следует (см. рисунок) $F_x = T\cdot\sin\varphi$ и $mg = T\cdot\cos\varphi$.

Комбинируя два последних выражения, получим $F_x = mg\cdot\mathrm{tg}\varphi$.

Кроме того, из рисунка видно, что $F_y = 0$. Подставляя эти значения F_x и F_y в (1), получим

$$A = \int\limits_{x=0,\ y=0}^{x=(L-h)\cdot\mathrm{tg}\varphi_0, y=h} mg\cdot\mathrm{tg}\varphi \mathrm{d}x \qquad (2)$$

Из рисунка видно, что

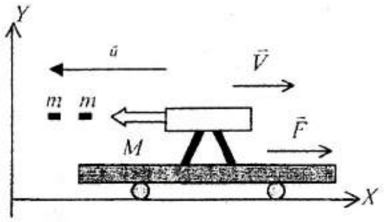
$$\mathrm{tg}\varphi = dy/dx \ \text{ или } \ \mathrm{tg}\varphi\cdot dx = dy. \qquad (3)$$

Произведя подстановку (3) в (2) и замечая, что интеграл зависит только от переменной y, получаем окончательно

$$A = \int_{y=0}^{y=h} mgdy = mgh.$$

Закон сохранения импульса. Столкновения частиц

Пушка закреплена на платформе, которая может двигаться с пренебрежимо малым трением по горизонтальным рельсам. Масса системы (пушка + платформа) в некоторый момент времени равняется M. В этот момент времени пушка начинает стрелять пулями массой m, скорость которых в указанной на рисунке системе отсчета равняется $\vec{u}$. Скорость платформы в этой системе отсчета $\vec{V}$ и скорость пуль относительно платформы равняется $\vec{u} - \vec{V}$. Число выстрелов в единицу времени равно n. Чему равно ускорение платформы?



Решение

Рассмотрим систему, состоящую из пушки и платформы. Так как масса системы переменная , то мы должны воспользоваться законом Ньютона

$$M\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_{\text{внш}} + \vec{V}_{\text{отн}}\frac{dM}{dt},$$

где $\vec{F}_{\text{внш}}$ – внешняя сила, а $\vec{V}_{\text{отн}}$ – относительная скорость.

В рассматриваемом случае сумма внешних сил равна нулю, т. е. $\vec{F}_{\text{внш}} = 0$ и уравнение преобразуется к виду

$$M\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V}_{\text{отн}}\frac{dM}{dt},$$

так как $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}$, а $\vec{V}_{\text{отн}} = \vec{u} - \vec{V}$ и $\frac{dM}{dt} = -mn$, то после подстановки в предыдущее уравнение получим $\vec{a} = -\frac{\vec{V}_{\text{отн}}(mn)}{M}$. Полученный результат показывает, что ускорение $\vec{a}$ направлено в сторону, противоположную относительной скорости $\vec{V}_{\text{отн}}$, т. е. направо. Так, например, если $V_{\text{отн}} = 500$ м/с , $m = 10$ г и $M = 200$ кг, $n = \frac{1}{c}$, то в этот момент времени

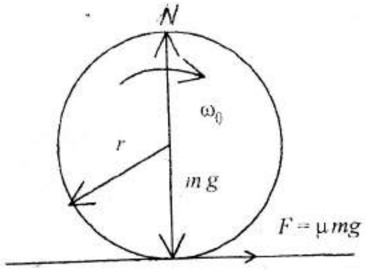
$$a = \frac{(500 \text{ м/с})(10^{-2} \text{ кг})(10 \cdot 1\text{с})}{200 \text{ кг}} = 0,25 \text{ м/с}^2.$$

Средняя сила толчка со стороны пули на систему "платформа + пулемет", возникающая в момент выстрела (сила реакции):

$$F_p = V_{\text{отн}}mn = (500 \text{м/с})(10\frac{1}{\text{с}}) = 50 \text{Н}.$$

Динамика вращательного движения.
Закон сохранения момента импульса

Однородный твердый цилиндр с радиусом основания r и массой m раскрутили относительно оси до угловой скорости и затем положили на горизонтальную плоскость. Коэффициент трения скольжения цилиндра о плоскость μ. В начальный момент цилиндр покоился , а затем, через время t, покатился без проскальзывания. 1. Определить скорость центра масс в момент времени t. 2. Чему равно t?



Решение

1. На рисунке изображены силы, действующие на цилиндр. Ускорение центра масс постоянно, так как постоянны все действующие на цилиндр силы, поэтому для поступательного движения можно написать

$F = ma = m\left(\frac{V_f - V_i}{t - 0}\right)$, где $V_i = 0$, а $V_f = V$ – скорости в момент времени t, когда начинается движение без проскальзывания. Так как результирующая сила F равна μmg, то

$$\mu mg = \frac{mV}{t}.$$

Угловое ускорение a цилиндра вокруг оси, проходящей через центр масс, также постоянно, поэтому уравнение вращательного движения имеет следующий вид:

$$M = Ia = I\left(\frac{\omega_f - \omega_i}{t - 0}\right),$$

где $\omega_f = \omega = \frac{V}{r}$ – угловая скорость в момент времени t, а $\omega_i = \omega_0$. Величина результирующего момента сил M равна $\mu\, mgr$. Этот момент вызывает угловое замедление в соответствии с уравнением

$$\mu mgr = \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{\omega_0 - V/r}{t}\right).$$

Исключая t из уравнений и (разделив одно уравнение на другое) решая полученное уравнение, относительно V получим

$$V = \frac{1}{3}\omega_0 r.$$

2. Исключив V из уравнений, получаем выражение для t

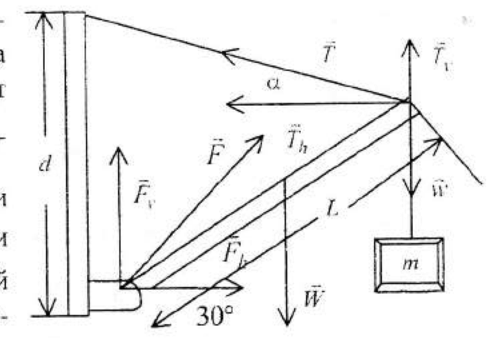
$$t = \frac{\omega_0 r}{3\mu g}.$$

Статика. Равновесие твердых тел

Однородная балка одним своим концом подвешена к стене. Второй конец балки проволокой прикреплен к стене в точке, находящейся на расстоянии d над точкой подвеса. Балка наклонена под углом 30° к горизонту. Ко второму концу подвешен груз m. Полагая, что вес балки равен W, а длина L, найдите натяжение проволоки и силу, действующую на балку со стороны точки подвеса.

Решение

Проволока наклонена под некоторым углом к горизонту, поэтому натяжение проволоки $\vec{T}$ имеет горизонтальную $\vec{T}_h$ и вертикальную $\vec{T}_v$



составляющие. Сила $\vec{F}$, с которой точка подвеса действует на левый конец балки, также имеет вертикальную $\vec{F}_v$ и горизонтальную $\vec{F}_h$ компоненты. Вес балки W приложен к центру тяжести балки и $\vec{w}$ – это сила, с которой канат действует на правый конец стержня.

Условия равновесия для поступательного движения в проекциях на вертикальное и горизонтальное направления имеют вид

$$F_v + T_v - W - w = 0 \text{ и } F_h - T_h = 0.$$

Запишем условие вращательного равновесия. Для этого выберем ось в точке пересечения $\vec{T}$ и $\vec{\omega}$

$$F_v(L\cos 30^\circ) - F_h(L\sin 30^\circ) - \frac{W(L\cos 30^\circ)}{2} = 0.$$

Неизвестными величинами являются T_h, T_v, F_h, F_v. Допустим,что $W = 60$ Н, $w = 40$ Н, $L = 3$ м, $d = 2$ м. Тогда условия равновесия примут следующий вид:

$$F_v + T_v = 100 \text{ Н},$$

$$F_h = T_h$$

и $$F_v(3)(0{,}866) = F_h(1{,}5) + (60)(1{,}5)(0{,}866)$$

или $$F_v = F_h(5{,}0/8{,}66) + 30.$$

Для решения уравнений необходимо еще одно уравнение. Это уравнение может быть получено из того, что векторы T_v и T_h в сумме дают вектор $\vec{T}$, направленный вдоль проволоки. Проволока в отличие от балки не может создавать или поддерживать силу в перпендикулярном направлении. Это приводит к четвертому уравнению:

$$T_v = T_h \mathrm{tg}\,\alpha \text{, где } \mathrm{tg}\,\alpha = (d - L\sin 30^\circ)/L\cos 30^\circ = \frac{1{,}0}{5{,}2}.$$

Так что $T_v = \frac{T_h}{5,2}$.

Комбинируя уравнения (1) и (4) получим $F_v = 100 - \frac{T_h}{5,2}$.

Из (2) и (3) следует $F_v = T_h(5:8,66) + 30$.

Из последних двух уравнений получаем

$$T_h = 91\ \text{Н};\ F_v = 82,5\ \text{Н}.$$

Из уравнения (2) получим $F_h = 91$ Н. Из уравнения (1): $T_v = 17,5$ Н.

Тогда натяжение проволоки $T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 92,7$ Н.

Колебания

1. Горизонтально расположенная пружина растянута на 3 см от равновесного положения силой 7,5 Н. Затем к пружине прикрепляют тело массой 1,5 кг и смещают его на 4 см из положения равновесия вдоль гладкой горизонтальной поверхности и отпускают. В результате тело начинает колебаться по гармоническому закону.

1. Чему равен коэффициент упругости пружины k?

Решение

$$k = \frac{F}{x} = ... = 250\ \text{Н/м}.$$

2. Какая сила действует на тело в момент, когда тело начинает колебаться?

Решение

$$F = -kx = ... = -10\ \text{Н}.$$

Знак минус указывает на то, что сила направлена противоположно смещению.

3. Чему равен период колебаний тела на пружине?

Решение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = ... = 0,486\,\text{с}.$$

Это соответствует частоте 2,06 Гц и угловой частоте $\omega = 2\pi\nu = 12,9$ рад/с.

4. Чему равняется амплитуда колебаний?

Решение

Максимальное смещение соответствует нулевой кинетической энергии и максимальной потенциальной энергии. Это начальные условия перед тем, как пружину отпускают. Поэтому амплитуда A равняется начальному смещению 4 см.

5. Какова максимальная скорость колебаний?

Решение

Максимальная скорость достигается в положении равновесия, когда $x = 0$. Это значение достигается дважды за период: скорость становится равной -0,517 м/с в момент, когда тело проходит $x = 0$ после освобождения пружины и +0,517 м/с, когда тело проходит положение $x = 0$ в обратном направлении.

6. Чему равно максимальное ускорение тела?

Решение

$$a_{\max} = \omega^2 \cdot A = \frac{k}{m}A = ... = 6,66\ \text{м/с}^2$$

Максимальное ускорение достигается в крайних положениях, когда смещение $x = \pm A$. Так $a = -6,66$ м/с^2 при $X = +A$ и $a = +6,66$ м/с^2 при $x = -A$.

7. Найти скорость, ускорение, кинетическую и потенциальную энергии тела, когда оно пройдет половину пути из начального положения до положения равновесия.

Решение

$$x = \frac{A}{2} = 2\ \text{см}.$$

Скорость в этот момент времени

$$V = -\frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - x^2} = ... = -0,45\ \text{м/с}.$$

Ускорение найдем по формуле

$$a = -\frac{k}{m} \cdot x\ ... = -333,3\ \text{м/с}^2.$$

Кинетическая энергия $K = \frac{mV^2}{2} = ...0,15$ Дж.

Потенциальная энергия: $U = \frac{kx^2}{2} = \cdots = 0,05$ Дж.

8. Найти полную энергию системы.

Решение

Используя полученные результаты:

$E = K + U = (0,15 + 0,05)$ Дж $= 0,2$ Дж (частица в точке $x = A/2$);

$E = U_{max} = \frac{kx_{max}^2}{2} = 0,2$ Дж (частица в точке $x = A$);

$E = K_{max} = \frac{mV_{max}^2}{2} = ... = 0,2$ Дж (частица в точке $x = 0$).

9. Найти зависимость смещения от времени.

Решение

Общее выражение для смещения имеет вид $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. Мы уже нашли, что $A = 4$ см. Осталось определить, чему равны ω и φ:

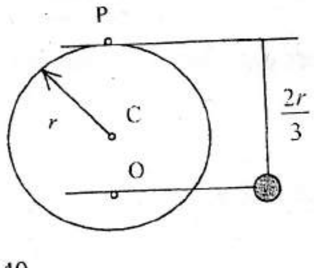
$\omega = \frac{2\pi}{T} = ... = 12,92$ рад/с.

Отсюда имеем $x = -0,04\cos(12,92t + \varphi)$. В момент времени $t = 0$, $x = -4$ см. Подставляя эти значения в предыдущее уравнение, получим $0,04 = 0,04\cos\varphi$, т. е. $\varphi = 0$ рад.

Окончательное уравнение для колебаний тела имеет вид

$$x = 0,04\cos(12,92t).$$

2. Диск подвешен за край в точке P, как показано на рисунке. Найти период малых колебаний диска и приведенную длину эквивалентного простого маятника.



Решение

Момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр $\frac{Mr^2}{2}$, где r – радиус, а M – масса диска. Момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через точку P (теорема Штейнера)

$$I = \frac{Mr^2}{2} + Mr^2 = \frac{3}{2}Mr^2.$$

Тогда период получим, полагая $d = r$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr}} = ... = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}.$$

Как видно из полученного выражения, период малых колебаний не зависит от массы диска.

Простой маятник, имеющий такое же значение T, имеет длину

$$L = \frac{I}{Mr} = \frac{3r}{2},$$

Если мы подвесим диск на ось, проходящую через точку O, расположенную вдоль линии, соединяющей точку P и центр масс диска в точке C, то период малых колебаний в этом случае

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}, \text{ где } I = \frac{3}{4}Mr^2 \text{ и } d = \frac{1}{2}r.$$

Таким образом, получим $T = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$, т. е. то же значение периода колебаний. Полученный результат иллюстрирует важное свойство центра колебаний O и точки подвеса P: если маятник совершает колебания вокруг новой оси, проходящей через точку O, его период не меняется и центром колебаний становится точка P.

Волны

Поперечная синусоидальная волна возбуждается на одном конце длинной струны, расположенной горизонтально, в результате перемещения этого конца вверх и вниз на расстояние 0,5 см. Движение осуществляется непрерывно и повторяется регулярно 120 раз в секунду.

1. Полагая, что струна имеет линейную плотность 0,25 кг/м и натяжение 90 N, найти скорость, амплитуду, частоту и длину волны.

Решение

Конец струны смещается на 0,25 см вверх и вниз от положения равновесия. Следовательно, амплитуда волны y_m равна 0,25 см.

Движение полностью повторяет себя 120 раз в секунду. Следовательно, частота равна 120 Гц.

Скорость волны описывается выражением $V = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$. Подставляя численные значения, получим $V = \sqrt{\frac{90\ \text{Н}}{0,25\ \text{кг/м}}} \approx 19\ \text{м/с}$.

Длина волны описывается выражением $\lambda = \frac{V}{\nu} = ... = 16$ см.

2. Полагая, что волна движется в положительном направлении оси ox и что в момент времени $t = 0$ конец струны, имеющий координату $x = 0$, имеет смещение $y = 0$, записать уравнение волны.

Решение

Общее выражение для поперечной синусоидальной волны, движущейся вдоль положительного направления оси ox, имеет вид

$$y = y_m \sin(kx - \omega t - \varphi).$$

Требование $y = 0$ в точке $x = 0$ в момент времени $t = 0$ приводит к соотношению

$$0 = y_m \sin(-\varphi),$$

а это означает, что начальная фаза $\varphi = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение волны имеет вид

$$y = y_m \sin(kx - \omega t).$$

Подставляя сюда полученные ранее значения: $y_m = 0,25$ см, $\lambda = 16$ см, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = ... = 0,39$ см, $V = 1900$ см/с и $\omega = Vk - ... = 740$ Гц, получим уравнение волны $y = 0,25\sin(0,39x - 740t)$.

Термодинамика и статистическая физика

1. Скорость десяти частиц 0, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5 и 6 м/с. Найти: а) среднюю скорость; б) среднеквадратичную скорость; в) наиболее вероятную скорость частиц.

Решение

а. Средняя скорость

$$\bar{V} = \frac{0+1+2+3+3+3+4+4+5+6}{10} = 3,1\ \text{м/с}.$$

б. Средний квадрат скорости

$$\bar{V}^2 = \frac{0+1^2+2^2+3^2+3^2+3^2+4^2+4^2+5^2+6^2}{10} = 12,5\ \text{м}^2/\text{с}^2,$$

отсюда среднеквадратичная скорость

$$V_{\text{ср.кв}} = \sqrt{12,5\ \text{м}^2/\text{с}^2} = 3,5\ \text{м/с}.$$

с. Из десяти частиц три имеют скорость 3 м/с, две – 4 м/с, а остальные имеют различную скорость. Таким образом, наиболее вероятная скорость частиц $V_\text{в} = 3$ м/с.

Дополнительно приведем пример расчета скоростей молекул исходя из функции $N(v)$ распределения молекул по скоростям. Эта функция имеет следующий вид (распределение Максвелла):

$$N(V) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} V^2 \cdot \exp\left(-mV^2 / 2kT\right)$$

Пользуясь указанным распределением, рассчитать в общем виде среднюю скорость, среднеквадратичную скорость и наиболее вероятную скорость.

Решение

Произведение $N(V)\,dV$ есть число частиц со скоростями , лежащими в промежутке V, $V + dV$. Среднюю скорость определим обычным образом: умножим число частиц в каждом интервале скоростей на характерную скорость V в этом интервале, затем сложим все эти произведения , а затем разделим на полное число частиц. Заменяя суммирование интегрированием, получим

$$\bar{V} = \frac{\int_0^\infty N(V)V\mathrm{d}V}{N}. \qquad (1)$$

Подставим под интеграл функцию $N(V)$ и проинтегрируем.

Для вычисления интеграла сделаем подстановку $\lambda = \frac{m}{2kT}$. Из таблицы интегралов

$$\int_0^{\infty} V^2 \exp(-\lambda V^2)\mathrm{d}V = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}};\ \int V^3 \exp(-\lambda V^2)\ \mathrm{d}V = \frac{1}{2\lambda^2};$$

$$\int V^4 \exp(-\lambda V^2)\mathrm{d}V = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^5}}.$$

Подставляя в (1), получим среднюю скорость

$$\bar{V} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}} = 1{,}59\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

Средний квадрат скорости получим из выражения

$$\bar{V}^2 = \frac{\int_0^{\infty} N(V)V^2\mathrm{d}V}{N}. \qquad (2)$$

Пользуясь третьим из табличных интегралов и (2) для среднеквадратичной скорости получим

$$V_{\text{ср.кв}} = \sqrt{\bar{V}^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1{,}73\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

Наиболее вероятная скорость $V_{\text{вер}}$ – это такое значение скорости, при котором функция $N(V)$ достигает максимального значения

$$\frac{\mathrm{d}N(V)}{\mathrm{d}V} = 0.$$

Подставляя в последнее соотношение выражение для $N(V)$ и дифференцируя, получим

$$\frac{\mathrm{d}N(V)}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}\left[\left(4\pi N(m/2\pi kT)^{3/2} V^2 \exp(mV^2/2kT\right]\right.}{\mathrm{d}V} =$$

$$= 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(2 - V^2\frac{m}{kT}\right)V\exp\left(-mV^2/2kT\right).$$

Отсюда для наиболее вероятной скорости $V_{\text{вер}}$ получим

$$V_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 1{,}41\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

2. Рассчитать изменение энтропии системы, состоящей из 1 кг льда при температуре 0 °С, который расплавляется (обратимым образом) в воду при той же температуре. Скрытая теплота плавления льда 79,6 кал/г.

Решение

Требование обратимого характера плавления льда означает, что мы приводим его в тепловой контакт с тепловым резервуаром , температура которого превышает 0 °С крайне незначительно. Если мы незначительно понизим температуру резервуара так, что она станет чуть меньше 0° С, расплавленный лед начнет замораживаться. Для обратимого процесса справедливо уравнение

$$S_b - S_a = \int_a^b dS = \int_a^b dS = \int_a^b \frac{dQ}{T}.$$

В рассматриваемом случае это уравнение может быть записано в форме

$$S_{\text{вода}} - S_{\text{лед}} = \int_0^Q \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_0^Q dQ = \frac{Q}{T}, \text{ где } Q = 10^3\,\text{г}\cdot 7{,}96\ \text{кал/г} = 7{,}96\cdot 10^4\ \text{кал}$$

или $S_{\text{вода}} - S_{\text{лед}} = \dfrac{7{,}96\cdot 10^4\ \text{кал}}{273\ \text{К}} = 292\ \text{кал/К} = 1220\ \text{Дж/К}.$

В рассмотренном примере обратимого плавления льда изменение энтропии *системы плюс окружение* равняется нулю, как и для всех обратимых процессов. Рассчитанное в примере изменение энтропии есть увеличение энтропии *системы*; существует в точности равное по величине уменьшение энтропии *окружения*, связанное с теплотой, которая теряется резервуаром (окружением), находящимся при температуре 273 К, расходуясь на плавление льда.

На практике плавление, скорее, процесс необратимый. Это процесс имеет лишь одно естественное направление – лед будет плавиться. Энтропия системы плюс окружение будет расти, как того требует второе начало.

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Закон Кулона

1. Две сферы заряжены положительно, их суммарный заряд равен 5×10^{-5} Кл. Сферы, будучи на расстоянии 2 м, отталкиваются друг от друга с силой 1 Н. Как распределен заряд между сферами ?

2. Некоторый заряд Q разделен на две части q и $Q-q$. Найти отношение Q к q при условии, что, будучи разнесенными на некоторое расстояние друг от друга, они отталкиваются с максимально возможной силой.

3. Имеются два заряда $q_1 = 3$ мкКл и $q_2 = -4$ мкКл, расположенные на плоскостях в точках (3,5; 0,5) см и (–2; 1,5) см. Найти величину и направление силы, действующей на второй заряд. Где надо поместить третий заряд $q_3 = 4\times10^{-6}$ Кл, чтобы эта сила обратилась в нуль?

4. Две частицы, несущие одинаковый заряд, удерживаются на расстоянии 3,2 мм друг от друга. Будучи освобожденными, заряды разлетаются с ускорениями 7 м/с^2 и 9 м/с^2. Полагая массу первой частицы равной $6{,}3\times10^{-7}$ Кг, найти массу второй частицы и их суммарный заряд.

5. Три маленьких шарика массой 10 г каждый подвешены на шелковых нитях длиной 1 м каждая в одной точке. Шарики несут одинаковые заряды и расположены в вершинах равностороннего треугольника со стороной 0,1 м. Найти заряд каждого шарика.

6. В углах куба со стороной a расположены точечные заряды величиной q. Найти величину и направление силы, действующей на каждый из указанных зарядов.

7. Четыре заряда одинаковой величины расположены в вершинах квадрата со стороной $2a$ (рис. 1).

Эта конфигурация носит название "квадруполь". Найти величину напряженности электрического поля в точке P на расстоянии R от центра квадруполя.

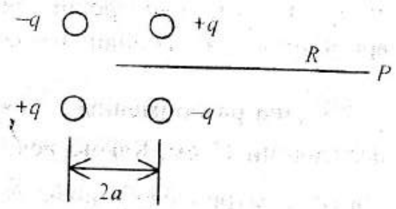


Рис. 1

8. Электрон, имеющий скорость $3{,}24\times10^5$ м/с, летит навстречу покоящемуся протону. На каком расстоянии от протона скорость электрона уменьшится в два раза по сравнению с начальным значением?

9. Найти величину результирующей силы, действующей на точечный заряд, расположенный в левом нижнем углу квадрата на рис. 2.

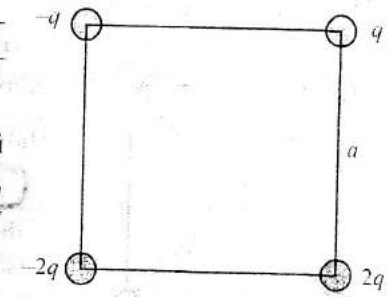


Рис. 2

10. Два одинаковых проводящих шарика (рис. 3) массой m каждыйподвешены на шелковых нитях длиной l и несут положительные заряды q_1 и q_2. Найти углы θ_1 и θ_2, на которые отклонятся заряды.

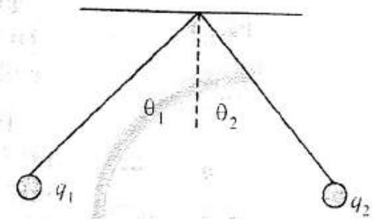


Рис. 3

Электрическое поле

11. Электрическое поле Земли направлено к ее поверхности и в среднем равняется 150 В/м. Какой заряд нужно сообщить телу массой 100 г, чтобы оно парило над Землей. Почему этот эксперимент не осуществим на практике?

12. В некоторый момент времени электрон, движущийся между двумя заряженными параллельными пластинами, имеет компоненты скорости: $v_x = 1{,}5\times10^5$ м/с; $v_y = 0{,}3\times10^4$ м/с. Электрическое поле между пластинами задано выражением $\bar{E} = \bar{j}\,1{,}2\times10^4$ В/м, где $\bar{j}$ – единичный вектор оси oy. Ось oy направлена перпендикулярно пластинам конденсатора. Найти: а) ускорение электрона; б) скорость электрона в момент времени, когда x-координата электрона изменится на 2 см.

13. Два разноименных заряда с $q = 2{,}0 \times 10^{-7}$ Кл расположены на расстоянии 15 см. Какова величина и направление вектора напряженности электрического поля $\bar{E}$ в точке, расположенной посередине между ними? Какая сила будет действовать на электрон, помещенный в эту точку?

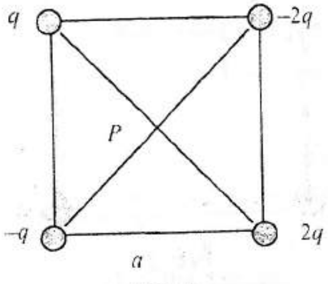


Рис. 4

14. Какова величина и направление E в центре квадрата, изображенного на рис. 4. Принять $q = 10^{-8}$ Кл; $a = 5$ см.

15. Тонкий непроводящий стержень длиной l изогнут вдоль дуги полукруга радиусом R. Заряд $+Q$ равномерно распределен вдоль его верхней половины, а заряд $-Q$ – вдоль нижней, как показано на рис. 5. Найти напряженность электрического поля в центре полукруга.

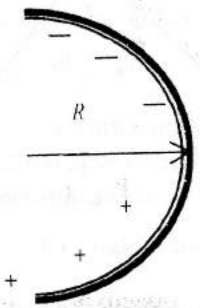


Рис. 5

16. Тонкий непроводящий стержень длины l несет заряд q, равномерно распределенный по его длине (рис. 6). Найти величину напряженности электрического поля E в точке, отстоящей от середины стержня на расстояние a.

17. Электрон, расположенный в центре равномерно заряженного кольца радиуса a, сместили вдоль оси кольца на небольшое расстояние $(x \ll a)$ и отпустили. Заряд электрона e, его масса m, заряд кольца q. Определить частоту возникших малых колебаний.

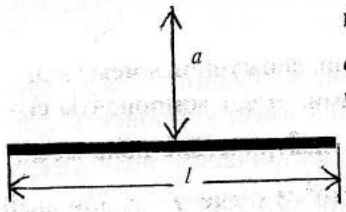


Рис. 6

18. Рассмотрим точку, лежащую на оси диполя на расстоянии r от его центра. Показать, что для больших значений r величина

электрического поля $E = \dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{p}{r^3}$, где p – дипольный момент.

19. В пространстве между двумя равномерно заряженными параллельными пластинами существует однородное электрическое поле. Электрон вылетает с нулевой начальной скоростью из отрицательной пластины и через время $1{,}5 \times 10^{-8}$ с подлетает к положительно заряженной пластине, отстоящей на расстоянии 2 см. Какова в этот момент времени скорость электрона? Какова величина электрического поля E?

20. Найти ускорение электрона в электрическом поле $E = 10^6$ В/м. Сколько времени понадобится, чтобы скорость электрона возросла от нуля до одной десятой скорости света? Считать, что при таких скоростях справедливы формулы механики Ньютона.

Теорема Гаусса в электростатике

21. Рассчитать поток Φ_E через полусферу радиуса R. Электрическое поле однородное и направлено параллельно оси полусферы.

22. Точечный заряд $q = 10^{-6}$ Кл расположен в центре гауссовой поверхности, имеющей форму куба со со стороной 0,5 м. Чему равен поток Φ_E через указанную поверхность?

23. Напряженность электрического поля вблизи поверхности Земли приблизительно равна –130 В/м. Чему равен заряд Земли?

24. На рис. 7 компоненты электрического поля $E_x = bx^{\frac{1}{2}}$; $E_y = E_z = 0$, где $b = 800$ В/м$\cdot$м$^{\frac{1}{2}}$. Рассчитать поток Φ_E через поверхность куба, а также заряд внутри куба. Считать $a = 10$ см.

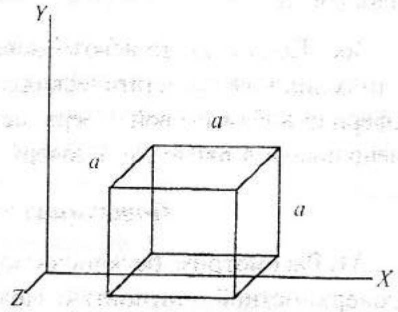


Рис. 7

25. Непроводящая сфера радиуса a, расположена в центре сферического проводящего слоя с внутренним радиусом b и внешним радиусом c. Внутренняя сфера равномерно заряжена по объему , полный заряд сферы равен Q. Внешний слой несет заряд $-Q$. Найти $E(r)$ внутри сферы, в пространстве между сферой и слоем, внутри слоя и снаружи слоя. Какие заряды появятся на внутренней и внешней поверхностях слоя?

26. Длинный проводящий цилиндр (длиной l), несущий полный заряд q расположен вдоль оси проводящего тонкостенного цилиндра. Полный заряд последнего равен $-2q$. Используя теорему Гаусса, найти напряженность электрического поля снаружи цилиндра и внутри его. Как распределен заряд на цилиндре?

27. Две большие непроводящие плоскости, равномерно заряженные положительным зарядом с поверхностной плотностью $+\sigma$, расположены параллельно. Какова напряженность E электрического поля в пространстве слева от плоскостей, между ними и справа от плоскостей?

28. Плоский, непроводящий слой толщиной d заряжен равномерно с объемной плотностью ρ. Найти величину напряженности электрического поля во всех точках пространства внутри и снаружи слоя.

29. Сфера массой $m = 10^{-3}$ г несет заряд $q = 2\times10^{-8}$ Кл. Она подвешена на шелковой нити к большой равномерно заряженной непроводящей плоскости, расположенной вертикально, при этом нить отклонилась от вертикали на угол 30°. Найти поверхностную плотность заряда плоскости.

30. Показать, что невозможно устойчивое равновесие под действием одних лишь электростатических сил. Для доказательства окружить заряд q сферической гауссовой поверхностью. Подумать, как должно быть направлено поле E в точках этой поверхности, и примените теорему Гаусса.

Потенциал электрического поля

31. Рассмотрим бесконечную, равномерно заряженную плоскость с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10^{-7}$ Кл/см^2. На каком расстоянии друг от друга располагаются эквипотенциальные поверхности с разностью потенциалов 5 В?

32. Имеется точечный заряд $q = 1{,}5\times10^{-8}$ Кл. Рассмотрим точку A на расстоянии 2 м от него и точку B на расстоянии 1 м, расположенную диаметрально противоположно. Найти разность потенциалов между этими точками. Решить такую же задачу для расположения зарядов, показанного на рис. 8.

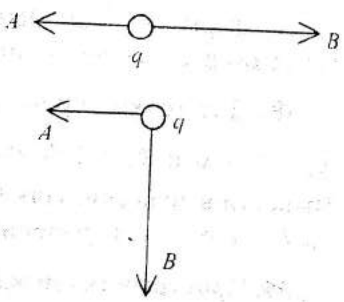


Рис. 8

33. Три заряда расположены так, как показано на рис. 9. Найти потенциал электрического поля в точке P, удаленной от зарядов на расстояние r. Расстояние между зарядами a. Считать $r \gg a$.

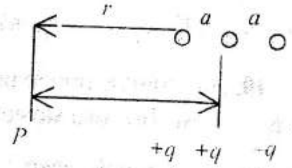


Рис. 9

34. Частица, несущая заряд $Q = 3{,}1\times10^{-6}$ Кл, расположена в точке P и ее положение в этой точке фиксировано. Вторая частица, имеющая массу $m = 2\times10^{-5}$ кг и несущая такой же электрический заряд, вначале удерживается в точке, удаленной от P на расстоянии $r_1 = 9\times10^{-4}$ м. В некоторый момент времени вторую частицу отпускают и она удаляется от первой частицы. Найти скорость второй частицы, когда она будет находиться на расстоянии $r_2 = 25\times10^{-4}$ м.

35. На рис. 10 представлена идеализированная картина деления ядра урана-238 (Z = 92). Рассчитать: а) силу отталкивания фрагментов; б) их общую потенциальную энергию. Считать, что фрагменты имеют одинаковую массу и заряды, сферическую форму и лишь касаются друг друга. Радиус ядра урана-238 равняется 8×10^{-15} м. Плотность ядерного вещества считать постоянной.

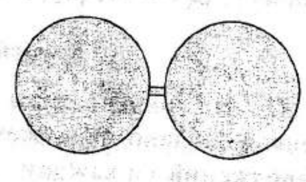


Рис. 10

36. Имеется заряженный стержень длиной l. Найти потенциал электрического поля в точке P, расположенной на расстоянии y от конца стержня вдоль его оси. Потенциал стержня на бесконечности принять равным нулю. Линейная плотность заряда стержня λ. На основании полученного результата рассчитать в точке P компоненту электрического поля E вдоль оси стержня и компоненту E, перпендикулярную к указанной оси.

37. Сфера, радиус которой 1,5 м, несет электрический заряд 3×10^{-6} Кл. Какова напряженность электрического поля вблизи поверхности сферы снаружи? Чему равен потенциал на поверхности сферы? На каком расстоянии от поверхности сферы потенциал равен 5000 В?

38. Две тонкие проводящие концентрические сферы радиусом $R_1 = 0{,}5$ м и $R_2 = 1$ м несут заряды $q_1 = 2\times10^{-6}$ Кл и $q_2 = 10^{-6}$ Кл. Вывести выражения для $E(r)$ и $V(r)$. Построить графики зависимости E и V от r для значений r от 0 до 4 м.

39. Пространство между двумя концентрическими сферами радиусами r_1 и r_2 заполнено непроводящим материалом, имеющим однородное объемное распределение заряда ρ. Найти зависимость потенциала электрического поля от расстояния до центра сфер в областях: а) $r > r_2$; б) $r_2 > r > r_1$; в) $r < r_1$.

40. Две тонкие проводящие концентрические сферы радиусом $R_1 = 1$ см и $R_2 = 2$ см. До того момента, когда сферы соединили тонкой проволокой, заряд внутренней сферы равнялся $q = 2\times10^{-7}$ Кл, а внешняя сфера не была заряжена. Рассчитать заряд, поверхностную плотность заряда и потенциал каждой из сфер, после того как их соединили проволокой.

Конденсаторы и диэлектрики

41. На конденсаторы 2 мкФ и 8 мкФ, соединенные последовательно, подано напряжение 300 В. 1. Найти величины зарядов и напряжений на каждом конденсаторе. Заряженные таким образом конденсаторы затем соединяют параллельно. 2. Какие заряды и напряжения будут в этом случае? 3. Что произойдет, если заряженные по схеме *1* конденсаторы соединить параллельно, но противоположно заряженными пластинами? Найти заряды и напряжения в этом случае.

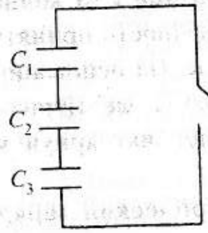


Рис. 11

42. На пластинах конденсаторов C_1, C_2, C_3 располагаются заряды q_1, q_2, q_3. Затем эти конденсаторы соединяются последовательно, как показано на рис. 11, и замыкают ключ. Какими станут заряды конденсаторов?

43. Две металлические сферы радиусом a и b соединены тонкой проволокой. Расстояние между ними гораздо больше их размеров. Системе сообщают заряд Q и проволоку удаляют. Какими будут заряды сфер? Чему равна емкость этой системы.

44. Плоский конденсатор, площадь пластин которого равна A, а расстояние между ними d, заряжен до напряжения V. Батарею затем отсоединяют, а пластины раздвигают до расстояния $2d$. Каким будет напряжение на конденсаторе? Чему равна начальная и конечная энергия, запасенная в конденсаторе? Какую работу необходимо было совершить для раздвижения пластин?

45. С какой силой притягиваются пластины плоского конденсатора (площадь A, заряд q). При выводе формулы использовать выражение для работы по раздвиганию пластин от x до $x + dx$.

46. Мыльный пузырь радиусом R_0 заряжают электрическим зарядом q. Из-за отталкивания зарядов на поверхности пузыря его радиус возрастает до R. Вследствие этого давление внутри пузыря падает до давления $p\left(\dfrac{V_0}{V}\right)$, где p – атмосферное давление, V_0 – начальный объем, а V – конечный. Показать, что $q^2 = 32\pi^2\varepsilon_0 pR(R^3 - R_0^3)$.

47. Плоский конденсатор емкостью 100 пФ, площадь пластины которого 100 см², заполнен диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon = 5{,}4$. При напряжении 50 В определить: а) напряженность электрического поля E в диэлектрике; б) величину свободного заряда на пластинах конденсатора; в) величину индуцированного поверхностного заряда.

48. Две параллельные пластины площадью 100 см² каждая несут равные по величине, но противоположные по знаку заряды $8{,}9\times10^{-7}$ Кл. Напряженность E электрического поля внутри вещества диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками конденсатора, равняется $1{,}4\times10^{6}$ В/м. 1. Найти диэлектрическую проницаемость ε диэлектрика; 2. Определить величину заряда, индуцированного на поверхности диэлектрика.

49. Плоский конденсатор с площадью пластины 0,12 м² и с расстоянием между ними 1,2 см заряжен до напряжения $V = 120$ В. Между пластинами конденсатора симметрично расположена пластина из диэлектрика толщиной 0,4 см и диэлектрической проницаемостью 4,8. Найти: а) емкость пустого конденсатора; б) емкость конденсатора с диэлектриком; в) величину свободного заряда пластин до и после введения диэлектрика; г) напряженность электрического поля в пространстве между пластиной и диэлектриком; д) электрическое поле в диэлектрике; е) напряжение на конденсаторе после введения диэлектрика; ж) работу, совершенную внешними силами при вдвигании диэлектрика.

50. Диэлектрическая пластина толщиной b вставляется между пластинами плоского конденсатора. Площадь пластин A, расстояние между ними d. Чему равна емкость этой системы?

Электрический ток

51. Автомобильная батарея (12 В) вначале несет заряд Q 120 А·ч. Полагая, что напряжение остается неизменным , пока батарея не разрядится полностью, определить сколько часов батарея будет поставлять во внешнюю цепь мощность 100 Вт?

52. По проволоке, диаметр которой равен 2,4 мм, течет слабый ток 10^{-10} А. Какова величина скорости дрейфа электронов?

53. Медная и железная проволоки одинаковой длины l и одинакового диаметра d соединены последовательно и на концы получившегося соединения подано напряжение V. Считая $l = 10$ м, $d = 2$ мм и $V = 100$ В, найти напряжение на каждой проволоке, плотность тока и напряженность электрического поля в каждой проволоке.

54. Резистор имеет форму усеченного конуса (рис. 12). Радиусы оснований a и b, высота конуса l. Чему равняется сопротивление конуса? Удельное сопротивление материала конуса ρ.

55. Вывести формулы: $P = j^2\rho$; $P = E^2/\rho$, в которых P – удельная мощность резистора. Удельное сопротивление резистора цилиндрической формы радиусом 0,5 см и длиной 2 см $\rho = 3{,}5 \times 10^{-5}$ Ом·м. Какова плотность тока j в резисторе и разность потенциалов на его концах, если потери энергии составляют 1 Вт?

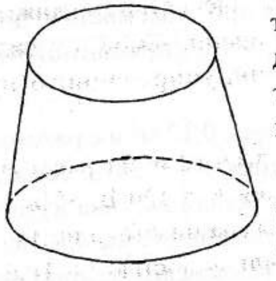


Рис. 12

56. В схеме на рис. 13 определить ток в каждом резисторе и разность потенциалов между точками a и b. Считать $\varepsilon_1 = 6$ В; $\varepsilon_2 = 5$ В; $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 50$ Ом.

57. На рис. 14 изображена схема мостика Уитстона. Сопротивление R_s подбирается такой величины, чтобы потенциалы точек a и b в точности равнялись друг другу. Показать, что справедливо соотношение $R_s = R_x \dfrac{R_2}{R_1}$. Таким образом неизвестное сопротивление R_x может быть измерено в долях стандартного сопротивления R_s.

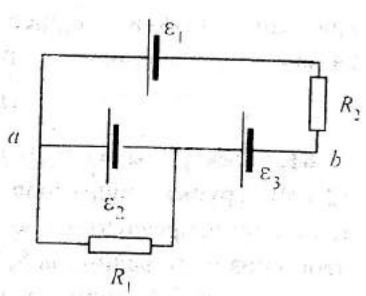


Рис. 13

58. Вольтметр (сопротивление R_v) и амперметр (сопротивление R_a) используются для измерения сопротивления R, как показано на рис. 15. Сопротивление получается из выражения $R = V/i$, где V – показания вольтметра, а i – ток, текущий через сопротивление R. Некоторая часть тока, регистрируемая амперметром, проходит через вольтметр, поэтому отношение измеряемых приборами величин ($= V/i'$) дает только приблизительное значение сопротивления R'. Показать, что истинное и измеренное значения сопротивления связаны между собой соотношением $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R'} - \dfrac{1}{R_V}$.

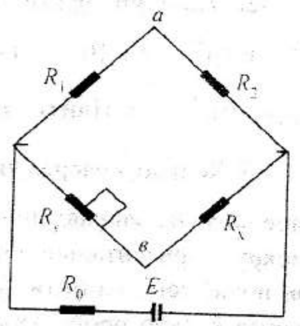


Рис. 14

59. RC-цепочка начинает разряжаться после замыкания ключа в момент времени $t = 0$.

Начальное напряжение на конденсаторе 100 В. За время 10 с это напряжение уменьшилось на 1 В. Каким станет напряжение на конденсаторе по истечении 20 с? Чему равна постоянная времени этой цепочки?

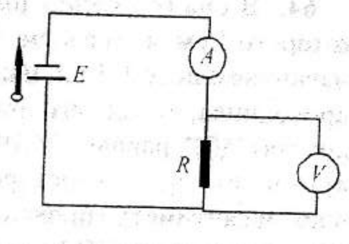


Рис. 15

60. Сопротивление 3 Мом и конденсатор 1 мкФ включены последовательно с источником, ЭДС которого 4 В. Через 1 с после включения определить: а) скорость возрастания заряда на конденсаторе; б) энергию, запасенную в конденсаторе; в) количество теплоты, выделившееся на сопротивлении; г) энергию, отданную источником ЭДС.

Магнитное поле

61. Электроны из пучка телевизионной трубки имеют энергию 12 кэВ. Трубка ориентирована так, что электроны движутся горизонтально по направлению с юга на север. Магнитное поле Земли направлено вниз и его величина $5{,}5 \times 10^{-5}$ Тл. 1. В каком направлении отклонится пучок? 2. С каким ускорением движутся электроны? 3. На сколько отклонится пучок, пройдя в трубке расстояние 20 см?

62. Электрон движется в однородном магнитном поле со скоростью $\vec{v} = 4 \cdot 10^5 \vec{i} + 7.1 \cdot 10^5 \vec{j}$, м/с. На него действует сила $\vec{F} = -2{,}7 \cdot 10^{-13} \vec{i} + 1{,}5 \cdot 10^{-13} \vec{j}$ Н. Найти магнитное поле, если $B_x = 0$.

63. Кольцо, содержащее N витков, помещено в однородное магнитное поле $\vec{B}$, направленное вертикально вниз. Кольцо может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр. Тело массой m подвешено на нити, закрепленной за нижнюю часть кольца. Когда через кольцо пропускают ток i, оно устанавливается в положение, в котором перпендикуляр к плоскости кольца составляет угол φ с направлением поля $\vec{B}$. Найти этот угол и изобразите расположение кольца в магнитном поле. Считать $\vec{B} = 0{,}5$ Тл, $R = 10$ см, $N = 10$, $m = 500$ г и $i = 1$ А.

64. В опыте Холла вдоль проводника плоской формы, ширина которого 1 см, длина 4 см, толщина 10–3 см, течет ток силой 3 А. В магнитном поле 1,5 Тл, направленном перпендикулярно плоскости проводника, между его противоположными краями возникает холловская ЭДС, равная 1×10^{-5} В. Исходя из этих данных определите: а) скорость дрейфа электронов; б) число носителей заряда в кубическом сантиметре проводника; в) укажите для данного расположения полярность ЭДС Холла.

65. Однократно ионизованные атомы хлора с массовыми числами 35 и 37, движущиеся со скоростью 2×10^5 м/с, влетают перпендикулярно однородному магнитному полю с индукцией 0,5 Тл. После прохождения дуги окружности 180° атомы попадают на фо-

тографическую пленку. Найти расстояние между местами попадания атомов на пленку.

66. Позитрон с энергией 2 кэВ влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл под углом 89° к силовым линиям $\vec{B}$. Определить период, шаг спирали и радиус окружности, по которой движется позитрон.

67. Рассмотрим возможность создания электропоезда нового типа. Двигатель управляется силой, возникающей из-за воздействия вертикальной составляющей магнитного поля Земли на проводящую ось, по которой течет электрический ток. Ток течет от одного рельса через проводящее колесо, затем по оси через второе колесо и замыкается на второй рельс. Какой силы ток необходимо пропустить через ось, чтобы появилась хотя бы умеренная сила 10000 Н? Вертикальная компонента магнитного поля Земли 10^{-5} Тл. Длина оси 3 м. Какова мощность тепловых потерь в расчете на 1 Ом сопротивления рельсов?

68. С. А. Гаудсмит разработал метод точного определения масс тяжелых ионов, измеряя период обращения ионов в известном магнитном поле. Однократно ионизованные атомы иода совершают 7 оборотов в поле с индукцией $4{,}5 \times 10^{-2}$ Тл за время $1{,}29 \times 10^{-3}$ с. Какова (приблизительно) масса иона?

69. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 1000 В, влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам. К пластинам приложена разность потенциалов 100 В. Расстояние между пластинами 2 см. Какое магнитное поле надо наложить , чтобы электрон двигался вдоль прямой линии? Как оно направлено?

70. Протон движется по окружности радиусом $r = 0{,}5$ м. Величина индукции магнитного поля 1,2 Тл. Какова частота обращения протона? Чему равна кинетическая энергия протона?

Закон Био-Савара-Лапласа. Сила Ампера. Обобщенный закон Ампера.

71. Точечный заряд $+q$ движется со скоростью v на расстоянии d от длинного прямого провода, перпендикулярно к нему. По проводу течет ток i. Найти направление и величину силы, действующей на заряд в случае, когда заряд движется к проводу и от провода.

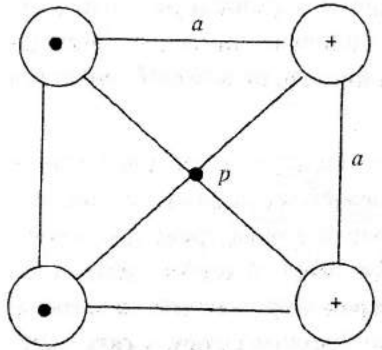


Рис. 16

72. Четыре длинных прямых параллельных провода расположены так, что их сечения располагаются в вершинах квадрата со стороной 20 см (рис. 16). Токи текут в направлениях, указанных на рисунке. Какова величина и направление индукции магнитного поля в центре квадрата?

73. На рис. 17 изображен полый цилиндрический проводник. Внешний и внутренний радиусы проводника равны a и b соответственно. По проводнику течет ток i. Чему равна индукция магнитного поля внутри проводника на расстоянии r от его центра.

74. Рассмотрим длинный прямой провод, имеющий в сечении форму круга радиуса R. По проводу течет ток i. Внутри провода имеется полость в форме цилиндра, радиус которого a, ось цилиндра параллельна оси провода и отстоит от него на расстоянии l. Используя принцип суперпозиции, получить выражение для магнитного поля $\vec{B}$ внутри полости.

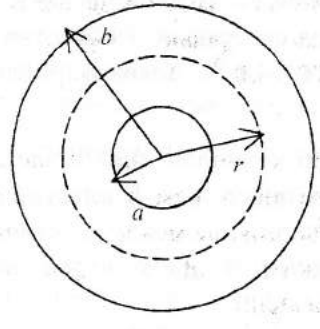


Рис. 17

75. Предположив, что на рис. 16 токи текут в одном направлении, определить величину силы, действующей на единицу длины каждого провода. В сходном случае параллельного движения частиц в плазме это явление известно как пинч-эффект.

76. Рассмотрим тороид, имеющий сечение в форме квадрата 5 × 5 см, внутренний радиус 15 см и число витков 500. По тороиду течет ток силой 0,8 А. Найти величину индукции магнитного поля в середине тороида (т. е. на расстоянии 17,5 см от его оси). Чему равен поток магнитной индукции через сечение тороида?

77. Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 18. Изогнутые участки являются частями окружностей радиусами a и b. Прямолинейные участки цепи расположены вдоль радиуса. Угол между радиальными участками θ. По цепи течет ток силой i. Найти индукцию B магнитного поля в центре в точке p.

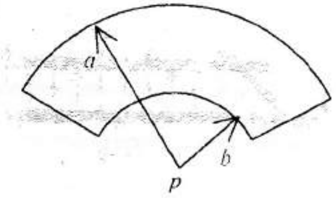


Рис. 18

78. Пластмассовый диск радиусом R несет равномерно распределенный по поверхности заряд Q. Диск вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти: а) величину индукции магнитного поля B в центре кольца; б) магнитный момент диска.

79. По проволочному контуру в форме квадрата со стороной a течет ток I. Найти индукцию B магнитного поля в центре квадрата.

80. Проволочный контур в форме правильного n-угольника вписан в окружность радиуса R. По контуру течет ток силой I. Определить индукцию B магнитного поля в центре многоугольника.

Электромагнитная индукция. Энергия магнитного поля

81. Маленький проводящий контур площадью A располагается внутри длинного соленоида вдоль его оси. Обмотка соленоида содержит n витков и по ней течет ток i. Ток изменяется по закону $i = i_0 \sin \omega t$. Определить ЭДС, возникшую в контуре.

82. На рис. 19 изображен медный стержень, движущийся со скоростью v параллельно длинному прямому проводу. По проводу течет ток силой i. Найти величину индуцированной в стержне ЭДС. Считать $v = 5$ м/с; $i = 100$ А; $a = 1$ см; $b = 20$ см.

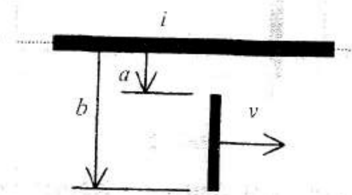


Рис. 19

83. Металлическая проволока массой m скользит без трения по двум параллельным рельсам, расстояние между которыми d (рис. 20), в вертикальном магнитном поле B. Постоянный ток I от генератора G проходит по рель-

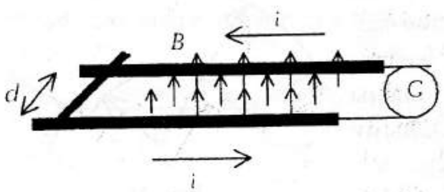


Рис. 20

сам через проволоку. 1. Найти скорость v проволоки как функцию времени, если в момент времени $t = 0$ она покоилась. 2. Генератор заменили на батарею с постоянной ЭДС ε. Скорость проволоки в этом случае стремится к постоянному конечному значению. Найти это значение. 3. Чему равен ток в момент времени, когда достигнута конечная скорость?

84. По длинному соленоиду радиусом $r = 2{,}5$ см с числом витков на единицу длины $n = 100$ 1/см течет ток $i_0 = 1$ А. Виток провода диаметром $D = 10$ см охватывает соленоид так, что их оси совпадают. Ток в соленоиде равномерно за время 0,01 с убывает до значения 0,5 А. Определите ЭДС, индуцированную в витке.

85. На рис. 21 $l = 2$ м и $v = 50$ см/с. B – индукция магнитного поля Земли, равная 6×10^{-5} Тл и направленная перпендикулярно плоскости рисунка. Сопротивление R цепи $ADCB$ постоянно и равно $1{,}2 \times 10^{-5}$ Ом. 1. Какая ЭДС индуцируется в цепи? 2. Какова величина напряженности электрического поля в проводе AB? 3. Какая сила действует на электрон в проводе из-за его движения в магнитном поле? 4. Какова величина и направление тока в проводе? 5. Какую силу необходимо приложить к проводу, чтобы он двигался с постоянной скоростью? 6. Рассчитать скорость, с которой электрическая энергия переходит в тепловую.

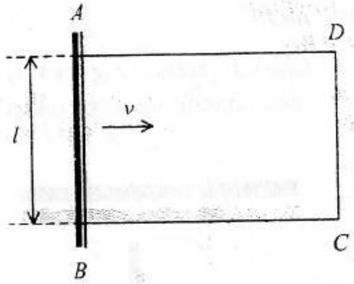


Рис. 21

86. По двум длинным параллельным проводам, центры которых расположены на расстоянии d, в противоположных направлениях текут одинаковые токи. Показать, что, пренебрегая потоком магнитной индукции через сами провода, индуктивность рассматриваемой системы, отнесенная к единице длины:

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a},$$ где a – радиус провода.

87. Сколько времени потребуется на то, чтобы напряжение на резисторе в LR-цепи ($L = 1$ Гн, $R = 1$ Ом) упало на 10% от его первоначального значения?

88. Проводящее кольцо с индуктивностью 2 Гн и сопротивлением 10 Ом быстро присоединяют к батарее с $\varepsilon = 100$ В. Внутреннее сопротивление батареи равно нулю. 1. Найти установившийся ток. 2. Сколько энергии заключено в магнитном поле, пока ток течет по кольцу?

89. Коаксиальный кабель на рис. 22 имеет размеры: $a = 1$ мм, $b = 4$ мм и $c = 5$ мм. По внешнему и внутреннему проводникам в противоположных направлениях текут токи 10 А.

Найти энергию магнитного поля, в трех областях: а) внутри центрального проводника; б) в пространстве между проводниками; в) внутри внешнего проводника.

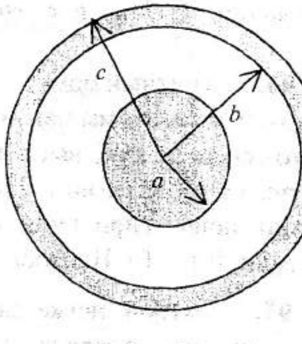


Рис. 22

90. Найти плотность энергии магнитного поля, создаваемого электроном в центре атома водорода. Радиус орбиты электрона $5{,}3 \cdot 10^{-11}$ м, частота обращения по орбите $6{,}5 \cdot 10^{15}$ Гц.

Магнитные свойства вещества

91. Магнитный момент витка провода малого размера $2 \cdot 10^{-4}$ А·м². Какова индукция B магнитного поля, создаваемого витком на расстоянии 8 см вдоль оси, проходящей перпендикулярно плоскости витка через его центр.

92. Рассчитать магнитное и электрическое поля, создаваемые протоном на расстоянии 0,1 нм в направлении его спинового момента количества движения. Магнитный момент протона $1{,}4 \times 10^{-26}$ А·м².

93. Заряд q равномерно распределен по кольцу из диэлектрика радиусом r. Кольцо вращается с угловой скоростью ω относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Найти величину и направление результирующего магнитного момента.

94. Чему равен магнитный момент, обусловленный движением электрона по орбите, если момент импульса электрона равен постоянной Планка $\hbar$ ($1{,}05 \times 10^{-34}$ Дж·с)?

95. 1. Чему равен магнитный момент, обусловленный орбитальным движением электрона, если соответствующий момент количества движения равен одной квантовой единице ($\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}$ Дж·с)? 2. Собственный спиновый магнитный момент электрона $0{,}928 \times 10^{-23}$ А·м^2. Найти разность энергий взаимодействия указанного момента с магнитным полем, индукция которого 1,2 Тл. 3. Какая температура необходима, чтобы разность энергий во втором случае равнялась средней энергии теплового движения $\frac{kT}{2}$? (k – постоянная Больцмана; T – температура).

96. Магнитный момент атома железа в магните $1{,}8 \times 10^{-23}$ А·м^2. Полагая, что все атомы магнита, имеющего длину 5 см, площадь поперечного сечения 1 см^2, выстраивают свои магнитные моменты, найти магнитный момент магнита. Какова величина максимального момента силы, возникающего при помещении магнита в магнитное поле с индукцией B, равной 1,5 Тл. Плотность вещества магнита 7,9 г/см^3.

97. Электрон движется по круговой орбите вокруг неподвижного положительного заряда в присутствии однородного магнитного поля B, направленного перпендикулярно к плоскости орбиты. Электрическая сила, действующая на электрон, в N раз больше магнитной. 1. Найти две возможные угловые скорости электрона. 2. Рассчитать численные значения этих скоростей в случае $B = 0{,}427$ Тл и $N = 100$.

98. Круг Роуланда (см. рис. 23) представляет собой тороид, образованный сердечником из ферромагнитного материала в форме кольца. Сечение сердечника – окружность. Внешний и внутренний радиусы тороида – 5 и 6 см. На сердечник намотано 400 витков провода. 1. Найти силу тока, необходимую для того, чтобы поле в кольце достигло значения $B_0 = 2 \times 10^{-4}$ Тл (без учета ферромагнетика). 2. Вторичное кольцо, содержащее 50 витков провода, охватывает тороид, как показано на рисунке. Сопротивление вторичного кольца 8 Ом. Если указанному значению B_0 соответствует вклад, обусловленный ферромагнетизмом

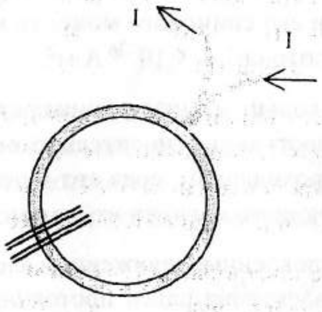


Рис. 23

сердечника $B_м = 800\ B_0$, то какой величины заряд пройдет по вторичному кольцу, если выключить ток в первичной обмотке?

99. Предположим, что ядра водорода (протоны), содержащиеся в 1 г воды, могут быть выстроены в одном направлении. Какое магнитное поле они создадут на расстоянии 5 см вдоль указанного направления?

100. Железный магнит с магнитной проницаемостью 5000 имеет длину 1м в железе и воздушный промежуток длиной 1 см в воздухе. Площадь поперечного сечения магнита постоянна и равна 0,02 м^2. Обмотка магнита содержит 500 витков провода. Какой силы ток нужно пропустить по обмотке, чтобы поле в воздушном зазоре достигло значения 1,8 Тл?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Закон Кулона

На рисунке показаны три заряда q_1, q_2, q_3. Полагая $q_1 = -1 \cdot 10^{-6}$ Кл; $q_2 = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл; $q_3 = -2 \cdot 10^{-6}$ Кл; $r_{12} = 15$ см; $r_{13} = 10$ см; $\vartheta = 30^\circ$, найти силу, действующую на заряд q_1 со стороны q_2 и q_3.

Решение

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{\left(1{,}5 \cdot 10^{-1}\right)^2} = 1{,}2 \text{ Н}. \quad F_{13} = ... = 1{,}8 \text{ Н}.$$

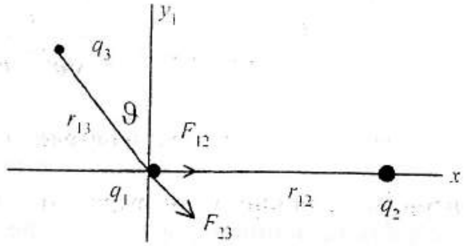
Направления векторов указаны на рисунке. Компоненты результирующей силы F_1, действующей на q_1:

$$F_{1x} = F_{12x} + F_{13x} = F_{12} + F_{13} \cdot \sin\theta = 1{,}2 + 1{,}8 \cdot \sin 30^\circ = 2{,}1 \text{ Н};$$

$$F_{1y} = F_{12y} + F_{13y} = 0 - F_{13}\cos\theta = -1{,}8 \cdot \cos 30^\circ = -1{,}6 \text{ Н}.$$

Величина силы $\vec{F}_1$ может быть найдена по теореме Пифагора:

$$F_1 = \sqrt{(2{,}1)^2 + (1{,}6)^2} = 2{,}64 \text{ Н}.$$

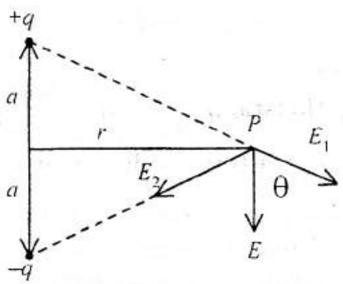


Угол β между вектором $\bar{F}_1$ и осью ox

$$\beta = \mathrm{arctg}\left|\frac{F_{1y}}{F_{1x}}\right| = \mathrm{arctg}\left|\frac{-1,6}{2,1}\right| = \mathrm{arctg}0,76 = 37^\circ.$$

Электрическое поле

1. На рисунке изображен электрический диполь – система из двух одинаковых по величине разноименных зарядов с фиксированным расстоянием между ними $2a$. Какова напряженность электрического поля в точке P, лежащей на перпендикуляре, восстановленном к середине линии, соединяющей диполи? Рассмотреть случай, когда $r \gg a$.



Решение

В соответствие с принципом суперпозиции поле в точке P равно векторной сумме полей, создаваемых зарядами q и $-q$:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

Величины полей

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2 + r^2}.$$

Сумма векторов направлена вертикально вниз и имеет величину

$$E = 2E_0 \cos\theta.$$

Из рисунка видно, что

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Подставляя выражения для E_1 и $\cos\theta$, получим

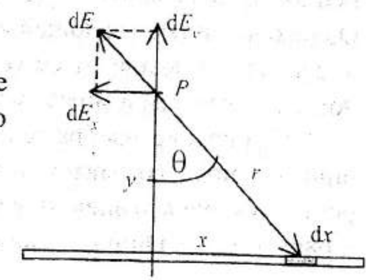
$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(a^2 + r^2)}\frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2aq}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Если $r \gg a$, то в знаменателе последнего выражения можно пренебречь величиной a и выражение приобретает вид $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2aq}{r^2}$.

В числителе выражения – $2qa$. Эта величина называется *электрическим дипольным моментом* p. Таким образом мы можем переписать уравнение для E в случае $r \gg a$ в виде

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{r^2}.$$

2. На рисунке показан участок бесконечной равномерно заряженной нити. Линейная плотность заряда нити λ (Кл/м). Найти поле E в точке P, удаленной от нити на расстояние y.



Решение

Величина вклада в электрическое поле dE от участка нити dx, заряд которого $dq = \lambda\, dx$ дается выражением

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dx}{y^2 + x^2}.$$

Как видно из рисунка, $dE_x = -dE\sin\theta$, а $dE_y = dE\cos\theta$; x и y – компоненты результирующего вектора $\bar{E}$ в точке P определяются следующим образом:

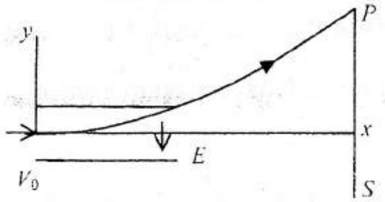
$$E_x = \int dE_x = -\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \sin\theta\, dE; \quad E_y = \int dE_y = -\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \cos\theta\, dE.$$

Компонента E_x должна раняться нулю, потому что каждый заряженный элемент справа от 0 имеет симметрично расположенный элемент слева. Потому их вклады взаимно уничтожаются. Следовательно вектор **E** направлен вдоль оси y. Так как вклады в E_y от левой и правой половин нити равны, то мы можем написать $E = E_y = 2\int_{x=0}^{x=+\infty}\cos\theta\, dE$. Подставляя выражение для dE, получим $E = E_y = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{x=0}^{x=+\infty}\cos\theta\dfrac{dx}{y^2 + x^2}$. Из рисунка видно, что величины x и θ не независимы. Между ними существует соотношение: $x = y\mathrm{tg}\theta$. Дифференцируя это соотношение, получим: $dx = y \cdot \sec^2\theta d\theta$. Подстановка этих выражений в интеграл приводит к выражению

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}(\sin\theta)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}.$$

Полученное выражение, на первый взгляд, не имеет практической ценности, так как относится к нереальному случаю бесконечной нити. Однако для нити, имеющей конечную длину, для точек вблизи поверхности нити и вдали от ее концов полученное уравнение оказывается довольно точным и может использоваться на практике.

3. На рисунке изображен электрон, влетающий в однородное электрическое поле, создаваемое заряженными пластинами. Начальная скорость электрона перпендикулярна силовым линиям электрического поля и равняется v_0. Опишем движение электрона.



Решение

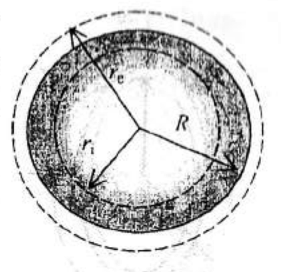
Движение электрона подобно движению снаряда в поле силы земного тяготения. Координаты x и y электрона в момент времени t:

$$x = v_0 t; \quad y = \frac{at^2}{2}.$$

Выражая t через x и подставляя в выражение для y, получим: $y = \frac{eE}{2mv_0^2}x^2$, а это уравнение траектории электрона. После вылета электрона из области, занятой электрическим полем, он движется (если пренебречь крайне слабым влиянием гравитации) прямолинейно вдоль касательной к траектории в момент вылета.

Теорема Гаусса в электростатике

На рисунке показано сферически симметричное распределение заряда радиуса R. Объемная плотность заряда ρ в каждой точке зависит только от расстояния до центра сферы r и не зависит от направления. Найдем выражения для E снаружи и внутри сферы.



Поле снаружи сферы. Применим теорему Гаусса для сферической поверхности радиуса r_e, большего, чем R: $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_e^2}$, где q – полный заряд сферы. Таким образом, в рассматриваемом случае электрическое поле имеет такую же величину, как если бы весь заряд был сконцентрирован в ее центре. Здесь имеет место замечательное сходство с гравитационным полем сферически симметричного распределения массы m для точек, лежащих снаружи, как если бы вся масса была сосредоточена в центре. Причиной такого совпадения является тот факт, что как закон Кулона, так и закон всемирного тяготения, содержат в знаменателях квадрат расстояния.

Поле внутри сферы. На том же рисунке проведена вторая поверхность Гаусса – сфера, радиус которой r_i. Теорема Гаусса $\varepsilon_0\oint \vec{E}\, d\vec{S} = \varepsilon_0 E\, 4\pi r_i^2 = q'$. Отсюда $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r_i^2}$. В этих выражениях q' – это часть заряда q, заключенная внутри сферы. Рассмотрим случай, когда объемная плотность заряда ρ постоянна во всех точках сферы. В этом случае для точек, лежащих внутри сферы можно считать

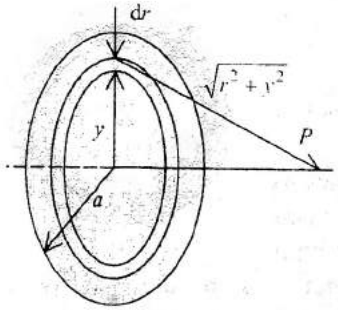
$$q' = q\frac{\frac{4\pi r_i^3}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}} \text{ или } q' = q\left(\frac{r_i}{R}\right)^3,$$ где $\frac{4\pi R^3}{3}$ – объем сферического распределения заряда. Тогда выражение для E внутри сферы приобретает вид

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3}.$$

Отсюда вытекает, в частности, что в центре сферы поле равно нулю. Для точек, лежащих на поверхности сферы, результаты расчета по обеим формулам совпадают.

Потенциал электрического поля

Найти электрический потенциал в точках, лежащих на оси однородно заряженного с поверхностной плотностью заряда σ диска. Радиус диска a.



Решение

Рассмотрим элемент поверхности в виде полоски шириной $\mathrm{d}y$ и радиусом y. Заряд $\mathrm{d}q$, распределенный по поверхности:

$$\mathrm{d}q = \sigma \cdot 2\pi r \cdot \mathrm{d}y,$$

где $2\pi r \cdot \mathrm{d}y$ – площадь полоски. Все точки полоски находятся на одинаковом расстоянии $\sqrt{r^2+y^2}$ от точки P, лежащей на оси диска. Поэтому их вклад в потенциал

$$\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi y \cdot \mathrm{d}y}{\sqrt{r^2+y^2}}.$$

Потенциал V может быть найден интегрированием по всем полоскам, на которые может быть разделен диск:

$$V = \int \mathrm{d}V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^a (y^2+r^2)^{-\frac{1}{2}} y\,\mathrm{d}y = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{a^2+r^2} - r).$$

Полученный результат справедлив для всех значений r. В частном случае $r \succ\succ a$ величина $\sqrt{a^2+r^2}$ может быть представлена в виде

$$\sqrt{a^2+r^2} = r(1+\frac{a^2}{r^2})^{\frac{1}{2}} = r(1+\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}+\ldots) \cong r + \frac{a^2}{2r}.$$

В результате выражение для V принимает вид

$$V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(r+\frac{a^2}{2r}-r) = \frac{\sigma\pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r},$$

где q – полный заряд диска. Таким образом, на большом расстоянии потенциал диска такой же, как у точечного заряда.

Конденсаторы и диэлектрики

Рассмотрим плоский конденсатор с пластиной из диэлектрика. Толщина пластины b, площадь пластин конденсатора A. В отсутствие диэлектрика на конденсатор было подано напряжение V_0, а

затем батарею отключили и ввели диэлектрическую пластину. Полагая, что $A = 100$ см^2, $d = 1$ см, $b = 0{,}5$ см, $\varepsilon = 7$, $V_0 =$ В, найдите: а) емкость пустого конденсатора; б) величину свободного заряда конденсатора; в) напряженность электрического поля в зазоре между пластиной конденсатора и пластиной диэлектрика; г) напряженность электрического поля в диэлектрике; д) разность потенциалов между обкладками конденсатора; е) емкость конденсатора с диэлектриком;

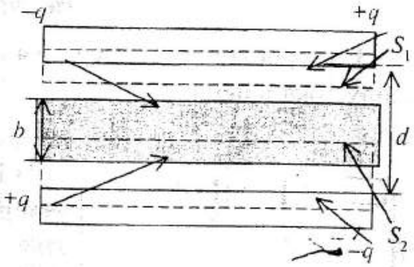
Решение

а. Емкость пустого конденсатора может быть найдена по формуле

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{8{,}9\times10^{-12}\cdot10^{-2}}{10^{-2}} = 8{,}9\times10^{-12}\,\Phi = 8{,}9\ \text{пФ}.$$

б. Свободный заряд можно рассчитать по формуле

$$q = C_0V_0 = \ldots = 8{,}9\times10^{-10}\ \text{Кл}.$$



в. Для нахождения электрического поля в зазоре воспользуемся теоремой Гаусса, примененной к поверхности S_1, охватывающей верхнюю пластину:

$\varepsilon_0\oint \varepsilon\vec{E}\cdot dS = \varepsilon_0 E_0 A = q$ или $E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = \ldots = 10^4$ В/м. Принимаем диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 1$, поскольку поверхность S_1 не проходит через диэлектрик.

г. Рассчитаем электрическое поле в диэлектрике. Для этого проведем гауссову поверхность S_2 так, чтобы она проходила через пластину и часть диэлектрика (см. рисунок).

По теореме Гаусса $\varepsilon_0\oint\varepsilon\vec{E}\cdot\mathrm{d}S = \varepsilon_0\varepsilon E_0 A = q$. Отметим, что ε появляется из-за того, что поверхность проходит через диэлектрик, а также то, что в правой части выражения фигурирует свободный заряд q. Таким образом

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon A} = \frac{E_0}{\varepsilon}\ldots = 0{,}14\times10^4\ \text{В/м}.$$

д. Рассчитаем разность потенциалов между обкладками конденсатора $V = -\int \vec{E}\, d\vec{l}$. Здесь интеграл берется вдоль кратчайшей прямой, соединяющей верхнюю и нижнюю пластины.

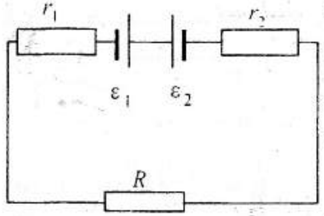
$$V = -\int \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_1^2 E \cdot \cos 180^\circ \quad dl = \int_1^2 E\, dl = E_0(d-b) + Eb = \ldots = 57 \text{ В}.$$

е. Найдем емкость конденсатора с диэлектриком

$$C = \frac{q}{V} = \ldots = 16 \text{ пФ}.$$

Электрический ток

1. На рисунке $\varepsilon_1 = 2$ В, $\varepsilon_2 = 4$ В, $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом, R = 5 Ом. Найти силу тока в цепи.



Решение

ЭДС противоположны, но поскольку превалирует ε_2, то она задает направление протекания тока, т. е. ток I течет против часовой стрелки. Второе правило Кирхгофа: $-\varepsilon_2 + ir_2 + iR + ir_1 + \varepsilon_1 = 0$ (обход контура совершался по часовой стрелке).

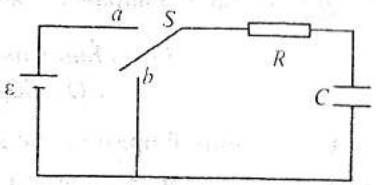
Отсюда для силы тока получаем выражение

$$i = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{R + r_1 + r_2} = \frac{4\text{ В} - 2\text{ В}}{5\text{ Ом} + 1\text{ Ом} + 2\text{ Ом}} = 0{,}25 \text{ А}.$$

Отметим, что при решении задачи необязательно знать истинное направление тока. Чтобы показать это, предположим, что ток течет по часовой стрелке. Правило Кирхгофа в этом случае $-\varepsilon_2 - ir_2 - iR - ir_1 + \varepsilon_1 = 0$ или $i = \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R + r_1 + r_2}$. Подставляя численные значения, получим $i = -0{,}25$ А. Знак минус указывает на то, что ток течет в противоположном направлении.

2. В схеме на рисунке ключ S вначале замыкает клемму a и заряжают конденсатор, затем замыкают клемму b и конденсатор разряжается через сопротивление R. В течении какого времени энергия конденсатора уменьшится вдвое?

Решение



Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле $U = \dfrac{1}{2C} q^2$. Максимальное значение энергии $U_\infty = \dfrac{1}{2C}(C\varepsilon)^2$. U зависит от времени по закону $U = \dfrac{1}{2C}(C\varepsilon)^2(1 - e^{-t/RC})^2$ или $U = U_\infty(1 - e^{-t/RC})^2$.

Полагая $U = \dfrac{1}{2}U_\infty$, получим $\dfrac{1}{2} = (1 - e^{-t/RC})^2$. Решая это уравнение относительно t, получим окончательно $t = 1{,}22\, RC$.

Магнитное поле

Электрон с энергией 10 эВ движется по окружности в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией $B = 10$–4 Тл.

Найти радиус орбиты электрона, период обращения и направление вращения электрона по орбите.

Решение

Скорость электрона, кинетическая энергия которого равняется K, может быть найдена по формуле $v = \sqrt{\dfrac{2K}{m}}$. Далее по второму закону Ньютона $qvB = \dfrac{mv^2}{r}$. Отсюда радиус орбиты: $r = \dfrac{mv}{qB} = \ldots = 11$ см.

Найдем частоту обращения по орбите (циклотронная частота):

Угловая скорость электрона $\omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{qB}{m}$. Отсюда частота $\nu = \dfrac{\varpi}{2\pi} = \dfrac{qB}{2\pi m}$.

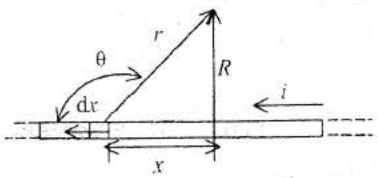
Подставляя численные значения величин, получим $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \ldots = 2{,}8 \times 10^6$ Гц.

Отсюда период обращения $T = \frac{1}{\nu} = 3{,}6 \times 10^{-7}$ с.

Направление вращения электрона – против часовой стрелки, если наблюдать вдоль направления вектора B.

Закон Био-Савара-Лапласа. Сила Ампера.
Обобщенный закон Ампера

1. По длинной прямой проволоке течет постоянный ток. Найти магнитную индукцию в точке, удаленной от проволоки на расстояние R.



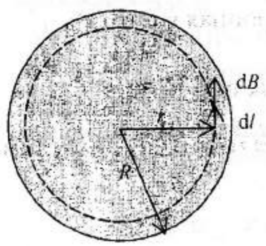
Решение

Рассмотрим элемент тока длиной dx. Величина вклада dB этого элемента в магнитное поле в точке P по закону Био-Савара-Лапласа

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dx\sin\theta}{r^2}.$$

Направления векторов dB от всех элементов провода одно и тоже – перпендикулярное к плоскости рисунка. Поэтому векторный интеграл сводится к скалярному интегралу $B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\frac{\sin\theta dx}{r^2}$. Переменные x, θ и r зависят друг от друга. Из рисунка видно, что $r = \sqrt{x^2+R^2}$, а $\sin\theta = \sin(\pi-\theta) = \frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$, так что выражение для B приобретает вид

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\frac{R\cdot dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\left|\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}.$$

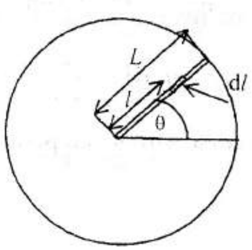


2. Найти индукцию B магнитного поля внутри длинного провода цилиндрической формы. Радиус провода R. По проводу течет ток i_0, равномерно распределенный по его сечению.

На рисунке пунктирной линией изображен контур, вдоль которого производится интегрирование – окружность радиуса r. Из соображений симметрии следует, что вектор B направлен по касательной к окружности. По закону Ампера $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 i$. Отсюда следует $B\cdot 2\pi R = \mu_0 i_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$, поскольку только часть полного тока, которая протекает через контур интегрирования фигурирует в правой части в виде тока i. Выразив B из последнего уравнения получим $B = \frac{\mu_0 ir}{2\pi R^2}$.

Электромагнитная индукция. Энергия магнитного поля

1. Медный стержень длиной L вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B, как показано на рисунке. Найти ЭДС, возникающую между концами стержня.

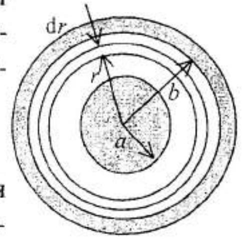


Решение

Если провод длиной dl движется со скоростью v перпендикулярно к B, между его концами возникнет ЭДС: $d\varepsilon = Bv\,dl$. Стержень можно разбить на бесконечно малые элементы длиной dl каждый. Линейная скорость каждого элемента равняется ωl, каждый элемент перпендикулярен к вектору магнитной индукции B и движется перпендикулярно к нему. Поэтому можно записать

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \int\limits_0^L Bv\,dl = \int\limits_0^L B(\omega l)\,dl = \frac{1}{2}B\omega L^2.$$

2. Длинный коаксиальный кабель состоит из двух концентрических цилиндров с радиусами a и b. По цилиндрам текут токи одинаковой величины, но направленные в разные стороны. Найти энергию, приходящуюся на единицу длины кабеля.



Решение

В пространстве между проводниками индукция B магнитного поля может быть определена с помощью обобщенного закона Ампера $\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I \to B\cdot 2\pi R \to B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$. Из закона Ампера также вытекает, что поле B существует внутри проводников (но равно нулю во всех точках снаружи кабеля – почему?). Посчитаем энергию магнитного поля, заключенную в пространстве между проводниками. В точках, лежащих на расстоянии r от центра кабеля, плотность энергии магнитного поля

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}.$$

Рассмотрим элемент объема, заключенный в цилиндрическом слое, радиусы которого r и $r + \mathrm{d}r$, а длина l. В нем заключается энергия $\mathrm{d}U = u_B \mathrm{d}V = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}(2\pi r l)(\mathrm{d}r) = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r}$. Интегрируя, получим полную запасенную энергию магнитного поля

$$U = \int \mathrm{d}U = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln\frac{b}{a}.$$

Оглавление