

**МАДИ**

**Кафедра тягачей и АМ**

**Курс «НАДЁЖНОСТЬ ТССН»**

## **ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3**

**ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЁЖНОСТИ ТЕХНИЧЕ-  
СКИХ СИСТЕМ С УЧЁТОМ ИХ ФИЗИЧЕСКОЙ  
РЕАЛИЗУЕМОСТИ**

**Методические указания**

**Москва 2015**

Целью настоящей лабораторной работы является изучение влияния на показатели надёжности системы следующих факторов:

- различных видов законов распределения времени до отказа;
- неодновременности работы элементов системы.

## 1. Влияние неодновременной работы элементов на надёжность системы

### 1.1. Постановка задачи

Дано:

- структурная схема технической системы;
- $n$  – количество элементов системы;
- $\tau$  – период работы системы;
- $P_i(t)$  – вероятность безотказной работы элементов,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- $[a_i, b_i]$  – интервал времени работы элементов на периоде  $\tau$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;
- $t$  – время работы системы.

Определить:

- вероятность  $P_{i,пр}(t)$  и среднее время  $T_{1i,пр}$  безотказной работы элементов с учётом времени их простоя;
- вероятность безотказной работы системы без учёта и с учётом времени простоя элементов:  $P_c(t)$  и  $P_{c,пр}(t)$  соответственно;
- вероятности безотказной работы  $P_c(t)$ ,  $P_{c,пр}(t)$  в виде таблиц значений и графиков;
- среднее время безотказной работы системы без учёта и с учётом времён простоя элементов  $T_1$  и  $T_{1,пр}$ .

Варианты заданий приведены в разд. 1.4.

### 1.2. Сведения из теории

На периоде  $\tau$  элементы системы работают не одновременно. Рассмотрим функционирование одного элемента. Пусть на интервале времени от  $a$  до  $b$  элемент работает, а вне этого интервала – простаивает. На следующем периоде длительностью  $\tau$  элемент работает на интервале от  $\tau + a$  до  $\tau + b$  и простаивает вне этого интервала, и т. д. Выключение элемента не влияет на его надёжность. Пусть  $P(t)$  – вероятность безотказной работы элемента в случае, когда он работает непрерывно. Оценим его надёжность при условии, что элемент может простаивать на заданных  $k$ -х интервалах времени. Выражение вероятности безотказной работы элемента  $P_{пр}(t)$  при наличии интервалов простоя в данном случае имеет вид:

$$P_{пр}(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < t \leq a; \\ P[t - k(\tau - b + a) - a], & \text{при } k\tau + a < t \leq k\tau + b, k = 0, 1, 2, \dots; \\ P[k(b - a)], & \text{при } (k - 1)\tau + b < t \leq k\tau + a, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1)$$

Соотношение (1) определяет новый закон распределения времени работы элемента с учётом его простоя. Закон  $P_{пр}(t)$  имеет на три параметра больше, чем  $P(t)$ .

Среднее время безотказной работы вычислим на основе формулы (1). Интегрируя  $P_{\text{пр}}(t)$ , получим:

$$\begin{aligned} T_{1,\text{пр}} &= \int_0^{\infty} P_{\text{пр}}(t) dt = a + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\tau+a}^{k\tau+b} P[t - k(\tau - b + a)] dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)\tau+b}^{k\tau+a} P[k(b-a)] dt = a + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k(b-a)}^{(k+1)(b-a)} P(t) dt + \\ &+ (\tau - b + a) \sum_{k=0}^{\infty} P[k(b-a)] = \int_0^{\infty} P(t) dt + a + (\tau - b + a) \sum_{k=1}^{\infty} P[k(b-a)]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$T_{1,\text{пр}} = T_1 + a + (\tau - b + a) \sum_{k=1}^{\infty} P[k(b-a)], \quad (2)$$

где  $T_1$  – среднее время безотказной работы элемента в случае его непрерывной работы.

В частности, для экспоненциального распределения с параметром  $\lambda$  получим:

$$T_{1,\text{пр}} = \frac{1}{\lambda} + a + (\tau - b + a) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k(b-a)} = \frac{1}{\lambda} + a + \frac{\tau - b + a}{e^{-\lambda(b-a)} - 1}, \quad (3)$$

Из формулы (3) следует, что повысить среднее время безотказной работы элемента можно не только путём уменьшения интенсивности отказа  $\lambda$ , но также и путём увеличения времени его простоя за счёт уменьшения величины  $b - a$ . Полагая  $a = 0$ , получим, что выигрыш по среднему времени безотказной работы равен:

$$G_{T_1} = \frac{T_{1,\text{пр}}}{T_1} = 1 + \frac{\lambda(\tau - b + a)}{e^{-\lambda(b-a)} - 1}.$$

Численное значение выигрыша по критерию  $T_1$  при  $\tau = 10$  час приведено в табл. 1.

**Таблица 1.** Выигрыш по среднему времени безотказной работы в зависимости от  $\lambda$ , и времени работы элемента  $b - a$

$\lambda$ , час <sup>-1</sup>	$b - a$ , час				
	10	8	6	4	2
0,1	1,0	1,16	1,49	2,22	4,61
0,01	1,0	1,24	1,65	2,47	4,96
0,001	1,0	1,25	1,66	2,50	5,00
0,0001	1,0	1,25	1,67	2,50	5,00

Из таблицы следует, что на величину  $T_{1,\text{пр}}$  оказывает влияние не только надёжность элемента, но и увеличение времени его простоя, когда элемент не расходует свой ресурс надёжности.

Рассмотрим систему, состоящую из  $n$  элементов, имеющих интервалы простоя. Для каждого элемента системы эти интервалы имеют различную продолжительность на периоде  $\tau$ . Тогда время до отказа элементов всегда имеет неэкспоненциальное распределение, выражаемое формулой (1).

Оценка надёжности такой системы осуществляется методами, учитывающими произвольный характер времени до отказа элементов. Вероятность безотказной работы нерезервированной системы, состоящей из  $n$  элементов равна  $P_c(t) = \prod_{i=1}^n P_i(t)$  вероятность безотказной работы резервированной сис-

темы кратности  $m$  с постоянным резервом равна  $P_c(t) = 1 - \prod_{i=0}^m [1 - P_i(t)]$  и т. д.

### 1.3. Пример выполнения работы

Структурная схема расчёта надёжности изображена на рис. 1. Она состоит из  $n = 4$  элементов и представляет собой общее резервирование с постоянно включённым резервом.

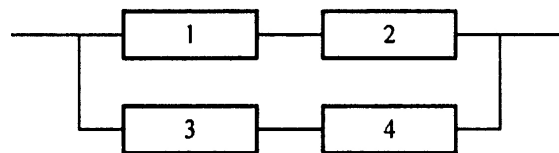


Рис. 1. Схема расчёта надёжности

Время работы элементов до отказа является случайным и подчинено экспоненциальному закону распределения с параметром  $\lambda = 0,002 \text{ час}^{-1}$ . Период работы, состоящий из интервалов работы и простоя каждого элемента, равен  $\tau = 10$  час. Время работы элементов на каждом периоде приведено в табл. 2.

Таблица 2. Время работы элементов

Номер элемента	1	2	3	4
Интервал работы	[0;5]	[2;3]	[5; 8]	[0;7]

На остальной части периода  $\tau$  элементы выключены из работы.

**Решение.** Вычислим среднее время безотказной работы элементов и системы. Среднее время безотказной работы элементов без учёта времени простоя равно  $T_1 = 1/\lambda = 500$  час.

Вероятность безотказной работы каждого элемента имеет вид:  $P(t) = e^{-\lambda t}$ . Поэтому, если бы все элементы системы работали непрерывно, то вероятность безотказной работы системы была бы равна:

$$P_c(t) = 1 - (1 - e^{-2\lambda t})^2. \quad (4)$$

В соответствии с условиями табл. 2 по формуле (1) найдём вероятность безотказной работы элементов с учётом простоя:

$$P_{1,\text{пр}}(t) = \begin{cases} P(t - 5k), & \text{при } 10k < t \leq 10k + 5, k = 0, 1, 2, \dots; \\ P(5k), & \text{при } 10(k - 1) + 5 < t \leq 10k, k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (5)$$

$$P_{2,пр}(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < t \leq 2; \\ P(t - 9k - 2), & \text{при } 10k + 2 < t \leq 10k + 3, k = 0, 1, 2, \dots; \\ P(k), & \text{при } 10(k - 1) + 3 < t \leq 10k + 2, k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (6)$$

$$P_{3,пр}(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < t \leq 5; \\ P(t - 7k - 5), & \text{при } 10k + 5 < t \leq 10k + 8, k = 0, 1, 2, \dots; \\ P(7k), & \text{при } 10(k - 1) + 8 < t \leq 10k + 8, k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (7)$$

$$P_{4,пр}(t) = \begin{cases} P(t - 3k), & \text{при } 10k < t \leq 10k + 7, k = 0, 1, 2, \dots; \\ P(7k), & \text{при } 10(k - 1) + 7 < t \leq 10k, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8)$$

На основе структурной схемы определим вероятность безотказной работы системы с учётом простоя элементов.

Вероятность безотказной работы нерезервированной (основной) подсистемы, состоящей из последовательных элементов 1 и 2, равна произведению их вероятностей безотказной работы. Тогда  $P_{1,2,пр}(t) = P_{1,пр}(t) \cdot P_{2,пр}(t)$ .

Аналогично вероятность безотказной работы резервной подсистемы равна  $P_{3,4,пр}(t) = P_{3,пр}(t) \cdot P_{4,пр}(t)$ . Поэтому вероятность безотказной работы всей системы с учётом параллельных соединений и времени простоя элементов равна:

$$P_{с,пр}(t) = 1 - [1 - P_{1,пр}(t) P_{2,пр}(t)] \cdot [1 - P_{3,пр}(t) P_{4,пр}(t)]. \quad (9)$$

Таблицу значений и графики вероятностей безотказной работы элементов и систем получим в Microsoft Excel. В ячейках A1 : П записываются заголовки столбцов. В колонке А помещается время  $t$ , изменяющееся от 0 до 500 часов с шагом  $\Delta t = 5$  часов. В ячейку B2 записывается отношение текущего времени работы системы к периоду  $\tau = 10$  часов:

$$B2 = A2/10.$$

В ячейку C2 помещается значение  $k$  как целое от деления  $t$  на  $\tau$ :

$$C2 = \text{ЦЕЛОЕ}(B2).$$

В ячейках D2 : G2 содержатся формулы (5) – (8) для вычисления вероятностей безотказной работы элементов:

$$D2 = \text{ЕСЛИ}(B2 \leq C2 + 0.5; \text{EXP}(-0.002 \cdot (A2 - 5 \cdot C2));$$

$$\text{EXP}(-0.002 \cdot 5 \cdot (C2 + 1))),$$

$$E5 = \text{ЕСЛИ}(B5 > C5 + 0.2 \ \& \ B5 \leq C5 + 0.3;$$

$$\text{EXP}(-0.002 \cdot (A5 - 9 \cdot C5 - 2)); \text{EXP}(-0.002 \cdot (C5 + 1))),$$

$$F8 = \text{ЕСЛИ}(B8 > C8 + 0.5 \ \& \ B8 \leq C8 + 0.8;$$

$$\text{EXP}(-0.002 \cdot (A8 - 7 \cdot C8 - 5)); \text{EXP}(-0.002 \cdot 3 \cdot (C8 + 1))),$$

$$G2 = \text{ЕСЛИ}(B2 \leq C2 + 0.7; \text{EXP}(-0.002 \cdot (A2 - 3 \cdot C2));$$

$$\text{EXP}(-0.002 \cdot 7 \cdot (C2 + 1))).$$

Заметим, что в соответствии с исходными данными (табл. 2) для 2-го и 3-го элементов расчётные формулы записываются, начиная с ячеек E5 и F8, поскольку в предыдущих ячейках значения функций равны единице.

Ячейки H2 и I2 содержат формулы (9) и (4) для вычисления вероятностей безотказной работы системы, соответственно, при наличии и отсутствии интервалов простоя элементов:

$$H2 = 1 - (1 - D2 \cdot E2) \cdot (1 - F2 \cdot G2),$$

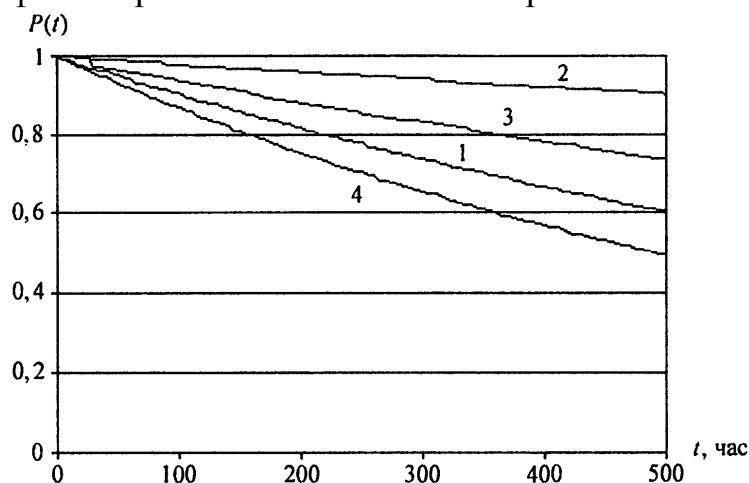
$$I2 = 1 - (1 - \text{EXP}(-0.004 \cdot A2))^2.$$

Затем полученные формулы протягиваются на весь блок рассчитываемых ячеек. Результаты табулирования функций приведены в табл. 3.

**Таблица 3.** Расчёт вероятностей безотказной работы элементов и системы

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>I</b>
1	<i>t</i>	<i>t</i> /10	<i>k</i>	<i>P1</i>	<i>P2</i>	<i>P3</i>	<i>P4</i>	<i>PCП</i>	<i>PC</i>
2	0	0	0	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1	1
3	5	0.5	0	0.99005	1.00000	1.00000	0.99005	0.999901	0.999608
4	10	1	1	0.99005	1.00000	1.00000		0.999862	0.998463
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
102	500	50	50	0.60653	0.90303	0.73639	0.49659	0.713106	0.252355

Графическая иллюстрация таблицы показана на рис. 2 и 3. На рис 2 изображены графики вероятностей безотказной работы элементов.



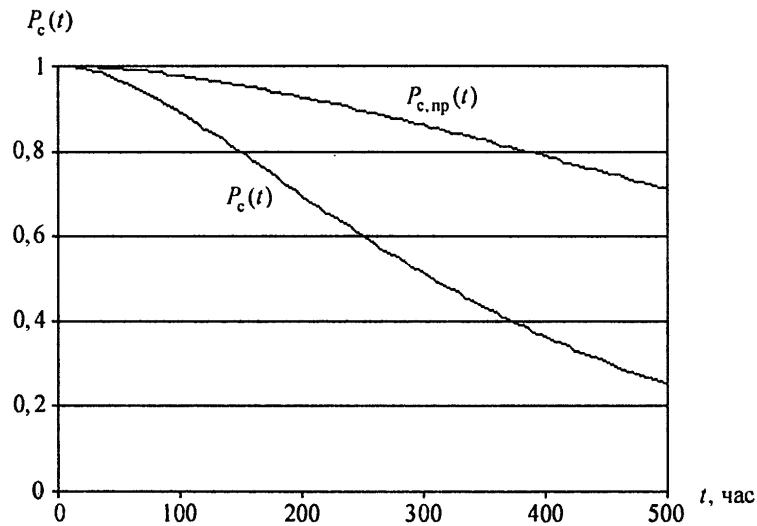
**Рис. 2.** Вероятности безотказной работы элементов

Из рис. 2 следует, что надёжность элементов 1 ... 4 по критерию  $P(t)$  определяется временем их работы. Чем меньше это необходимо для нормального функционирования системы время, тем более надёжным оказывается элемент. Самым надёжным является второй элемент, которому для нормального функционирования системы достаточно 1 часа, третий элемент работает 3 часа, первый элемент — 5 часов, а четвёртый — 7 часов.

На рис. 3 приведены графики вероятностей безотказной работы системы без простоя элементов и при наличии простоев.

Из графиков следует, что  $P_c(t)$  значительно меньше, чем  $P_{c,пр}(t)$  т. е. наличие простоя у элементов повышает надёжность системы.

Используя формулу (4), найдём среднее время безотказной работы системы без учёта времени простоя элементов:



**Рис. 3.** Вероятность безотказной работы системы для случаев непрерывной и неодновременной работы элементов

$$\begin{aligned}
 T_{1,c} &= \int_0^{\infty} P_c(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-2\lambda t})^2] dt = \int_0^{\infty} (2e^{-2\lambda t} - e^{-4\lambda t}) dt = \\
 &= \frac{2}{2\lambda} - \frac{1}{4\lambda} = \frac{3}{4\lambda} = 375 \text{ час.}
 \end{aligned}$$

Среднее время безотказной работы отдельных элементов с учётом времени их простоя определим из соотношения (3):

$$\begin{aligned}
 T_{1,пр} &= \frac{1}{\lambda} + \frac{5}{e^{5\lambda} - 1} = 500 + \frac{5}{e^{5 \cdot 0,002} - 1} = 997,5 \text{ час.} \\
 T_{2,пр} &= \frac{1}{\lambda} + 2 + \frac{9}{e^{\lambda} - 1} = 502 + \frac{9}{e^{0,002} - 1} = 4997,5 \text{ час.} \\
 T_{3,пр} &= \frac{1}{\lambda} + 5 + \frac{7}{e^{3\lambda} - 1} = 500 + \frac{7}{e^{3 \cdot 0,002} - 1} = 1668,2 \text{ час.} \\
 T_{4,пр} &= \frac{1}{\lambda} + \frac{3}{e^{7\lambda} - 1} = 500 + \frac{3}{e^{7 \cdot 0,002} - 1} = 712,8 \text{ час.}
 \end{aligned}$$

Среднее время безотказной работы системы с учётом времени простоя элементов определим на основе табличных данных, по формуле трапеций, которая, как известно из курса высшей математики, имеет вид:

$$T_{c,пр} = \int_0^{\infty} P_{c,пр}(t) dt \approx \tau \left[ \frac{P_{c,пр}(t_0) + P_{c,пр}(t_n)}{2} + P_{c,пр}(t_1) + P_{c,пр}(t_2) + \dots + P_{c,пр}(t_{n-1}) \right].$$

Окончательно получим:

$$T_{c,пр} = 1028,564540 \approx 1030 \text{ [час]}.$$

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

- закон распределения времени безотказной работы элементов и системы существенно зависит от того, как долго элементы пребывают в выключенном состоянии;

- надёжность системы по вероятности  $P(t)$  значительно выше, если на определённых интервалах времени элементы простаивают, причём с течением времени разница  $P_{с,пр}(t) - P_c(t)$  будет увеличиваться;
- наличие интервалов простоя элементов повышает также среднее время безотказной работы системы, которое в нашем случае увеличилось с 375 до 1030 часов, т. е. почти в 3 раза.

### **Форма отчёта**

По результатам выполненной лабораторной работы представляется отчёт в виде твёрдой копии с титульным листом. В отчёте должны содержаться следующие пункты:

1. Постановка задачи с конкретным содержанием, сформулированным для своего варианта.
2. Согласно заданному закону распределения, варианту соединений в системе и времени работы элементов на каждом периоде – представить собственный алгоритм решения задачи (см. формулы 1 ... 8), а также результаты расчётов, включая полученные в Excel графики  $P(t_i)$  и  $P_c(t) - P_{с,пр}(t)$ .
3. Выводы по результатам исследований.
4. Электронную версию результатов расчётов в Excel.

### **1.4. Варианты заданий к лабораторной работе**

Выполнить анализ надёжности элементов и системы при непрерывной и неодновременной работе элементов. Структурные схемы приведены на рис. 4, а исходные данные для вариантов расчёта – содержатся в табл. 4.

Период работы для всех вариантов  $\tau = 10$  час.

Время  $t$  изменяется с шагом 5 часов.

В табл. 4 приняты следующие обозначения законов распределения:

- Exp – экспоненциальный;
- U – равномерный;
- Г – гамма;
- TN – усечённый нормальный;
- R – Рэлея;
- W – Вейбулла;
- N – нормальный.

В скобках указаны параметры распределений.

Формулы вероятностей безотказной работы элементов для приведённых в задании распределений содержатся в табл. 3.1 третьего раздела курса лекций по надёжности ТССН, а также в теоретических материалах к Лабораторной работе №1.

### **Литература**

1. Котович С. В. Лекции по надёжности ТССН (2015/2016 учебный год).
2. Половко А. М., Гуров С. В. Основы теории надёжности. Практикум. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006.



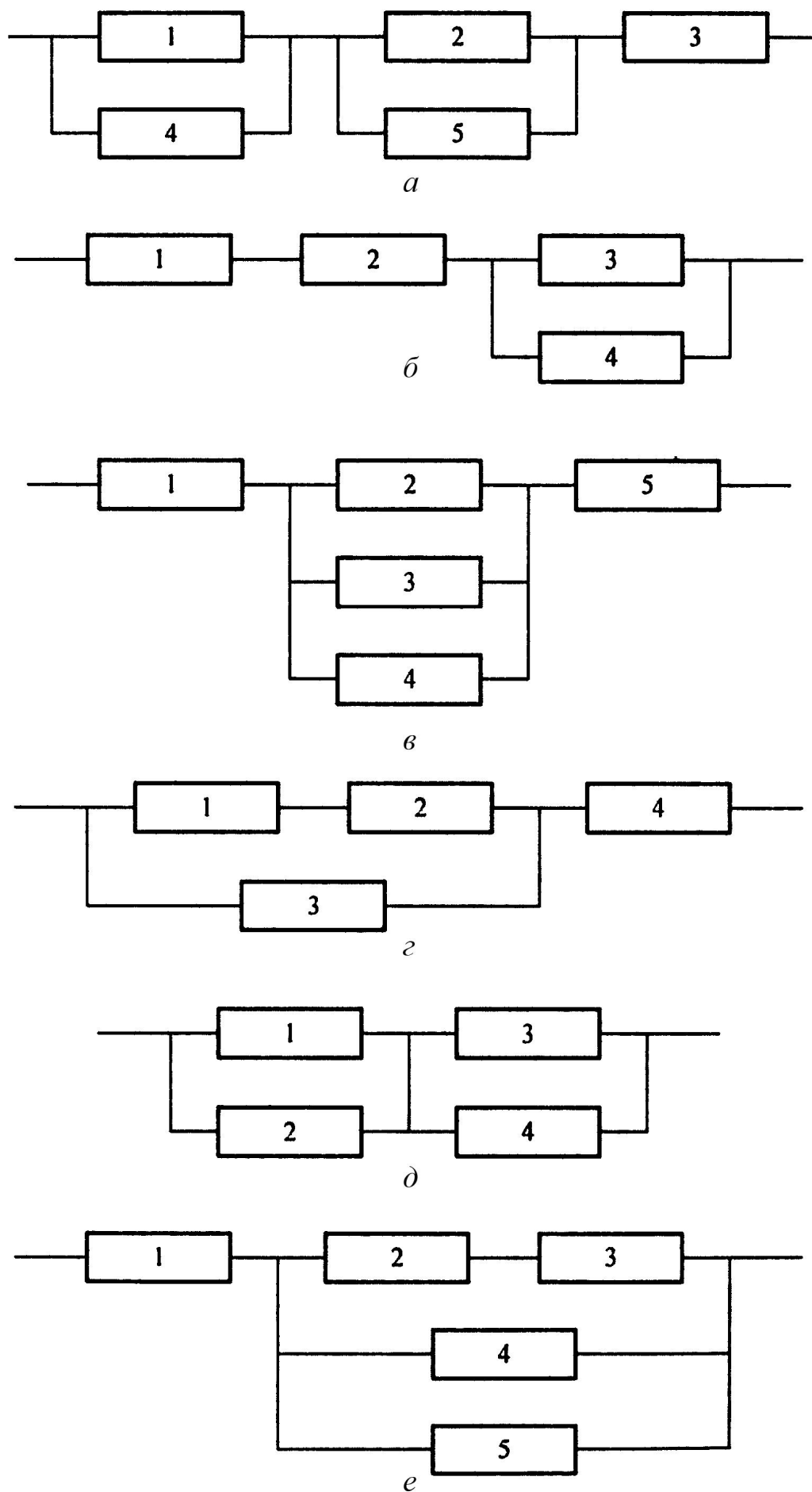


Рис. 4. Варианты схем для расчёта надёжности системы

**Таблица 4. Исходные данные для вариантов расчёта**

Вариант	Схема	Закон распределения	Интервалы работы элементов				
			1	2	3	4	5
1	рис. 4,е	Exp(0,005)	[3;9]	[6; 10]	[0; 3]	[0; 4]	[2; 7]
2	рис. 4,е	N(300; 50)	[0;8]	[5; 6]	[0; 2]	[3; 4]	[9; 10]
3	рис. 4,а	U( 100; 200)	[1;6]	[2; 8]	[1; 3]	[0; 7]	[2; 4]
4	рис. 4,б	Exp(0,007)	[1;5]	[5; 10]	[3; 6]	[0; 5]	
5	рис. 4,з	Exp(0,001)	[5; 7]	[0; 8]	[0; 3]	[2; 4]	
6	рис. 4,д	TN(200; 70)	[2; 6]	[0; 7]	[1; 5]	[1; 4]	
7	рис. 4,з	Г(3; 150)	[0;9]	[4; 7]	[1; 3]	[3; 4]	
8	рис. 4,б	Exp(0,003)	[8; 9]	[6; 7]	[0; 4]	[3; 8]	
9	рис. 4,а	W(1,8; 220)	[1;4]	[4; 10]	[1; 3]	[0; 4]	[0; 7]
10	рис. 4,е	R(0,00018)	[3;6]	[6; 8]	[0; 8]	[3; 4]	[2; 8]
11	рис. 4,в	Exp(0,004)	[2; 5]	[0; 6]	[0;3]	[1; 4]	[0; 3]
12	рис. 4,д	TN(160;50)	[3;7]	[7; 10]	[3;5]	[0; 6]	
13	рис. 4,б	U(300; 500)	[4; 9]	[0; 6]	[3; 8]	[3; 4]	
14	рис. 4,в	TN(220; 80)	[8; 9]	[5; 8]	[0; 8]	[0; 8]	[1; 9]
15	рис. 4,а	N(300; 90)	[0;7]	[7; 8]	[5; 9]	[0; 7]	[2; 3]
16	рис. 4,е	Г(2; 270)	[3;7]	[0; 5]	[0; 5]	[1; 4]	[6; 8]
17	рис. 4,е	Exp(0,002)	[8; 9]	[6; 9]	[1; 3]	[0; 7]	
18	рис. 4,д	W(2,3; 240)	[0;5]	[2; 4]	[0; 6]	[0; 6]	
19	рис. 4,а	U(340; 400)	[3;4]	[0; 5]	[2; 3]	[8; 10]	[3; 5]
20	рис. 4,з	Exp(0,003)	[0;8]	[5; 8]	[1; 3]	[0; 6]	
21	рис. 4,б	N(190; 60)	[7; 9]	[6; 10]	[1; 5]	[0; 5]	
22	рис. 4,е	Г(3; 180)	[2; 6]	[0; 3]	[1; 3]	[0; 9]	[1; 6]
23	рис. 4,в	Exp(0,008)	[5; 9]	[0; 5]	[2; 8]	[3; 4]	[2; 8]
24	рис. 4,д	W(3; 200)	[4; 7]	[6; 7]	[2; 8]	[0; 5]	
25	рис. 4,а	U(150; 200)	[3;9]	[0; 4]	[0; 7]	[2; 4]	[3; 7]
26	рис. 4,д	TN(280; 60)	[5; 8]	[5; 8]	[0; 7]	[0; 8]	
27	рис. 4,е	N(150; 40)	[6; 8]	[0; 8]	[1; 6]	[2; 4]	[0; 7]
28	рис. 4,в	Г(2; 230)	[8; 9]	[0; 3]	[2; 3]	[6; 8]	[0; 5]
29	рис. 4,з	Г(2; 100)	[0;9]	[0; 5]	[3; 4]	[5; 8]	
30	рис. 4,б	W(2,4; 250)	[3;6]	[0; 6]	[0; 6]	[2; 4]	

Составил ст. преподаватель Котович С.В.