

Министерство образования и науки Российской Федерации
Кубанский государственный технологический университет
Кафедра производства строительных конструкций и строительной
механики



ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания по выполнению расчетно-графической работы «Расчеты на прочность при одноосном растяжении или сжатии» для студентов всех форм обучения направления 270800.62 Строительство

Краснодар

2012

Составители: канд. физ.-мат. наук, доц. С.Ю. Молдаванов;
д-р физ.-мат. наук, доц. В.И. Дунаев;
ассист. В.Г. Георгияди

УДК 539.3

Техническая механика: метод. указания по выполнению расчетно-графической работы «Расчеты на прочность при одноосном растяжения или сжатии» для студентов всех форм обучения направления 270800.62 Строительство / Сост.: С.Ю. Молдаванов, В.И. Дунаев, В.Г. Георгияди; Кубан. гос. технол. ун-т. Каф. производства строительных конструкций и строительной механики. – Краснодар: Изд. КубГТУ, 2012. – 44 с.

Приведены краткие теоретические сведения по теме «Расчеты на прочность при одноосном растяжения или сжатии». Рассмотрены: примеры прочностных расчетов как статически определимых, так и статически неопределимых стержней и простейших стержневых систем; примеры расчетов на действие внешних нагрузок, неточности изготовления отдельных элементов и температурных воздействий. Приведены задания к расчетно-графической работе, а также справочные данные.

Ил. 14. Табл. 2. Библиогр.: 7 назв.

Печатается по решению методического совета Кубанского государственного технологического университета

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры ПСКиСМ КубГТУ
С.Б. Лозовой;
канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой СКиГС КубГТУ М.А.
Тамов.

© КубГТУ, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.	4
1 Общие сведения об одноосном растяжении или сжатии прямых стержней.	5
2 Расчет на прочность статически определимого ступенчатого стержня.	9
3 Расчет на прочность статически неопределимого ступенчатого стержня.	11
4 Расчет на прочность статически определимой стержневой системы	15
5 Расчет на прочность статически неопределимой стержневой системы	17
6 Расчет статически неопределимой стержневой системы при многофакторном воздействии	25
7 Расчёт статически неопределимой стержневой системы на прочность методом разрушающих нагрузок.	30
8 Задание к расчетно-графической работе	31
Список литературы	38
Приложение А (справочное). Модули упругости и коэффициент Пу- ассона.	39
Приложение Б (справочное). Коэффициент линейного теплового расширения твердых тел (для температура в интервале от 0 до 100°С)	41
Приложение В (справочное). Ориентировочные величины расчетных сопротивлений некоторых материалов на растяжение и сжатие.	42
Приложение Г (справочное). Объемная плотность различных материалов (при 20°С).	44

Введение

В методических указаниях рассмотрены основные виды расчёта простейших стержневых систем, работающих в условиях одноосного растяжения или сжатия. Для более глубокого понимания предлагаемых примеров решения практических задач студентам необходимо изучить по литературным источникам соответствующие разделы дисциплины «Техническая механика». Особое внимание следует обратить на решения задач приведенных в учебной литературе. Кроме того, следует самостоятельно повторить раздел курса, посвященный определению геометрических характеристик плоских сечений.

Если на стержень действуют внешние нагрузки, равнодействующая которых находится на оси стержня, то стержень продольно деформируется. Такой вид простого сопротивления стержня называется осевым растяжением или сжатием. В поперечных сечениях стержня, работающего в условиях одноосного растяжения или сжатия, возникают только продольные силы.

При расчетах на осевое растяжение или сжатие встречаются как статически определимые, так и статически неопределимые задачи. В статически неопределимых системах число неизвестных, подлежащих определению, превышает число уравнений статики, которые могут быть использованы для этой цели. Разница между числом неизвестных и числом уравнений статики определяет число «лишних» неизвестных, или степень статической неопределимости системы. Для раскрытия статической неопределимости систему уравнений статики дополняют уравнениями, описывающими способность реальных тел сопротивляться деформированию. В данных методических указаниях рассмотрены следующие виды задач:

- проектировочный расчёт на прочность и вычисление перемещений для статически определимой стержневой системы.
- проектировочный расчёт на прочность статически неопределимого стержня при его загрузении осевыми силами.
- проектировочный расчёт на прочность статически неопределимой стержневой системы, находящейся под воздействием заданной нагрузки (с учётом заданного изменения температуры стержней, при заданной неточности их изготовления).
- расчёт на прочность стержневой системы по методу разрушающих нагрузок.

В приложениях приведены задания к расчетно-графической работе «Расчеты на прочность при одноосном растяжения или сжатии», а также таблицы, где приведены справочные материалы, которые могут понадобиться студентам в ходе ее выполнения.

1 Общие сведения об одноосном растяжении или сжатии прямых стержней

В первом разделе будут рассмотрены статически определимые стержни и стержневые системы, внутренние усилия или реакции связей которых можно определить с помощью уравнений статики.

Центральным растяжением (или центральным сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечном сечении стержня возникает только одно усилие, продольная сила N (растягивающая или сжимающая). При центральном растяжении или сжатии внешние силы, включая опорные реакции или их равнодействующие, направлены вдоль оси стержня.

Определение продольных сил. Метод сечений позволяет определять продольную силу N в поперечном сечении любого грузового участка стержня. Для этого прямой стержень рассекают воображаемой плоскостью S нормальной к его продольной оси и мысленно отбрасывают одну из образовавшихся частей. Действие отброшенной части стержня на оставшуюся часть заменяют неизвестной продольной силой N (рис. 1, а). Далее составляют единственное уравнение равновесия $\sum Z = 0$. Из этого уравнения определяют значение N . Таким образом, продольная сила в любом сечении стержня равна сумме проекций внешних сил, действующих на его оставшуюся часть, на направление внешней нормали к поперечному сечению.

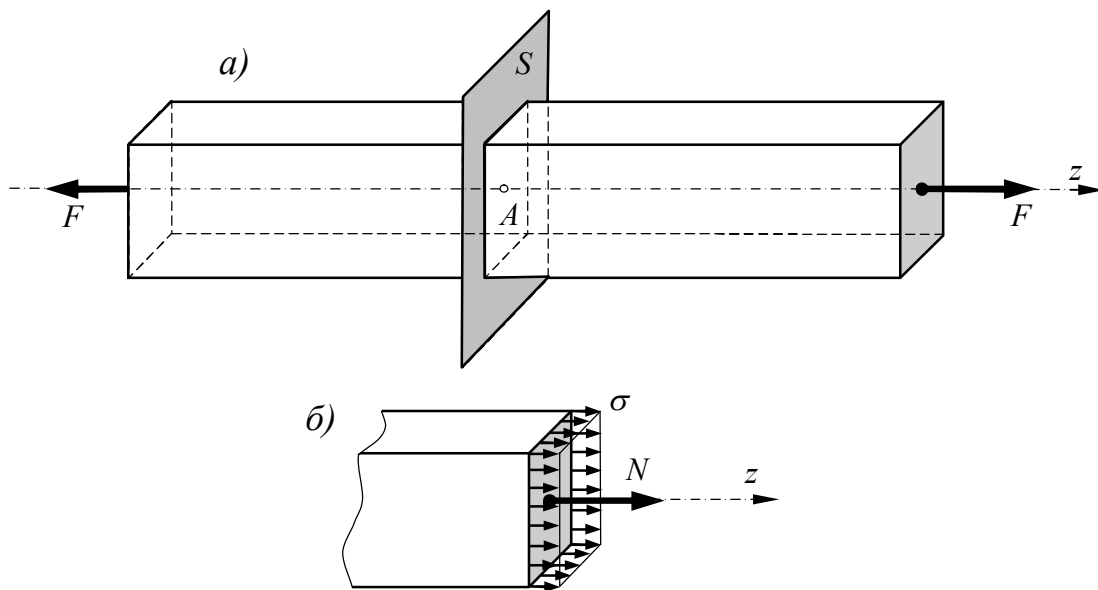


Рисунок 1 – Определение продольных сил и нормальных напряжений

Правило знаков. Продольную силу N принято считать положительной при растяжении, когда она направлена от сечения. При сжатии, наоборот, продольная сила отрицательна и направлена к сечению.

Эюра продольных сил представляет собой график, который дает наглядное представление о законе изменения этих сил в пределах каждого

грузового участка стержня. По построенной эпюре можно установить положение опасных сечений стержня.

Грузовой участок стержня – это участок, в пределах которого продольная сила изменяется по одному определенному закону. Границами грузовых участков стержня являются точки приложения внешних сил, точки, ограничивающие участки приложения равномерно распределенных нагрузок, действующих вдоль оси стержня, а также точки, где возникают опорные реакции.

Нормальные напряжения. При центральном растяжении или сжатии в поперечных сечениях стержня возникают равномерно распределенные нормальные напряжения (рис. 1, б), равные отношению продольной силы N к площади поперечного сечения

$$\sigma = \frac{N}{A} = \left[\frac{H}{M^2} \right] = [Па]. \quad (1.1)$$

Эпюра напряжений для стержней постоянного сечения аналогична эпюре продольных сил, а при ступенчатом изменении площади сечения стержней эпюра напряжений имеет скачки не только в местах приложения внешних сил, но и в местах изменения сечения. Это связано с тем, что напряжение обратно пропорционально площади сечения.

Границами участков при построении эпюры напряжений для стержня переменного сечения являются не только места приложения внешних сил, но и места ступенчатого изменения площади сечения.

Оценка прочности элементов конструкции, испытывающих растяжение или сжатие, производится по наибольшему нормальному напряжению. Условие прочности, которое требуется для нормальной эксплуатации конструкции, записывается в виде:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{N}{A} \leq R, \quad (1.2)$$

где R – расчетное сопротивление материала (задается в расчетных нормах или в справочниках).

Расчетные сопротивления R связаны с величиной нормативного сопротивления R_n . Оно определяется путем статистической обработки результатов множества натурных наблюдений за изменчивостью прочности соответствующих образцов. Обеспеченность значений нормативных сопротивлений материалов должна составлять не менее 0,95, т.е. чтобы не менее чем в 95 % случаев материал имел прочность, равную или большую, чем R_n . Величина расчетных напряжений определяют путем деления нормативных сопротивлений R_n на коэффициент надежности по материалу $\gamma_m > 1,0$.

$$R = R_n / \gamma_m. \quad (1.3)$$

Коэффициент надежности по материалу γ_m учитывает возможные отклонения сопротивлений материалов в неблагоприятную сторону. Численные значения этого коэффициента устанавливаются нормами в зависимости от свойств материалов и статистической изменчивости этих свойств.

Различают нормативное сопротивление по пределу текучести и временному сопротивлению. Первое используют при расчетах конструкций, выполненных из пластичных материалов, для которых опасные напряжения соответствуют пределу текучести σ_y . Нормативное сопротивление по временному сопротивлению применяют в расчетах конструкций, изготовленных из хрупких материалов, для которых опасные напряжения соответствуют пределу прочности σ_u .

Деформации и перемещения. Напряжения, не превосходящие предела пропорциональности σ_{pr} , связаны с относительными деформациями законом Гука

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (1.4)$$

где $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ – относительная деформация (безразмерная величина);

Δl – абсолютная продольная деформация (удлинение или укорочение участка бруса длиной l с постоянными напряжениями в поперечных сечениях), м;

E – модуль упругости первого рода (модуль Юнга), Па.

Под действием продольных сил происходит удлинение или укорочение грузовых участков стержня, что приводит к изменению длины всего стержня. Если на грузовом участке продольная сила и площадь поперечного сечения постоянны, то

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l}, \quad (1.5)$$

где l – длина стержня до деформации, м;

l_1 – то же, после деформации, м.

Подставляя выражения для ε и σ в уравнение (1.4), можно получить формулу для определения абсолютного удлинения стержня.

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (1.6)$$

В случае, когда величина силы N изменяется в пределах силового участка по известному закону, деформация участка складывается из деформаций бесконечно малых участков dz , по длине которых величину силы N можно считать постоянной. Тогда, используя выражение (1.6), можно записать

$$\Delta dz = \frac{N(z)dz}{EA}. \quad (1.7)$$

Полная деформация участка

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dz = \int_0^l \frac{N(z)dz}{EA}. \quad (1.8)$$

Если на участке с постоянным поперечным сечением действует равномерно распределенная продольная погонная нагрузка q_z , то усилие $N(z)$ от этой нагрузки будет изменяться по закону

$$N(z) = q_z z. \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.8), получим

$$\Delta l_q = \int_0^l \frac{q_z z dz}{EA} = \frac{q_z}{EA} \int_0^l z dz = \frac{q_z l^2}{2EA} = \frac{Tl}{2EA}, \quad (1.10)$$

где $T = q_z l$ – равнодействующая равномерно распределенной.

Для стержня, имеющего несколько силовых участков, абсолютное изменение длины стержня определяется как алгебраическая сумма деформаций отдельных силовых участков:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \dots + \Delta l_n, \quad (1.11)$$

где $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ – абсолютные деформации соответствующих, определяемые по формуле (1.8) или (1.10).

Перемещение поперечных сечений стержня вдоль его оси z обозначается буквой w и является следствием деформации отдельных грузовых участков. Если известно перемещение w_1 сечения в начале участка, длиной l , то перемещение сечения w_2 в конце участка, где действует нормальная сила N и приложена равномерно распределенная нагрузка, может быть вычислено по формуле

$$w_2 = w_1 \pm \frac{Nl}{EA} \pm \frac{Tl}{2EA}. \quad (1.12)$$

Знаки у слагаемых определяются в соответствии с выбранным положительным направлением оси z и направлением действия сил.

Отсюда следует, что перемещение поперечных сечений стержня может происходить и на участках не подверженных деформации, как результат влияния деформации соседних силовых участков. Это основное отличительное свойство перемещения от деформации. Определение перемещений по формуле (1.12) начинают от неподвижного конца стержня, т.е. от опорных устройств.

2 Расчёт на прочность статически определимого ступенчатого стержня

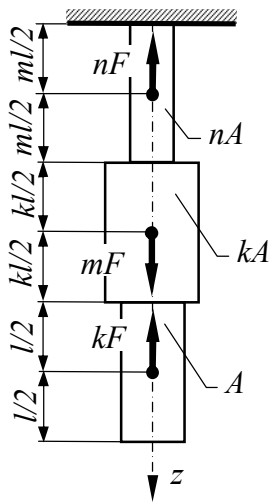


Рисунок 2 – Расчетная схема статически определимого стержня

Исходные данные и условие задачи

Для заданного ступенчатого статически определимого стержня требуется:

- Построить эпюру продольных сил;
- Записать в общем виде выражения для нормальных напряжений на каждом грузовом участке и из условия прочности при одноосном растяжении или сжатии подобрать необходимую площадь поперечного сечения;
- Построить эпюру распределения нормальных напряжений по длине стержня;
- Построить эпюру перемещений.

Для решения задачи использовать следующие исходные данные: материал стержня

– медь с расчетным сопротивлением на растяжение и сжатие $R = 75 \text{ МПа}$ и модулем упругости $E = 1,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ (приложение А); $m = 1,8$; $k = 1,5$; $n = 1,1$; $l = 0,6 \text{ м}$; $F = 200 \text{ кН}$.

Решение задачи

Рассматриваемый стержень состоит из шести грузовых участков, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы и места изменения размеров поперечного сечения. Проводя произвольные сечения в пределах каждого участка стержня и рассматривая его нижнюю часть (отбрасывая часть с заделкой), находим продольные силы на каждом участке стержня, одновременно строя эпюру продольных сил N (рис. 3). По построенной эпюре N можно определить продольную силу, которая возникает в заделке стержня. Ее величина равна 160 кН.

Для определения опасного сечения записываем в общем виде выражения для нормальных напряжений на каждом участке стержня:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 0; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-300}{A}; \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-300}{1,5A} = \frac{-200}{A};$$

$$\sigma_4 = \frac{40}{A}; \quad \sigma_5 = \frac{54,55}{A}; \quad \sigma_6 = \frac{-145,45}{A}.$$

Из полученных выражений следует, что максимальное по модулю нормальное напряжение возникает на втором грузовом участке. Записываем условие прочности для опасного участка при одноосном сжатии:

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_2| = \frac{300}{A} \leq R = 75 \text{ МПа},$$

отсюда

$$A = \frac{300}{75} = \frac{300 \cdot 10^3}{75 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 40 \text{ см}^2.$$

Используя заданные соотношения, можно определить площади поперечного сечения для каждого грузового участка стержня.

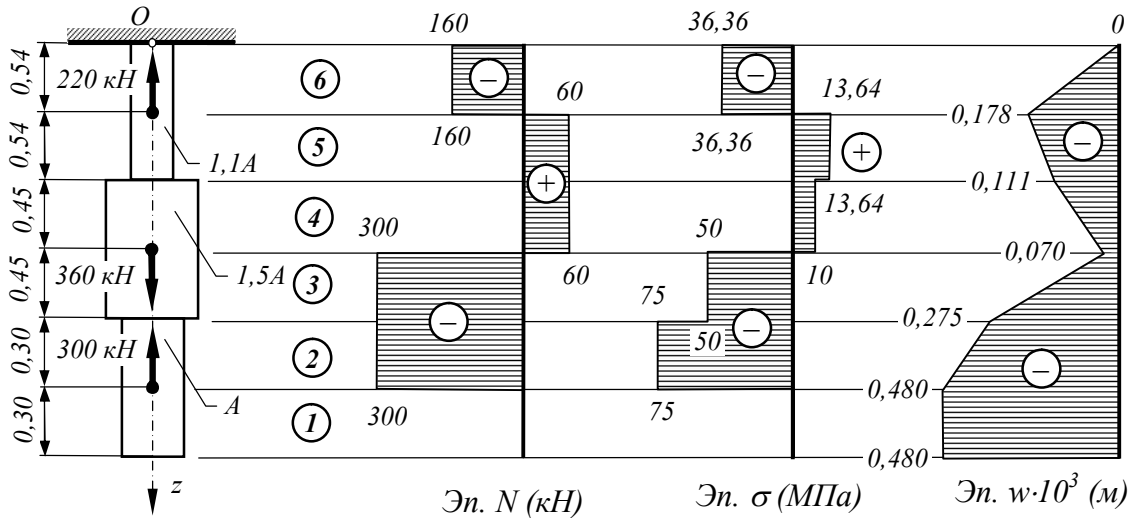


Рисунок 3 – К расчету статически определимого стержня

Далее выполняем построение эпюры распределения нормальных напряжений по длине стержня. Воспользовавшись ранее записанными выражениями, вычисляем:

$$\sigma_1 = 0; \sigma_2 = \frac{-300}{A} = \frac{-300}{4 \cdot 10^{-3}} = -75 \text{ МПа}; \sigma_3 = \frac{-200}{4 \cdot 10^{-3}} = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{40}{A} = \frac{40 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = 10 \text{ МПа}; \sigma_5 = \frac{54,55}{A} = \frac{54,55 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = 13,64 \text{ МПа};$$

$$\sigma_6 = \frac{-145,45}{A} = \frac{-145,45 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = -36,36 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру распределения нормальных напряжений по длине стержня (рис. 3).

Для построения эпюры относительных перемещений используем закон Гука для абсолютных удлинений.

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \sigma \frac{l}{E}.$$

Эпюру перемещений следует строить, начиная от точки, где эти перемещения известны. В рассматриваемом примере такой точкой является точка O, расположенная в заземлении стержня. Вертикальное перемещение сечения в этой точке равно нулю. Далее находим удлинения грузовых участков.

$$\Delta l_1 = 0; \quad \Delta l_2 = \sigma_2 \frac{l_2}{E} = \frac{-75 \cdot 10^6 \cdot 0,30}{1,1 \cdot 10^{11}} = -0,205 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \sigma_3 \frac{l_3}{E} = \frac{-50 \cdot 10^6 \cdot 0,45}{1,1 \cdot 10^{11}} = -0,205 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = \sigma_4 \frac{l_4}{E} = \frac{10 \cdot 10^6 \cdot 0,45}{1,1 \cdot 10^{11}} = 0,041 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,041 \text{ мм};$$

$$\Delta l_5 = \sigma_5 \frac{l_5}{E} = \frac{13,64 \cdot 10^6 \cdot 0,54}{1,1 \cdot 10^{11}} = 0,067 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,067 \text{ мм};$$

$$\Delta l_6 = \sigma_6 \frac{l_6}{E} = \frac{-36,36 \cdot 10^6 \cdot 0,54}{1,1 \cdot 10^{11}} = -0,178 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,178 \text{ мм}.$$

Ординаты эпюры перемещений границ участков будут:

$$w_0 = 0;$$

$$w_6 = w_0 + \Delta l_6 = 0 - 0,178 = -0,178 \text{ мм};$$

$$w_5 = w_6 + \Delta l_5 = -0,178 + 0,067 = -0,111 \text{ мм};$$

$$w_4 = w_5 + \Delta l_4 = -0,111 + 0,041 = -0,070 \text{ мм};$$

$$w_3 = w_4 + \Delta l_3 = -0,070 - 0,205 = -0,275 \text{ мм};$$

$$w_2 = w_3 + \Delta l_2 = -0,275 - 0,205 = -0,480 \text{ мм};$$

$$w_1 = w_2 + \Delta l_1 = -0,480 + 0 = -0,480 \text{ мм}.$$

По полученным значениям перемещений поперечных сечений строим эпюру w (рис. 3).

3 Расчёт на прочность статически определимого ступенчатого стержня

Воспользуемся исходными данными предыдущей задачи. К нижнему сечению ступенчатого стержня подведем дополнительную заделку. В результате стержень становится однажды статически неопределимым (рис. 4). Так как задача является статически неопределимой, то для вычисления опорных реакций необходимо рассмотреть три стороны задачи: статическую, геометрическую, физическую.

Решение задачи

Статическая сторона задачи

Запишем уравнение равновесия для заданного стержня OB (рис. 4).

$$\sum y = 0; \quad V_0 + V_B - 220 + 360 - 300 = 0; \quad V_0 + V_B = 160 \text{ кН}.$$

Геометрическая сторона задачи

Запишем условие совместности деформаций. Оно основано на очевидном факте, что расстояние между точками O и B рассматриваемого стержня не изменяется, т.е. $\Delta l_{OB} = 0$.

$$\Delta l_{OB} = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 + \Delta l_5 + \Delta l_6 = 0.$$

Физическая сторона задачи

Предварительно запишем в общем виде выражения для продольных усилий, действующих в пределах каждого грузового участка заданного стержня.

$$\begin{aligned} N_1 &= V_B \text{ кН}; \quad N_2 = V_B - 300 \text{ кН}; \quad N_3 = V_B - 300 \text{ кН}; \\ N_4 &= V_B - 300 + 360 = V_B + 60 \text{ кН}; \quad N_5 = V_B - 300 + 360 = V_B + 60 \text{ кН}; \\ N_6 &= V_B - 300 + 360 - 220 = V_B - 160 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись законом Гука в форме (1.6), определим удлинения отдельных грузовых участков:

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{V_B \cdot 0,30}{EA}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{(V_B - 300) \cdot 0,30}{EA}; \\ \Delta l_3 &= \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{(V_B - 300) \cdot 0,45}{E \cdot 1,5A}; \quad \Delta l_4 = \frac{N_4 l_4}{EA_4} = \frac{(V_B + 60) \cdot 0,45}{E \cdot 1,5A}; \\ \Delta l_5 &= \frac{N_5 l_5}{EA_5} = \frac{(V_B + 60) \cdot 0,54}{E \cdot 1,1A}; \quad \Delta l_6 = \frac{N_6 l_6}{EA_6} = \frac{(V_B - 160) \cdot 0,54}{E \cdot 1,1A}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в ранее записанное уравнение совместности деформаций, получим:

$$\begin{aligned} \Delta l_{OB} &= \frac{V_B \cdot 0,30}{EA} + \frac{(V_B - 300) \cdot 0,3}{EA} + \frac{(V_B - 300) \cdot 0,45}{E \cdot 1,5A} + \frac{(V_B + 60) \cdot 0,45}{E \cdot 1,5A} + \\ &+ \frac{(V_B + 60) \cdot 0,54}{E \cdot 1,1A} + \frac{(V_B - 160) \cdot 0,54}{E \cdot 1,1A} = 0; \\ 2,182 \cdot V_B &= 211,196; \\ V_B &= \frac{211,196}{2,182} = 96,79 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Тогда из уравнения статической стороны задачи следует

$$V_O = 160 - V_B = 160 - 96,79 = 63,21 \text{ кН}.$$

Обе опорные реакции получились положительными, следовательно, их направления, показанные на рисунке 4, соответствуют загрузению стержня.

Воспользовавшись ранее записанными выражениями для продольных усилий и численными значениями опорных реакций, строим эпюру продольных сил N (рис. 4).

Для определения опасного сечения находим нормальные напряжения на каждом участке стержня:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{96,79}{A}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-203,21}{A}; \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-135,47}{A};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{104,53}{A}; \quad \sigma_5 = \frac{N_5}{A_5} = \frac{142,54}{A}; \quad \sigma_6 = \frac{N_6}{A_6} = \frac{-57,46}{A}.$$

Из полученных выражений следует, что максимальное по модулю нормальное напряжение возникает на втором грузовом участке. Записываем условие прочности для опасного участка при одноосном сжатии:

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_2| = \frac{203,21}{A} \leq R = 75 \text{ МПа},$$

отсюда

$$A = \frac{203,21 \cdot 10^3}{75 \cdot 10^6} = 2,71 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 27,1 \text{ см}^2.$$

Далее выполняем построение эпюры нормальных напряжений σ . Воспользовавшись ранее записанными выражениями, вычисляем:

$$\sigma_1 = \frac{96,79}{A} = \frac{96,79 \cdot 10^3}{27,1 \cdot 10^{-3}} = 35,76 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{-203,21}{A} = \frac{-203,21 \cdot 10^3}{27,1 \cdot 10^{-3}} = -75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{-135,47}{A} = \frac{-135,47 \cdot 10^3}{27,1 \cdot 10^{-3}} = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{104,53}{A} = \frac{104,53 \cdot 10^3}{27,1 \cdot 10^{-3}} = 38,57 \text{ МПа};$$

$$\sigma_5 = \frac{142,54}{A} = \frac{142,54 \cdot 10^3}{27,1 \cdot 10^{-3}} = 52,60 \text{ МПа};$$

$$\sigma_6 = \frac{-57,46}{A} = \frac{-57,46 \cdot 10^3}{27,1 \cdot 10^{-3}} = -21,20 \text{ МПа}.$$

Эпюра распределения нормальных напряжений по длине ступенчатого стержня показана на рисунке 4.

Для построения эпюры перемещений находим удлинения грузовых участков.

$$\Delta l_1 = \sigma_1 \frac{l_1}{E} = \frac{35,76 \cdot 10^6 \cdot 0,30}{1,1 \cdot 10^{11}} = 0,098 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,098 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \sigma_2 \frac{l_2}{E} = \frac{-75 \cdot 10^6 \cdot 0,30}{1,1 \cdot 10^{11}} = -0,205 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \sigma_3 \frac{l_3}{E} = \frac{-50 \cdot 10^6 \cdot 0,45}{1,1 \cdot 10^{11}} = -0,205 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = \sigma_4 \frac{l_4}{E} = \frac{38,57 \cdot 10^6 \cdot 0,45}{1,1 \cdot 10^{11}} = 0,158 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,158 \text{ мм};$$

$$\Delta l_5 = \sigma_5 \frac{l_5}{E} = \frac{52,60 \cdot 10^6 \cdot 0,54}{1,1 \cdot 10^{11}} = 0,258 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,258 \text{ мм};$$

$$\Delta l_6 = \sigma_6 \frac{l_6}{E} = \frac{-21,20 \cdot 10^6 \cdot 0,54}{1,1 \cdot 10^{11}} = -0,104 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,104 \text{ мм}.$$

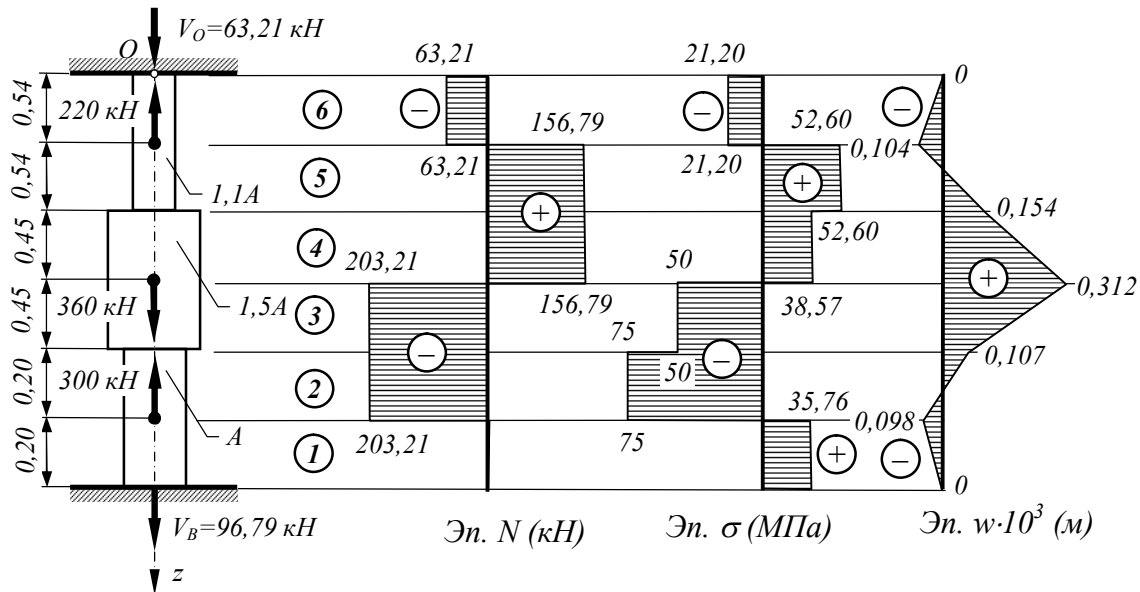


Рисунок 4 – К расчету статически неопределимого стержня

Вычисляем ординаты эпюры перемещений границ грузовых:

$$w_0 = 0;$$

$$w_6 = w_0 + \Delta l_6 = 0 - 0,104 = -0,104 \text{ мм};$$

$$w_5 = w_6 + \Delta l_5 = -0,104 + 0,258 = 0,154 \text{ мм};$$

$$w_4 = w_5 + \Delta l_4 = 0,154 + 0,158 = 0,312 \text{ мм};$$

$$w_3 = w_4 + \Delta l_3 = 0,312 - 0,205 = 0,107 \text{ мм};$$

$$w_2 = w_3 + \Delta l_2 = 0,107 - 0,205 = -0,098 \text{ мм};$$

$$w_1 = w_2 + \Delta l_1 = -0,098 + 0,098 = 0.$$

Таким образом, полное удлинение статически неопределимого ступенчатого стержня равно нулю, что свидетельствует о правильности выполненного расчета. По полученным значениям строим эпюру перемещений w (рис. 4).

Сравнивая эпюры, построенные для статически определимого (рис. 3) и статически неопределимого (рис. 4) стержней можно сделать следующие выводы:

- а) произошло перераспределение продольных усилий и нормальных напряжений по длине стержня. Участок 1, не работавший в статически определимом стержне, стал работать на растяжение в статически неопределимом стержне;
- б) напряжения в поперечных сечениях всех участков статически неопределимого стержня оказались меньше чем в статически опре-

делимом, следовательно его несущая способность становится выше;

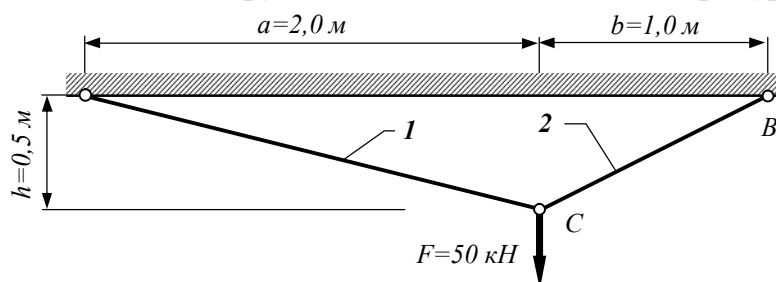
- в) уменьшилась площадь поперечного сечения участков статически неопределимого стержня, следовательно, применение такой конструкции экономически выгодно с точки зрения расхода материала;
- г) в соответствии с изменениями напряжений изменился характер распределения деформаций грузовых участков стержня и осевых перемещений его поперечных сечений;

4 Расчёт на прочность статически определимой стержневой системы

Исходные данные и условие задачи

Для заданной статически определимой стержневой системы, показанной на рисунке 5, требуется:

- определить площади поперечных сечений стержня из расчёта на прочность по предельному состоянию;
- вычислить удлинения стержней, вызванные действием внешней силы F . Определить удлинения, вызванные заданным изменением температуры Δt ;
- определить перемещение точки C , вызванное совместным действием внешней нагрузки F и изменением температуры Δt .



В расчете принять:

$$F = 50 \text{ кН};$$

$$a = 2,0 \text{ м};$$

$$b = 1,0 \text{ м};$$

$$h = 0,5 \text{ м};$$

$$R = 160 \text{ МПа};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\Delta t = -50^\circ$$

$$\lambda = 2 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}.$$

Рисунок 5 – Статически определимая стержневая система

Решение задачи

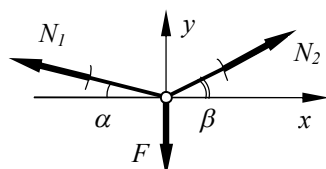


Рисунок 6 – Вырезанный узел стержневой системы

Для определения продольных сил N_1 и N_2 , возникающих в стержнях системы, воспользуемся методом сечений (рис. 6). Отсечём шарнир C от стержневой системы и рассмотрим его равновесие. Будем полагать продольные силы N_1 и N_2 положительными, т.е. растягивающими стержни.

$$\alpha = \arctg \frac{h}{a} = \arctg \frac{0,5}{2} = 14,04^\circ; \quad \beta = \arctg \frac{h}{b} = \arctg \frac{0,5}{1} = 26,56^\circ.$$

$$\sum X = 0 = -N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \beta; \quad \sum Y = 0 = N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \beta - F.$$

В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -N_1 \cdot 0,9701 + N_2 \cdot 0,8945 = 0; \\ N_1 \cdot 0,2426 + N_2 \cdot 0,4471 - 50 = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем: $N_1 = 59,26 \text{ кН}$; $N_2 = 79,76 \text{ кН}$.

Положительные значения, полученные для N_1 и N_2 , показывают, что направления N_1 и N_2 соответствуют действительности и направлены так, как показано на рисунке 6.

Определим площади поперечных сечений стержней из расчёта на прочность по предельным состояниям:

$$A_1 = \frac{|N_1|}{R} = \frac{59,26 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 3,70 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$A_2 = \frac{|N_2|}{R} = \frac{79,67 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 4,98 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Далее вычисляем удлинения стержней. Воспользовавшись законом Гука находим удлинения, вызванные продольными силами N_1 и N_2 :

$$\Delta l_1(N_1) = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{N_1 \cdot a}{EA_1 \cdot \cos \alpha} = \frac{59,26 \cdot 10^3 \cdot 2,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,70 \cdot 10^{-4} \cdot 0,9701} = 1,65 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta l_2(N_2) = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{N_2 \cdot b}{EA_2 \cdot \cos \beta} = \frac{79,67 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 4,98 \cdot 10^{-4} \cdot 0,8945} = 0,894 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Удлинения стержней, вызванные изменением температуры, находим по формулам, известным из курса физики:

$$\Delta l_1(t) = \lambda l_1 \Delta t = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{2,0}{0,9701} \cdot (-50) = -2,06 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta l_2(t) = \lambda l_2 \Delta t = 2 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1,0}{0,8945} \cdot (-50) = -1,12 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Отрицательные значения удлинений соответствуют уменьшению длины стержней заданной системы.

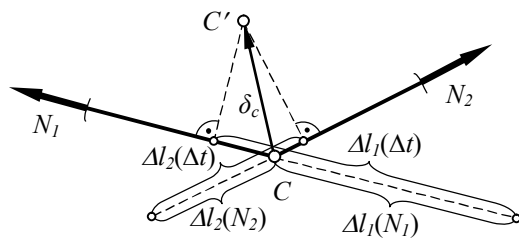


Рисунок 7 – Определение перемещения узла C

Графически определяем перемещение узла C. Для построения перемещений и удлинений примем масштаб 20:1. Откладываем полученные значения удлинений стержней с учетом знаков вдоль их осей в недеформированном состоянии (рис. 7). В результате находим новое положение концов стержней 1 и 2. Из этих точек восстанавливаем перпендикуляры к осям наклонных стержней. Точка пересечения указанных перпендикуляров C' соответствует новому положению шарнира C. Длина вектора CC' является искомой

величиной перемещения δ_C . Воспользовавшись масштабом чертежа получаем $\delta_C = 0,91$ мм.

5 Расчёт на прочность статически неопределимой стержневой системы

Исходные данные и условие задачи

На рисунке 8 изображена статически неопределимая стержневая система, которая состоит из двух алюминиевых стержней и абсолютно жесткой балки, которая не деформируется в результате внешних воздействий. Для дальнейшего расчета принять:

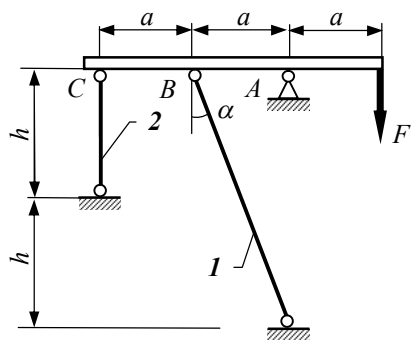


Рисунок 8 – Заданная система

$$\begin{aligned}
 h &= 4,0 \text{ м}; \\
 a &= 3,0 \text{ м}; \\
 F &= 200 \text{ кН}; \\
 A_1/A_2 &= 1/2; \\
 E &= 0,69 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \\
 R &= 55 \text{ МПа}; \\
 \alpha_i &= 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ град}^{-1}; \\
 \Delta t &= 80^\circ; \\
 \delta_1 &= 0,15 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

По условию задачи требуется:

- определить величину продольных усилий от действия заданной внешней нагрузки F ;
- по полученным значениям подобрать площади поперечных сечений стержней из расчёта на прочность по предельному состоянию;
- вычислить напряжения и удлинения стержней от действия внешней нагрузки;
- используя найденные площади поперечных сечений стержней, найти напряжения и удлинения стержней от заданного перепада температур Δt ;
- найти напряжения и удлинения стержней, вызванных заданной неточностью изготовления одного из элементов стержневой системы δ ;
- определить величину продольных усилий, напряжений и перемещений возникающих в стержнях стержневой системы при одновременном действии внешней силы, перепада температуры и неточности изготовления.

Определяем продольные усилия, возникающие в элементах заданной системы от действия внешней силы F . Отрезаем жесткую балку от стержней, заменяя их действие неизвестными силами $N_1(F)$ и $N_2(F)$ (рис. 9). Помимо этих сил на систему действуют две опорные реакции, возникающие в шарнирно неподвижной опоре A . Таким образом число неизвестных усилий равно четырем. Для плоской задачи можно составить только три уравнения. Следовательно, рассматриваемая задача является однажды статически неопределимой. Для раскрытия статической неопределимости

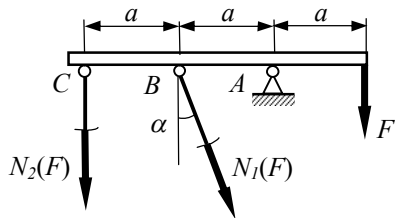


Рисунок 9 – Статическая сторона задачи

системы рассмотрим три стороны задачи: статическую, геометрическую и физическую.

Статическая сторона задачи

Так как нас интересуют усилия в стержнях $N_1(F)$ и $N_2(F)$, то из трех возможных уравнений равновесия статики воспользуемся только одним, а именно. Выбор этого уравнения объясняется тем, что в него не будут входить опорные реакции шарнирно неподвижной опоры. В результате получаем:

$$\sum m_A = 0; \quad N_2(F) \cdot 2a + N_1(F) \cdot a \cdot \cos \alpha - F \cdot a = 0.$$

Геометрическая сторона задачи

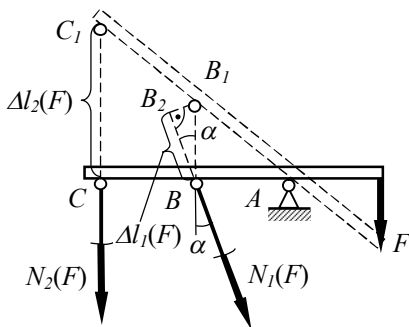


Рисунок 10 – Геометрическая сторона задачи

Под действием внешней силы жесткая балка повернется вокруг неподвижной точки A (рис. 10). При этом стержень 1 удлинится на величину $BB_1 = \Delta l_1(F)$, а стержень 2 удлинится на величину $CC_1 = \Delta l_2(F)$. Как следует из рисунка треугольники ABB_1 и ACC_1 подобны, следовательно

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}.$$

Из прямоугольного треугольника BB_1B_2 получаем

$$BB_1 = \frac{\Delta l_1(F)}{\cos \alpha}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta l_1(F)}{\cos \alpha \cdot \Delta l_2(F)} = \frac{a}{2a} \quad \text{или} \quad \Delta l_1(F) = \frac{1}{2} \Delta l_2(F) \cos \alpha.$$

Полученное уравнение представляет собой условие совместности деформаций заданной системы.

Далее вычисляем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2h} = \frac{3}{8} = 0,375; \quad \alpha = 20,56^\circ; \quad \sin \alpha = 0,3511; \quad \cos \alpha = 0,9363.$$

Длины стержней

$$l_1 = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{3,0}{0,3511} = 8,54 \text{ м}; \quad l_2 = h = 4,0 \text{ м}.$$

Физическая сторона задачи

Удлинения стержней 1 и 2 вызваны продольными усилиями $N_1(F)$ и $N_2(F)$, действующими в этих элементах. На основании закона Гука получаем:

$$\Delta l_1(F) = \frac{N_1(F)l_1}{EA_1} = \frac{3N_1(F)}{EA_1 \sin \alpha},$$

$$\Delta l_2(F) = \frac{N_2(F)l_2}{EA_2} = \frac{2N_2(F)h}{EA_1}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение совместности деформаций, получаем

$$\frac{3N_1(F)}{EA_1 \sin \alpha} = \frac{1}{2} \frac{2N_2(F) \cdot h}{EA_1} \cos \alpha,$$

$$N_1(F) = 0,438N_2(F).$$

Используя это соотношение, из уравнения статики имеем:

$$N_2(F) \cdot 2 \cdot 3,0 + 0,438N_2(F) \cdot 3,0 \cdot 0,9363 - 200 \cdot 3,0 = 0;$$

$$N_2(F) = 600/7,23 = 82,98 \text{ кН}.$$

$$N_1(F) = 0,438 \cdot 82,98 = 36,35 \text{ кН}.$$

Определяем нормальные напряжения в стержнях:

$$\sigma_1(F) = \frac{N_1(F)}{A_1} = \frac{36,35}{A_1};$$

$$\sigma_2(F) = \frac{N_2(F)}{A_2} = \frac{82,98}{A_1/2} = \frac{165,97}{A_1}.$$

Из условий прочности для второго стержня, определяем требуемую площадь поперечного сечения:

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_2| = \frac{165,97}{A_1} \leq R = 55 \text{ МПа},$$

отсюда

$$A_1 = \frac{165,97 \cdot 10^3}{55 \cdot 10^6} = 3,02 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 30,2 \text{ см}^2.$$

Находим численные значения напряжений и удлинений в стержнях системы от действия внешней нагрузки:

$$\sigma_1(F) = \frac{N_1(F)}{A_1} = \frac{36,35 \cdot 10^3}{3,02 \cdot 10^{-3}} = 12,04 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2(F) = \frac{N_2(F)}{A_2} = \frac{165,97 \cdot 10^3}{3,02 \cdot 10^{-3}} = 54,96 \text{ МПа};$$

$$\Delta l_1(F) = \sigma_1(F) \frac{l_1}{E} = 12,04 \cdot 10^6 \cdot \frac{8,54}{0,69 \cdot 10^{11}} = 1,490 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,490 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2(F) = \sigma_2(F) \frac{l_2}{E} = 54,96 \cdot 10^6 \cdot \frac{4,0}{0,69 \cdot 10^{11}} = 3,190 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 3,190 \text{ мм}.$$

Далее определяет усилия, напряжения и удлинения в стержнях заданной системы от действия температуры. От перепада температур в стержнях системы возникают дополнительные усилия $N_1(t)$ и $N_2(t)$. Если стержни не соединены в единую системы, то они получают следующие температурные удлинения

$$\Delta l_{1t} = \alpha_l l_1 \Delta t = 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 8,54 \cdot 80 = 17,089 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta l_{2t} = \alpha_l l_2 \Delta t = 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 4,0 \cdot 80 = 8,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

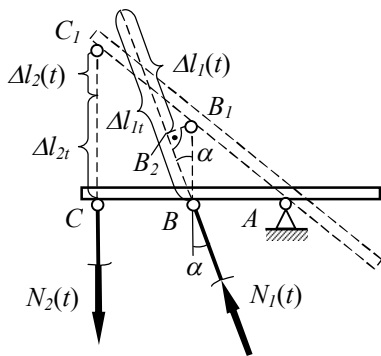


Рисунок 11 – Расчет системы на действие температуры

растянуть на величину $\Delta l_2(t)$. В соответствии с этим на расчетной схеме показываем направления усилий, возникающих в стержнях от температурных воздействий.

Для определения температурных усилий $N_1(t)$ и $N_2(t)$ рассмотрим равновесие абсолютно жесткой балки. Для раскрытия статической неопределенности рассмотрим три стороны задачи.

Статическая сторона задачи

$$\sum m_A = 0; \quad N_2(t) \cdot 2a - N_1(t) \cdot \cos \alpha \cdot a = 0.$$

$$N_2(t) = N_1(t) \cdot \cos \alpha / 2 = N_1(t) \cdot 0,9363 / 2 = 0,468 \cdot N_1(t).$$

Геометрическая сторона задачи

Из подобия треугольников ABB_1 и ACC_1 (рис. 11) следует, что

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}.$$

$$CC_1 = \Delta l_2(t) + \Delta l_{2t}; \quad BB_1 = \frac{BB_2}{\cos \alpha} = \frac{\Delta l_{1t} - \Delta l_1(t)}{\cos \alpha}.$$

$$\frac{\Delta l_{1t} - \Delta l_1(t)}{\cos \alpha (\Delta l_{2t} + \Delta l_2(t))} = \frac{a}{2a};$$

$$2(\Delta l_{1t} - \Delta l_1(t)) = \cos \alpha (\Delta l_{2t} + \Delta l_2(t)).$$

Полученное выражение является уравнением совместности деформаций стержневой системы.

Физическая сторона задачи

Удлинения стержней 1 и 2, вызванные усилиями $N_1(t)$ и $N_2(t)$, определяем на основании закона Гука.

$$\Delta l_1(t) = \frac{N_1(t)l_1}{EA_1}; \quad \Delta l_2(t) = \frac{N_2(t)l_2}{EA_2}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение совместности деформаций, имеем:

$$2\left(\alpha l_1 \Delta t - \frac{N_1(t)l_1}{EA_1}\right) = \left(\alpha l_2 \Delta t + \frac{N_2(t)l_2}{EA_2}\right) \cos \alpha;$$

$$2\left(2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 8,54 \cdot 80 - \frac{N_1(t) \cdot 8,54}{0,69 \cdot 10^{11} \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}}\right) =$$

$$= \left(2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 4,0 \cdot 80 + \frac{N_2(t) \cdot 4,0}{0,69 \cdot 10^{11} \cdot 0,5 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot 0,9363;$$

$$8,1897 \cdot 10^{-8} N_1(t) + 3,839 \cdot 10^{-8} N_2(t) = 2666,96 \cdot 10^{-5}.$$

Используя соотношения, полученные из статического уравнения равновесия, окончательно получаем

$$8,190 \cdot 10^{-8} N_1(t) + 3,839 \cdot 10^{-8} \cdot 0,468 \cdot N_1(t) = 2666,96 \cdot 10^{-5};$$

$$9,986 \cdot 10^{-8} N_1(t) = 2666,96 \cdot 10^{-5};$$

$$N_1(t) = \frac{2666,96 \cdot 10^{-5}}{9,986 \cdot 10^{-8}} = 267,089 \cdot 10^3 \text{ Н} = 267,089 \text{ кН.}$$

$$N_2(t) = 0,468 \cdot 267,089 = 124,983 \text{ кН.}$$

Так как продольные усилия получились со знаком «плюс», то их направления, показанные на рисунке 11, соответствуют действительности, т.е. $N_1(t) = -267,089$ кН – сжимающее, а $N_2(t) = 124,983$ кН – растягивающее усилие.

Далее вычисляем напряжения в стержнях 1 и 2 от действия температуры:

$$\sigma_1(t) = \frac{N_1(t)}{A_1} = \frac{-267,089 \cdot 10^3}{3,02 \cdot 10^{-3}} = -88,440 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2(t) = \frac{N_2(t)}{A_2} = \frac{124,983 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} = 82,770 \text{ МПа.}$$

Находим результирующие удлинения стержней, возникающие от заданного перепада температуры:

$$\begin{aligned} \Delta l_1^*(t) &= \Delta l_{1t} - \Delta l_1(t) = \\ &= 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 8,54 \cdot 80 - \frac{267,089 \cdot 10^3 \cdot 8,54}{0,69 \cdot 10^{11} \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} = 6,134 \cdot 10^{-3} \text{ м;} \\ \Delta l_2^*(t) &= \Delta l_{2t} + \Delta l_2(t) = \\ &= 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 4,0 \cdot 80 + \frac{124,983 \cdot 10^3 \cdot 4,0}{0,69 \cdot 10^{11} \cdot 0,5 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} = 12,798 \cdot 10^{-3} \text{ м.} \end{aligned}$$

Проверим, выполняется ли ранее полученное уравнение совместности деформаций:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \Delta l_1^*(t) &= \cos \alpha \cdot \Delta l_2^*(t); \\ 2 \cdot 6,134 &= 0,9363 \cdot 12,798; \\ 12,268 &\approx 11,982. \end{aligned}$$

Погрешность вычислений: $\delta = \frac{12,268 - 11,982}{12,268} \cdot 100 \% = 2,38 \% < 5 \%.$

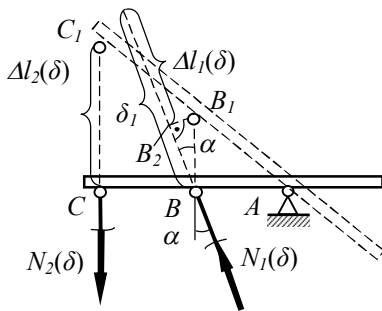


Рисунок 12 – Расчет системы на действие температуры

Определим усилия, напряжения и удлинения элементов заданной системы, вызванных неточностью изготовления стержня 1. Так как этот стержень изготовлен длиннее чем это необходимо по чертежу, то при сборке системы абсолютно жесткая балка AC займет новое положение AC₁ (рис. 12). При этом в стержне 1 возникнет сжимающее усилие N₁(δ), а в стержне 2 – растягивающее усилие N₂(δ).

Для раскрытия статической неопределимости системы снова рассматриваем три стороны задачи.

Статическая сторона задачи

$$\sum m_A = 0;$$

$$N_2(\delta) \cdot 2a - N_1(\delta) \cdot \cos \alpha \cdot a = 0.$$

$$\begin{aligned} N_2(\delta) &= N_1(\delta) \cdot \cos \alpha / 2 = \\ &= N_1(\delta) \cdot 0,9363 / 2 = 0,468 N_1(\delta). \end{aligned}$$

Геометрическая сторона задачи

Из подобия треугольников ABB₁ и ACC₁ следует

$$\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}.$$

$$BB_1 = \frac{BB_2}{\cos \alpha} = \frac{\delta_1 - \Delta l_1(\delta)}{\cos \alpha} \quad CC_1 = \Delta l_2(\delta),$$

тогда

$$\frac{\delta_1 - \Delta l_1(\delta)}{\Delta l_2(\delta) \cos \alpha} = \frac{a}{2a};$$

$$2(\delta_1 - \Delta l_1(\delta)) = \Delta l_2(\delta) \cos \alpha.$$

Это уравнение совместности деформаций элементов системы.

Физическая сторона задачи

Укорочение стержня 1 и удлинение стержня 2, вызванные усилиями $N_1(\delta)$ и $N_2(\delta)$, действующими в этих стержнях, на основании закона Гука равны:

$$\Delta l_1(\delta) = \frac{N_1(\delta) l_1}{EA_1}; \quad \Delta l_2(\delta) = \frac{N_2(\delta) l_2}{EA_2}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение совместности деформаций, имеем:

$$2 \left(\delta_1 - \frac{N_1(\delta) l_1}{EA_1} \right) = \frac{N_2(\delta) l_2}{EA_2} \cos \alpha.$$

$$2 \left(0,15 \cdot 10^{-2} - \frac{N_1(\delta) \cdot 8,54}{0,69 \cdot 10^{11} \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} \right) = \frac{N_2(\delta) \cdot 4,0}{0,69 \cdot 10^{11} \cdot 0,5 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,9363.$$

Используя соотношение, полученное из статической стороны задачи, получаем:

$$2 \left(0,15 \cdot 10^{-2} - \frac{N_1(\delta) \cdot 8,54}{0,69 \cdot 10^{11} \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} \right) = \frac{0,468 \cdot N_1(\delta) \cdot 4,0}{0,69 \cdot 10^{11} \cdot 0,5 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,9363;$$

$$0,30 \cdot 10^{-2} = 9,879 \cdot 10^{-8} N_1(\delta);$$

$$N_1(\delta) = \frac{0,30 \cdot 10^{-2}}{9,879 \cdot 10^{-8}} = 30,37 \cdot 10^6 \text{ Н} = 30,37 \text{ кН};$$

$$N_2(\delta) = 0,468 \cdot 30,37 = 14,21 \text{ кН}.$$

Находим нормальные напряжения в стержнях 1 и 2 от действия продольных усилий, вызванных неточностью изготовления первого стержня:

$$\sigma_1(\delta) = \frac{N_1(\delta)}{A_1} = -\frac{30,37 \cdot 10^6}{3,02 \cdot 10^{-3}} = -10,07 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2(\delta) = \frac{N_2(\delta)}{A_2} = \frac{14,21 \cdot 10^6}{0,5 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} = 9,41 \text{ МПа}.$$

Вычисляем удлинения стержней 1 и 2:

$$\Delta l_1^*(\delta) = \delta_1 - \Delta l_1(\delta) = 0,15 \cdot 10^{-2} - \frac{30,37 \cdot 10^3 \cdot 8,54}{0,69 \cdot 10^{11} \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta l_1^*(\delta) = \Delta l_2(\delta) = \frac{14,21 \cdot 10^3 \cdot 4,0}{0,69 \cdot 10^{11} \cdot 0,5 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,9363 = 0,52 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Проверим, выполняется ли уравнение совместности деформаций:

$$2 \cdot \Delta l_1^*(\delta) = \cos \alpha \cdot \Delta l_2^*(\delta);$$

$$2 \cdot 0,25 = 0,9363 \cdot 0,52;$$

$$0,50 \approx 0,487.$$

Погрешность вычислений: $\delta = \frac{0,50 - 0,487}{0,50} \cdot 100 \% = 2,62 \% < 5 \%.$

Для определения усилий, напряжений и перемещений стержней от совместного действия внешних сил, перепада температур и неточности изготовления одного из элементов системы воспользуемся принципом независимости действия сил.

Усилия в стержнях равны:

$$N_1 = N_1(F) + N_1(t) + N_1(\delta) = 36,35 - 270,089 - 30,37 = -264,109 \text{ кН};$$

$$N_2 = N_2(F) + N_2(t) + N_2(\delta) = 82,98 + 124,983 + 14,21 = 222,173 \text{ кН};$$

Проверка:

$$\sum m_A = 0; \quad N_2 \cdot 2a + N_1 \cdot a \cdot \cos \alpha - F \cdot a = 0;$$

$$222,173 \cdot 2 \cdot 3 - 264,109 \cdot 3 \cdot 0,9363 - 200 \cdot 3 = 0;$$

$$1333,038 - 1341,856 = 8,818 \text{ кНм}.$$

Погрешность вычислений: $\delta = \frac{1341,856 - 1333,038}{1341,856} \cdot 100 \% = 0,66 \% < 5 \%.$

Напряжения в стержнях равны:

$$\sigma_1 = \sigma_1(F) + \sigma_1(t) + \sigma_1(\delta) = 12,04 - 88,44 - 10,07 = -86,14 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(F) + \sigma_2(t) + \sigma_2(\delta) = 54,96 + 82,77 + 14,21 = 151,94 \text{ МПа}.$$

Перемещения в стержнях равны:

$$\Delta l_1 = \Delta l_1(F) + \Delta l_1^*(t) + \Delta l_1^*(\delta) = (1,490 + 6,134 + 0,25) \cdot 10^{-3} = 7,874 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_2(F) + \Delta l_2^*(t) + \Delta l_2^*(\delta) = (3,190 + 12,798 + 0,52) \cdot 10^{-3} = 16,508 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Выполняем геометрическую проверку. Вычисленные перемещения Δl_1 и Δl_2 должны удовлетворять условию совместности деформаций системы, т.е. должно соблюдаться равенство

$$2 \cdot \Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \cos \alpha;$$

$$2 \cdot 7,874 \cdot 10^{-3} = 16,508 \cdot 10^{-3} \cdot 0,9363;$$

$$15,748 \cdot 10^{-3} \approx 15,456 \cdot 10^{-3}.$$

Погрешность расчета $\frac{15,748 - 15,456}{15,748} \cdot 100 \% = 1,85 \% < 5 \%.$

6 Расчет статически неопределимой стержневой системы при многофакторном воздействии

Исходные данные и условие задачи

Для заданной статически неопределимой стержневой системы, изображенной на рисунке 13, требуется:

- Определить площади поперечных сечений заданных стержней из расчёта на прочность при совместном воздействии на стержневую систему заданной нагрузки, изменения температуры и заданной неточности изготовления стержней.

- Определить продольные силы и нормальные напряжения в сечениях стержней при многофакторном воздействии.

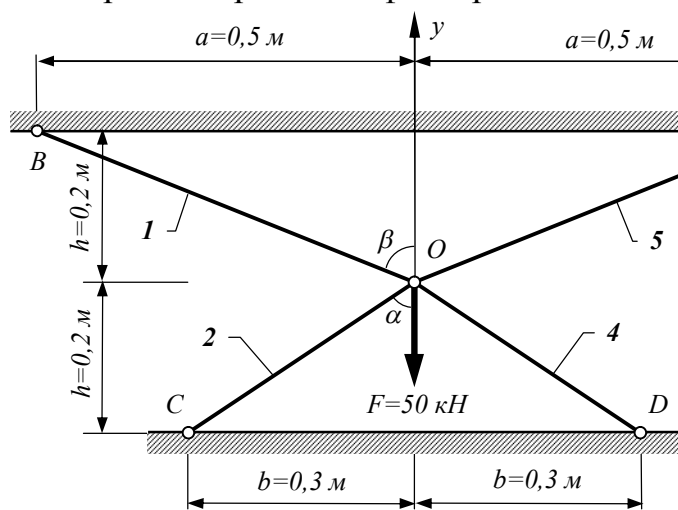


Рисунок 13 – Расчетная схема

Для расчета принять:

$$R = 160 \text{ МПа};$$

$$n = 1,5;$$

$$\lambda = 1,5 \times 10^{-5} \text{ град}^{-1};$$

$$\Delta t = -50^\circ;$$

$$\delta_1 = -0,1 \text{ см};$$

$$\delta_2 = 0,2 \text{ см};$$

$$A_1/A_2 = m_1 = 2;$$

$$A_1 = A_5; A_2 = A_4;$$

$$F = 50 \text{ кН};$$

$$a = 0,5 \text{ м};$$

$$h = 0,2 \text{ м};$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

Решение задачи

Статическая сторона задачи

Из симметрии системы относительно вертикальной оси следует, что $N_1 = N_5$ и $N_2 = N_4$, следовательно, имеются две неизвестных величины: N_1 и N_2 . Для нахождения этих величин необходимо рассмотреть равновесие отсечённого узла O (рис. 14). Для плоской системы сил N_1 , N_2 , N_4 , N_5 и F , сходящейся в одной точке, можно составить два независимых уравнения равновесия. Если же система симметрична относительно вертикальной оси

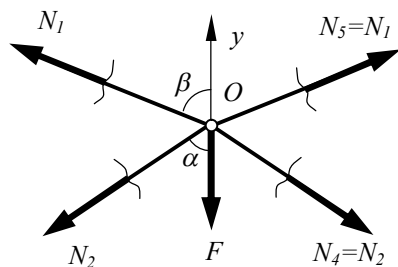


Рисунок 14 – Равновесие вырезанного узла

Оу, то остаётся одно независимое уравнение:

$$\sum y = 0; \quad 2N_1 \cos \beta - 2N_2 \cos \alpha - F = 0.$$

Далее вычисляем

$$\alpha = \arctg \frac{b}{h} = \arctg \frac{0,3}{0,2} = 56,31^\circ;$$

$$\beta = \arctg \frac{a}{h} = \arctg \frac{0,5}{0,2} = 68,2^\circ.$$

Подставив значения тригонометрических

функций углов α и β в уравнение статики, получаем:

$$-1,109N_2 + 0,743N_1 = 50000. \quad (6.1)$$

Так как рассмотрение статической стороны задачи даёт одно уравнение с двумя неизвестными, то задача является статически неопределимой.

Геометрическая сторона задачи

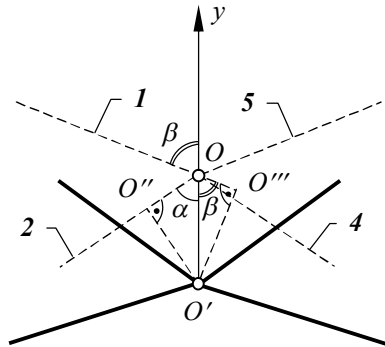


Рисунок 15 – Перемещение вырезанного узла

Рассмотрим какое-либо малое перемещение узла O , не нарушающее симметрии стержневой системы (рис. 15). Очевидно, что ввиду симметрии системы это вертикальное малое перемещение. Так как стержни 1, 2, 4 и 5 остаются соединёнными в узле O , а вторые концы этих стержней неподвижны, то их удлинения можно связать математическим выражением. Вследствие малости перемещения OO' новое положение стержня практически является параллельным исходному положению.

$$\begin{aligned} \Delta l_1^* &= O'''O = OO' \cos \beta; & \Delta l_2^* &= OO'' = OO' \cos \alpha; \\ \frac{\Delta l_1^*}{\Delta l_2^*} &= -\frac{\cos \beta}{\cos \alpha}; & \Delta l_1^* &= -\frac{\cos 68,2^\circ}{\cos 56,31^\circ} \Delta l_2^* = -\frac{0,3714}{0,5547} \Delta l_2^*; \\ \Delta l_1^* &= -0,6695 \Delta l_2^*. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь знак «минус» учитывает, что один из стержней системы растягивается, а другой – сжимается.

Следует отметить, что точка O является проектным положением узла при отсутствии силы F , точном изготовлении всех стержней и предполагаемой температуре монтажа. Точка O' соответствует положению узла O при нагружении системы заданной силой F , при действии температурного перепада и неточности изготовления ее отдельных элементов.

Физическая сторона задачи

Длина стержня может изменяться под действием следующих трёх факторов: неточности изготовления отдельных элементов, изменения температуры и при действии продольной силы. Удлинение стержня при действии всех этих факторов определяется следующим образом

$$\Delta l^* = \delta + \alpha_l l \Delta t + \frac{Nl}{EA}$$

где δ – неточность изготовления;

Δt – изменение температуры относительно исходной;

α_l – коэффициент линейного расширения материала стержня;

l – длина стержня;

N – продольная сила;

A – площадь поперечного сечения;

E – модуль продольной упругости материала стержня.

Для стержней рассматриваемой системы имеем:

$$\begin{aligned}\Delta l_1^* &= \delta_1 + \alpha_t l_1 \Delta l + \frac{N_1 l_1}{EA_1}; \\ \Delta l_2^* &= \delta_2 + \alpha_t l_2 \Delta l + \frac{N_2 l_2}{EA_2}.\end{aligned}\tag{6.3}$$

где $l_1 = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{0,5^2 + 0,2^2} = 0,538$ м;

$l_2 = \sqrt{b^2 + h^2} = \sqrt{0,3^2 + 0,2^2} = 0,36$ м.

Подставляя выражение (6.3) в равенство (6.2) получаем:

$$\delta_1 + \alpha_t l_1 \Delta l + \frac{N_1 l_1}{EA_1} = -0,6695 \left[\delta_2 + \alpha_t l_2 \Delta l + \frac{N_2 l_2}{EA_2} \right].\tag{6.4}$$

После численной подстановки заданных величин имеем:

$$\begin{aligned}&\left[-1 \cdot 10^{-3} + 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,538 \cdot (-50) + \frac{N_1 \cdot 0,538}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot A_2} \right] = \\ &= -0,6695 \cdot \left[2 \cdot 10^{-3} + 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,36 \cdot (-50) + \frac{N_2 \cdot 0,36}{2 \cdot 10^{11} \cdot A_2} \right].\end{aligned}$$

После некоторых упрощений получим:

$$-1,4035 + 1,345 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{N_1}{A_2} = -1,157 - 1,2042 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{N_2}{A_2}.\tag{6.5}$$

Уравнения (6.1) и (6.5) представляют собой систему из двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными. Здесь A_2 является некоторым параметром, который мы определим позже.

Чтобы решить систему, выразим N_1 из (6.1):

$$N_1 = 67295 + 1,4926 N_2.$$

Подставим это выражение в уравнение (6.5)

$$1,345 \cdot 10^{-9} \cdot (67295 + 1,4926 N_2) + 1,2042 \cdot 10^{-9} \cdot N_2 = 0,2465 A_2.$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}N_2 &= 7,675 \cdot 10^7 \cdot A_2 - 28182; \\ N_1 &= 1,1456 \cdot 10^8 \cdot A_2 + 25180.\end{aligned}\tag{6.6}$$

Для вычисления требуемой площади поперечного сечения A_2 необходимо воспользоваться условием прочности:

$$\begin{cases} |\sigma_1| \leq R = 160 \cdot 10^6; \\ |\sigma_2| \leq R = 160 \cdot 10^6. \end{cases}\tag{6.7}$$

Из данной системы следует, что во всех стержнях нормальные напряжения по модулю не должны превышать величины расчётного сопротивления материала стержня.

Чтобы воспользоваться условиями прочности, вычислим напряжения по известным из (6.6) продольным силам.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{m_1 A_2} = \frac{N_1}{2A_2} = \frac{12590}{A_2} + 5,728 \cdot 10^7;$$

$$\sigma_1 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{28182}{A_2} + 7,675 \cdot 10^7.$$

Подставим найденные значения в систему неравенств (6.7)

$$\begin{cases} \frac{12590}{A_2} + 5,728 \cdot 10^7 \leq 160 \cdot 10^6; \\ \left| -\frac{28182}{A_2} + 7,675 \cdot 10^7 \right| \leq 160 \cdot 10^6. \end{cases}$$

Из первого неравенства системы получаем $A_2 \geq 1,226 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Второе неравенство системы (6.7) распадается на два неравенства:

$$\left| -\frac{28182}{A_2} + 7,675 \cdot 10^7 \right| \leq 160 \cdot 10^6 \Rightarrow -\frac{28182}{A_2} \leq 8,325 \cdot 10^7; \quad A_2 \geq 0,$$

т.к. в заданной задаче отрицательная площадь невозможна.

$$\left| -\frac{28182}{A_2} - 7,675 \cdot 10^7 \right| \leq 160 \cdot 10^6; \quad \frac{28182}{A_2} \leq 236,7 \cdot 10^6; \quad A_2 \geq 1,191 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Окончательно имеем следующую систему неравенств, эквивалентную исходной системе (6.7), т.е. условиям прочности:

$$\begin{cases} A_2 \geq 1,226 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; \\ A_2 \geq 0; \\ A_2 \geq 1,191 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2. \end{cases}$$

Очевидно, что система (6.7) эквивалентна неравенству $A_2 \geq 1,226 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Окончательно принимаем $A_2 = 1,226 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Выполняем проверку полученного решения, для чего следует установить, выполняются ли условия прочности (6.7), уравнения равновесия (6.1) и геометрическое соотношение (6.2) с учётом физических соотношений (6.3).

Вначале вычислим N_1 и N_2 по формулам (6.6):

$$N_1 = 25180 + 1,1456 \cdot 10^8 \cdot 1,226 \cdot 10^{-4} = 39225 \text{ Н} = 39,225 \text{ кН};$$

$$N_2 = -28182 + 7,675 \cdot 10^7 \cdot 1,226 \cdot 10^{-4} = -18772 \text{ Н} = -18,772 \text{ кН}.$$

Определяем напряжения в стержнях:

$$A_1 = m_1 A_2 = 2 \cdot 1,226 \cdot 10^{-4} = 2,452 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2;$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{39225}{2,452 \cdot 10^{-4}} = 159,97 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{18772}{1,226 \cdot 10^{-4}} = -153,11 \text{ МПа}$$

Следовательно, условия прочности (6.7) выполняются.

Подставим N_1 и N_2 в уравнение равновесия (6.1):

$$-1,109 \cdot (-18772) + 0,743 \cdot 39225 - 50000 = 49962 - 50000 = -38 \text{ Н.}$$

Если N_1 и N_2 найдены точно, то, очевидно, что в правой части равенства (6.1) должен быть ноль, следовательно, можно оценить погрешность решения:

$$\frac{|49962 - 50000|}{50000} \cdot 100 \% = 0,076 \% .$$

Вычислим теперь величины Δl_1^* и Δl_2^* по формулам (6.3)

$$\Delta l_1^* = \delta_1 + \alpha_1 l_1 \Delta t + \frac{N_1 l_1}{EA_1} =$$

$$= -1 \cdot 10^{-3} + 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,538 \cdot (-50) + \frac{39225 \cdot 0,538}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,452 \cdot 10^{-4}} = -9,732 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\Delta l_2^* = \delta_2 + \alpha_2 l_2 \Delta t + \frac{N_2 l_2}{EA_2} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-3} + 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,36 \cdot (-50) + \frac{-18772 \cdot 0,36}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,226 \cdot 10^{-4}} = 1,455 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Проверим, выполняется ли геометрическое соотношение (6.2)

$$-9,732 \cdot 10^{-4} = -0,6695 \cdot 1,455 \cdot 10^{-3};$$

$$-9,732 \cdot 10^{-4} = -9,737 \cdot 10^{-4} .$$

Погрешность этого равенства: $\frac{9,737 - 9,732}{9,732} \cdot 100 \% = 0,05 \% .$

7 Расчет статически неопределимой стержневой системы на прочность методом разрушающих нагрузок

Выполним расчет статически неопределимой стержневой системы, рассмотренной в разделе 6, по методу разрушающих нагрузок. Так как проектная (допустимая) нагрузка на систему задана равной $F = 50 \text{ кН}$, то разрушающая нагрузка с учетом коэффициента запаса $n = 1,5$ определяется следующим образом

$$F_{\text{разр}} = n \cdot F = 1,5 \cdot 50 = 75 \text{ кН.}$$

Заданная геометрически неизменяемая стержневая система превратится в механизм, когда напряжение во всех ее стержнях будет по абсо-

лютной величине равно пределу текучести σ_y . Так как сила F действует вниз, и другие факторы в этом методе не учитываются, то точка O (рис. 13) при нагружении сместится вниз. При таком перемещении узла O стержни 1 и 5 будут растянуты, а стержни 2 и 4 – сжаты.

Запишем уравнение равновесия:

$$\sum y = 0; \quad 2N_1 \cdot \cos \beta + 2N_2 \cdot \cos \alpha = F;$$

$$0,743N_1 - 1,109N_2 = F.$$

Из условия превращения заданной системы в механизм следует, что при $F = F_{разр}$

$$N_1 = \sigma_y \cdot A_1; \quad N_2 = -\sigma_y \cdot A_2.$$

Тогда из уравнения равновесия получаем

$$0,743 \cdot \sigma_y \cdot A_1 + 1,109 \cdot \sigma_y \cdot A_2 = F_{разр};$$

$$0,743 \cdot \sigma_y \cdot m_1 \cdot A_1 + 1,109 \cdot \sigma_y \cdot A_2 = F_{разр};$$

$$0,743 \cdot \sigma_y \cdot 2 \cdot A_1 + 1,109 \cdot \sigma_y \cdot A_2 = F_{разр}.$$

Учитывая, что для малоуглеродистой пластичной стали предел текучести равен $\sigma_y = 240$ МПа, имеем

$$A_2 = \frac{F_{разр}}{(0,743 \cdot 240 \cdot 10^6 \cdot 2 + 1,109 \cdot 240 \cdot 10^6)} = 1,204 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

8 Задание к расчетно-графической работе

Задание на расчетно-графическую работу выдается в виде шестизначного шифра. Первая пара цифр соответствует номеру расчетной схемы ступенчатого стержня (табл. 8.1). Вторая пара цифр – номеру расчетной схемы плоской статически неопределимой системы (табл. 8.2). Третья пара цифр – соответствует номеру строки таблицы исходных данных (табл. 8.3). Работы, выполненные не по шифру, преподавателем не рецензируются.

При выполнении расчетно-графической работы в пояснительной записке должны быть отражены следующие этапы расчета:

1. Для заданного статически неопределимого стержня убрать нижнюю заделку. Выполнить расчет на прочность получившегося статически определимого стержня, для чего:

- а) построить эпюру продольных усилий;
- б) из условия прочности подобрать требуемую площадь поперечного сечения стержня;
- в) построить эпюру распределения нормальных напряжений по длине стержня;
- г) построить эпюру перемещений.

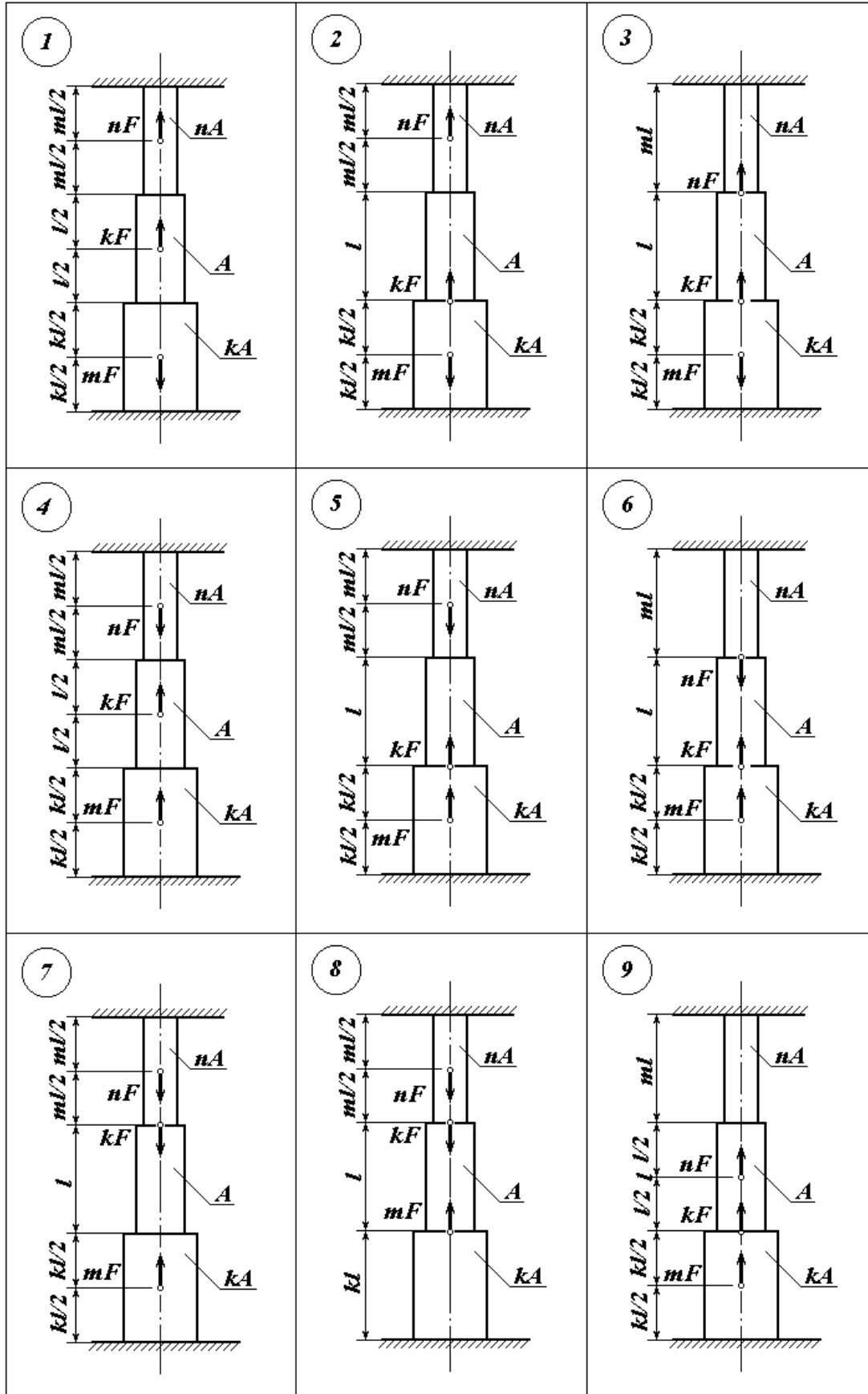
2. Для заданного статически неопределимого стержня требуется:

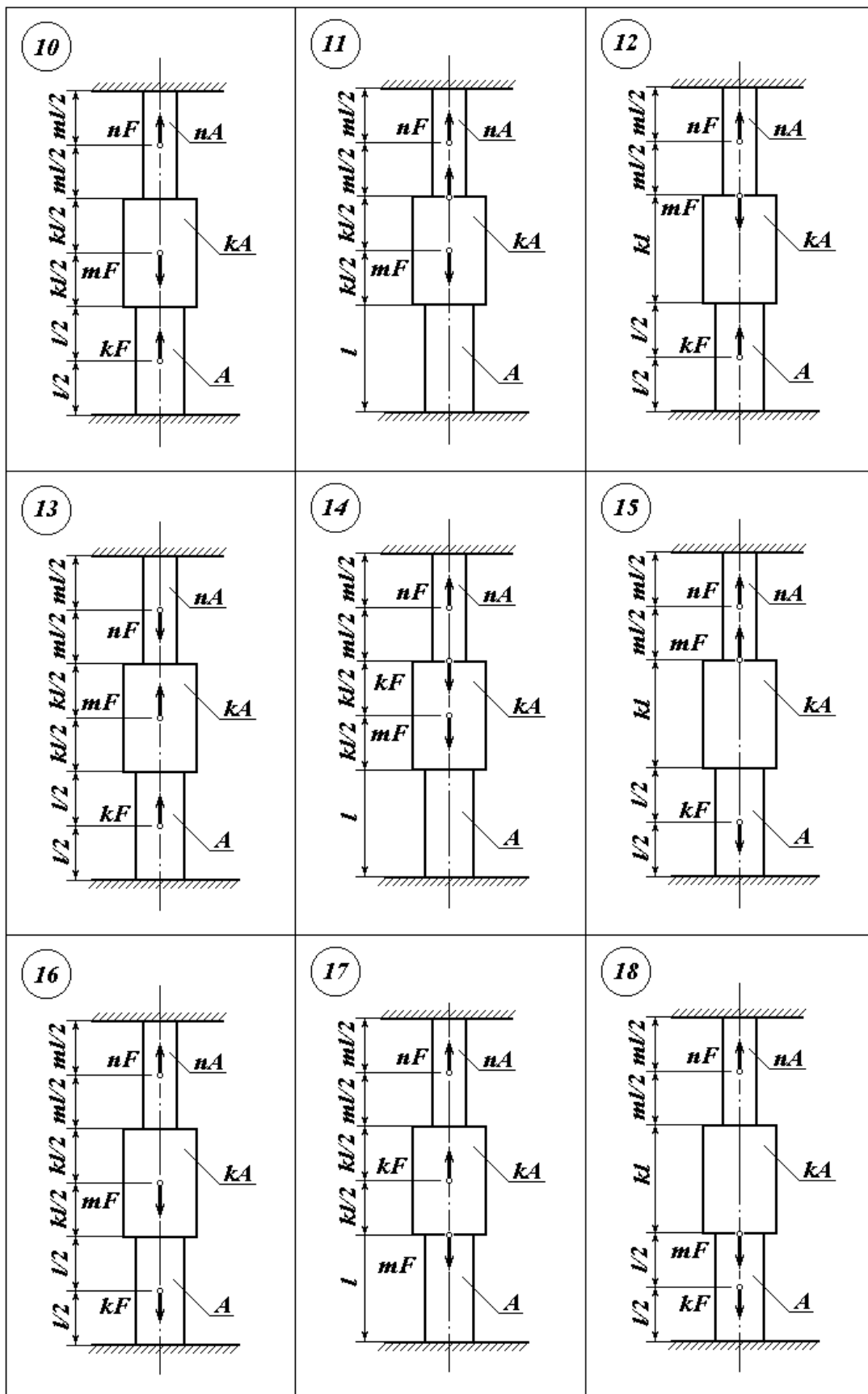
- а) раскрыть статическую неопределимость системы;
- б) построить эпюру продольных сил;
- в) построить эпюру распределения нормальных напряжений по длине стержня;
- г) построить эпюру перемещений;
- д) сравнить величины полученных напряжений для статически определимого и неопределимого стержней, сделать выводы.

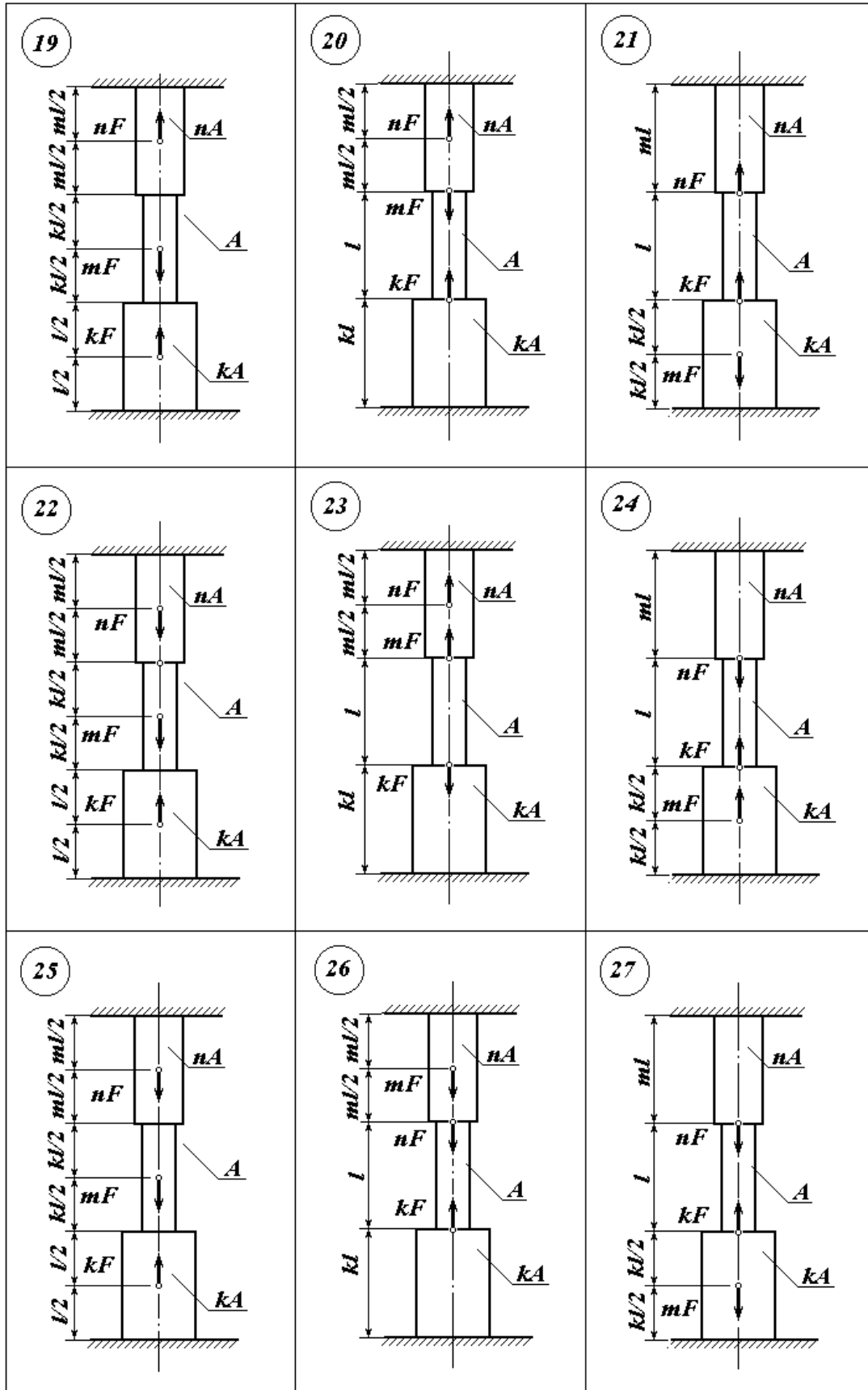
3. Для заданной плоской статически неопределимой стержневой системы определить:

- а) необходимые площади поперечных сечений стержней при действии заданной внешней нагрузки;
- б) усилия и напряжения в стержнях только от заданного изменения температуры;
- в) напряжения в стержнях, вызванные только неточностью изготовления первого стержня (δ_1 принять равным 0,15 см);
- г) усилия, напряжения и деформации стержней от совместного действия нагрузки, изменения температуры и неточности изготовления.

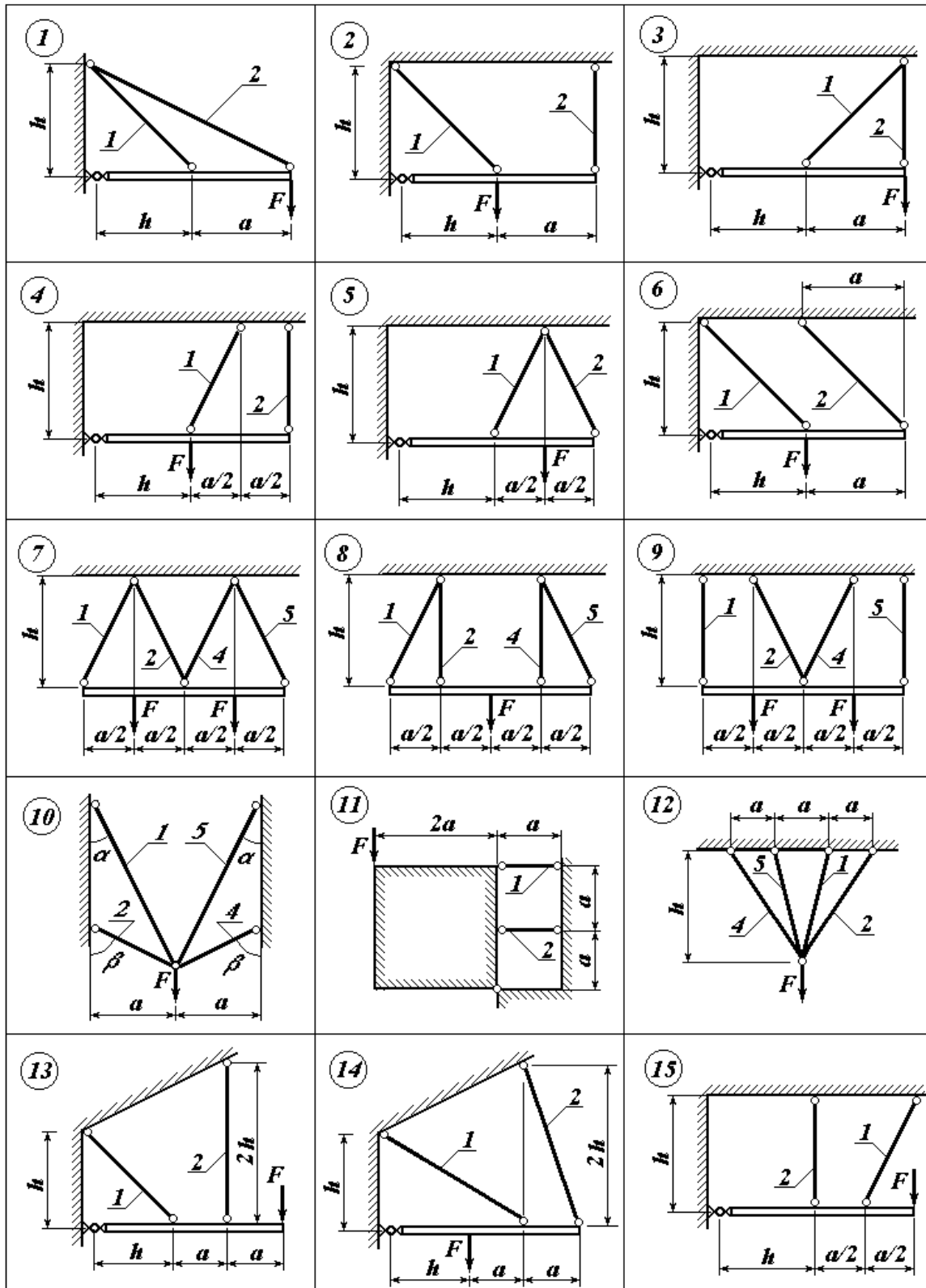
Т а б л и ц а 8.1 – Схемы ступенчатых стержней



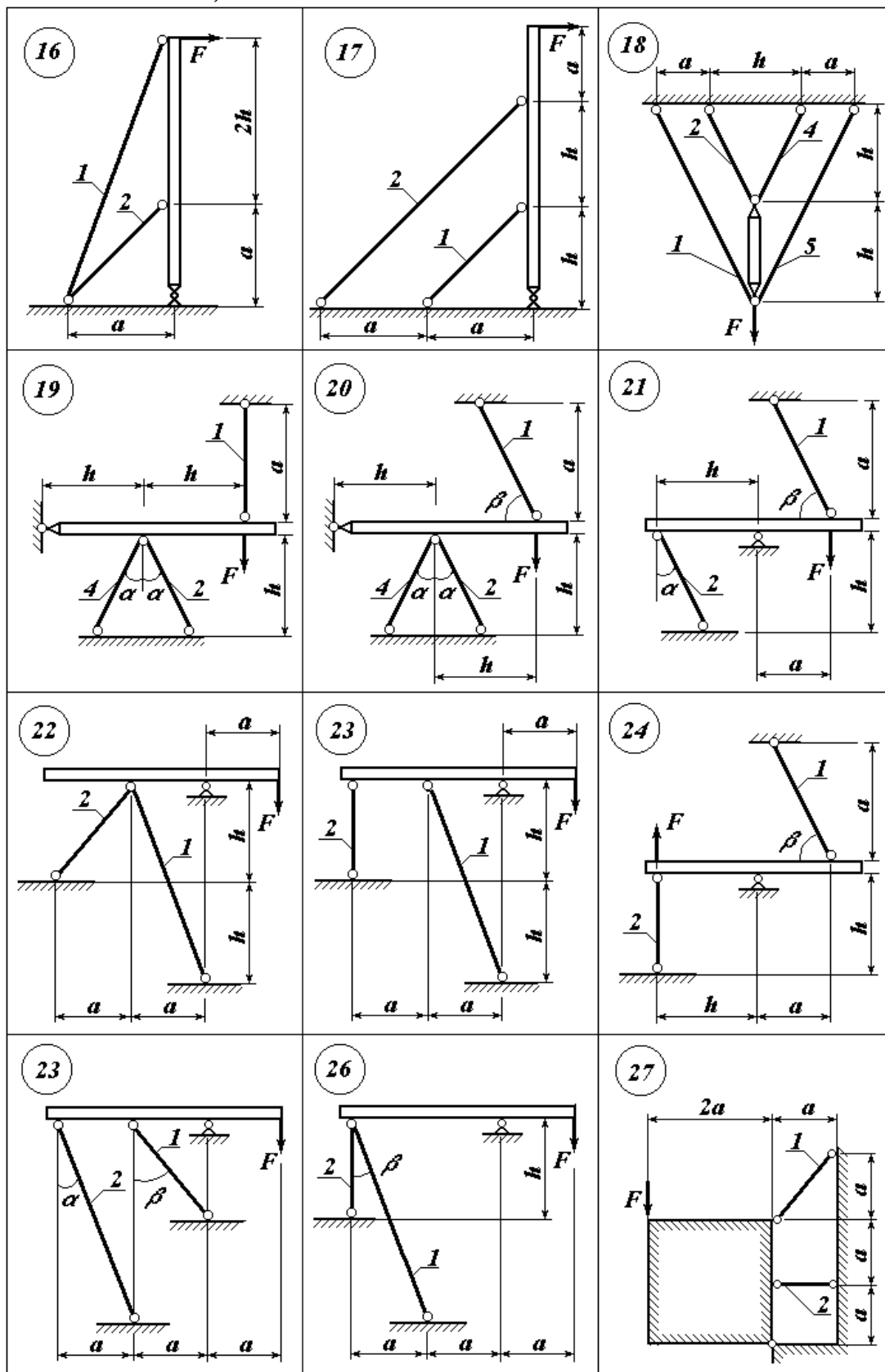




Т а б л и ц а 8.2 – Схемы плоских стержневых систем



Окончание таблицы 8.2



Т а б л и ц а 8.3 – Исходные данные к расчетно-графической работе

№	m	k	n	l , м	F , кН	Материал стержней*	h , м	a , м	A_1/A_2	Δt , град.
	К задачам 1 и 2				Кo всем задачам		К задаче 3			
1	1,0	1,9	1,5	0,5	120	Алюминий	3,0	2,0	2,0	40
2	1,1	1,8	1,6	0,3	130	Бронза	2,0	1,5	2,2	45
3	1,2	1,7	1,7	1,1	140	Латунь	3,5	1,0	2,2	50
4	1,3	1,6	1,8	0,9	150	Медь	2,5	2,5	2,3	55
5	1,4	1,5	1,9	0,7	160	Сталь углеродистая	2,0	2,0	2,4	60
6	1,5	1,4	1,0	0,5	180	Сталь легированная	2,5	1,5	2,5	70
7	1,6	1,3	1,1	0,3	200	Алюминий	3,5	2,5	2,6	80
8	1,7	1,2	1,2	1,1	210	Бронза	2,5	2,0	2,7	45
9	1,8	1,1	1,3	0,9	220	Латунь	2,0	1,5	2,8	55
10	1,9	1,0	1,4	0,7	230	Медь	3,0	1,0	2,9	75
11	1,5	1,0	1,5	0,5	240	Сталь углеродистая	3,5	2,0	2,0	40
12	1,6	1,1	1,6	0,3	250	Сталь легированная	3,0	2,0	2,2	40
13	1,7	1,2	1,7	1,1	230	Алюминий	2,0	1,0	2,2	45
14	1,8	1,3	1,8	1,0	210	Бронза	3,5	2,5	2,3	50
15	1,9	1,4	1,9	0,9	190	Латунь	2,5	2,0	2,4	55
16	1,0	1,5	1,0	0,8	170	Медь	2,0	1,5	2,5	40
17	1,1	1,6	1,1	0,7	150	Сталь углеродистая	2,5	2,5	2,6	45
18	1,2	1,7	1,2	0,6	130	Сталь легированная	3,5	2,0	2,7	50
19	1,3	1,8	1,3	0,5	120	Алюминий	2,5	1,5	2,8	55
20	1,4	1,9	1,4	0,4	130	Бронза	2,0	1,0	2,9	60
21	1,9	1,5	1,0	0,3	140	Латунь	3,0	2,0	2,0	80
22	1,8	1,6	1,1	1,2	150	Медь	3,5	1,5	2,2	70
23	1,7	1,7	1,2	1,1	160	Сталь углеродистая	2,5	1,0	? 2	45
24	1,6	1,8	1,3	1,0	170	Сталь легированная	2,5	2,5	2,3	55
25	1,5	1,9	1,4	0,9	180	Алюминий	2,0	1,5	2,4	75
26	1,4	1,0	1,5	0,8	190	Бронза	3,0	1,0	2,5	80
27	1,3	1,1	1,6	0,5	200	Латунь	3,5	2,5	2,6	60
28	1,2	1,2	1,7	1,0	210	Медь	3,0	2,0	2,7	65
29	1,1	1,3	1,8	0,5	220	Сталь углеродистая	2,0	1,5	2,8	55
30	1,0	1,4	1,9	1,0	230	Сталь легированная	2,5	2,5	2,9	45
31	2,0	1,5	1,0	0,5	240	Алюминий	2,0	2,0	2,0	60
32	1,0	2,0	1,5	1,1	250	Медь	3,0	1,5	2,5	70

* Для разнообразных видов одного материала следует принимать любой из них. При определении справочных величин, для которых даны их значения в определенных интервалах, принимать среднее значение.

Список литературы

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: учебник для вузов / Под ред. А.В. Александрова. – 3-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2000. – 560 с.
2. Атаров Н.М., Горшков А.А. Сопротивление материалов: учебник / Под ред. Г.С. Варданяна. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 480 с.
3. Икрин В.А. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник для студентов, обучающихся по направлению 653500 «Строительство». – М.: Изд. АСВ, 2004. – 424 с.
4. Горшков А.Г., Трошин В.М., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов. учеб. Пособие.- 2-е изд., испр. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 544 с.
5. Вольмир А.С. Сборник задач по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1984. – 407 с.
6. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов / Под ред. Г.С. Писаренко. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.
7. Фесик С.П.. Справочник по сопротивлению материалов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Будівельник, 1982. – 280 с.

**Приложение А-Модули упругости и коэффициент Пуассона
(справочное)**

Т а б л и ц а А.1

Наименование материала	Модули упругости (МПа)		Коэффициент Пуассона
	<i>E</i>	<i>G</i>	
Металлы и сплавы			
Алюминий катаный	$0,69 \cdot 10^5$	$(2,6-2,7) \cdot 10^4$	0,32–0,36
Бронза алюминиевая	$1,05 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	–
Бронза марганцовистая	$1,10 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,35
Бронза фосфористая	$1,15 \cdot 10^5$	$4,2 \cdot 10^4$	0,32–0,35
Висмут	$0,32 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^4$	0,33
Дюралюминий катаный	$0,71 \cdot 10^5$	$2,7 \cdot 10^4$	0,34
Инвар	$1,35 \cdot 10^5$	$5,5 \cdot 10^4$	0,25
Кадмий	$0,50 \cdot 10^5$	$1,9 \cdot 10^4$	0,30
Константан	$1,60 \cdot 10^5$	$6,1 \cdot 10^4$	0,33
Латунь катаная	$1,0 \cdot 10^5$		0,36
Латунь холоднотянутая	$(0,91-0,99) \cdot 10^5$	$(3,5-3,7) \cdot 10^4$	0,32–0,42
Манганин	$1,23 \cdot 10^5$	$4,6 \cdot 10^4$	0,33
Медное литье	$0,84 \cdot 10^5$	–	–
Медь прокатная	$1,1 \cdot 10^5$	$4,0 \cdot 10^4$	0,31–0,34
Медь холоднотянутая	$1,3 \cdot 10^5$	$4,9 \cdot 10^4$	0,35
Никель	$2,04 \cdot 10^5$	$7,9 \cdot 10^4$	0,28
Свинец	$0,17 \cdot 10^5$	$0,70 \cdot 10^4$	0,42
Серебро	$0,827 \cdot 10^5$	$3,03 \cdot 10^4$	0,37
Сталь легированная	$2,1 \cdot 10^5$	$8,1 \cdot 10^4$	0,25–0,30
Сталь углеродистая	$(2,0-2,1) \cdot 10^5$	$8,1 \cdot 10^4$	0,24–0,28
Стальное литье	$1,75 \cdot 10^5$	–	–
Титан	$1,16 \cdot 10^5$	$4,4 \cdot 10^4$	0,32
Цинк катаный	$0,84 \cdot 10^5$	$3,2 \cdot 10^4$	0,27
Чугун ковкий	$(1,65-1,70) \cdot 10^5$	$6,0 \cdot 10^4$	0,25–0,27
Чугун серый, белый	$(1,15-1,60) \cdot 10^5$	$4,5 \cdot 10^4$	0,23–0,27
Природные каменные материалы и бетон			
Бетон класса:			
B10	$(0,15-0,20) \cdot 10^5$	$(0,70-1,70) \cdot 10^4$	0,10–0,15
B15	$(0,16-0,21) \cdot 10^5$	$(0,70-1,70) \cdot 10^4$	0,10–0,15
B20	$(0,18-0,23) \cdot 10^5$	$(0,70-1,70) \cdot 10^4$	0,10–0,15
Глинистый сланец	$(0,12-0,46) \cdot 10^5$	–	0,10–0,40
Гранит	$0,49 \cdot 10^5$	–	–

Продолжение таблицы А.1

Наименование материала	Модули упругости (МПа)		Коэффициент Пуассона
	E	G	
Известняк	$0,42 \cdot 10^5$	–	–
Каменная кладка из:			
гранита	$(0,09-0,10) \cdot 10^5$	–	–
известняка	$0,06 \cdot 10^5$	–	–
кирпича	$(0,027-0,03) \cdot 10^5$	–	–
Мрамор	$0,56 \cdot 10^5$	–	–
Песчаник	$0,18 \cdot 10^5$	–	–
Уголь	$0,062 \cdot 10^5$	–	0,11
Неметаллические материалы			
Дерево:			
вдоль волокон	$(0,10-0,12) \cdot 10^5$	$0,055 \cdot 10^4$	–
поперек волокон	$(0,005-0,01) \cdot 10^5$	–	–
Кварцевая нить	0,73	$3,1 \cdot 10^4$	0,17
Лед	$0,10 \cdot 10^5$	$(0,28-0,30) \cdot 10^4$	–
Стекло	$0,56 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^4$	0,25
Полимерные материалы			
Бакелит	$(0,02-0,03) \cdot 10^5$	–	–
Геттинакс	$(0,10-0,17) \cdot 10^5$	–	–
Каучук	$0,00008 \cdot 10^5$	$0,00027 \cdot 10^4$	0,47
Плексиглас	$0,0525 \cdot 10^5$	$0,148 \cdot 10^4$	0,35
Резина мягкая	$0,000035 \cdot 10^5$	$0,00010 \cdot 10^4$	0,49
Текстолит	$(0,06-0,10) \cdot 10^5$	–	–

**Приложение Б- Коэффициент линейного теплового расширения
твердых тел (для температура в интервале от 0 до 100°С)**

(справочное)

Т а б л и ц а Б.1

Наименование материала	α_t (10^{-6}K^{-1})	Наименование материала	α_t (10^{-6}K^{-1})
Металлы и сплавы			
Алюминий	23,8	Никель	13,0
Бронза	17,5	Свинец	29,0
Висмут	13,4	Серебро	19,5
Дюралюминий	22,6	Сталь легированная	11,7
Инвар	1,5	Сталь малоуглеродистая	12,5
Кадмий	30,0	Титан	8,6
Константан	18,8	Цинк	29,0
Латунь	18,7	Чугун ковкий	10,0
Медь	16,5	Чугун серый, белый	10,4
Природные каменные материалы и бетон			
Бетон	12,0	Мрамор	5,5–14,1
Гранит	7,9	Песчаник	11,6
Известняк	8,0	Сланец	9,0
Каменная кладка	4,7–9,0	Слюда	3,0
Кварц	0,77–1,4	Уголь	7,9
Неметаллические материалы			
Дерево вдоль волокон	4,9	Лед	51,0
Дерево поперек волокон	5,4	Кирпич	5,5
Винипласт	70,0	Стекло	0,6–9,0

Приложение В- Ориентировочные величины расчетных сопротивлений некоторых материалов на растяжение и сжатие

(справочное)

Т а б л и ц а В.1

Материал	Расчетное сопротивление, МПа	
	на растяжение R_t	на сжатие R_c
Металлы и сплавы		
Алюминий	25–70	
Бронза	50–110	
Дюралюминий	70–140	
Латунь	60–130	
Медь	30–110	
Сталь:		
углеродистая горячекатанная	115–195	
углеродистая конструкционная	110–240	
легированная конструкционная	140–260	
в отливках	90–160	
Чугун в отливках:		
серый	33–100	145–310
ковкий	85–110	95–125
Неметаллические материалы		
Стеклотекстолит	35	
Бакелизированная фанера	40–50	
Капрон	30	
Поливинилхлорид	25	
Полипропилен	17	
Дуб вдоль волокон	9–13	13–15
Дуб поперек волокон	–	2–3,5
Сосна вдоль волокон	7–10	10–12
Сосна поперек волокон	–	1,5–2
Кладка:		
каменная	0,2	0,4–4
кирпичная	0,2	0,6–2
Бетон	0,2–1,4	2,0–24

Продолжение таблицы В.1

Материал	Предел прочности, МПа	
	при растяжении σ_{ut}	при сжатии σ_{uc}
Металлы и сплавы		
Алюминий	100–250	–
Бронза	200–600	–
Дюралюминий	180–500	–
Латунь	320–600	–
Медь	220–270	–
Сталь:		
углеродистая горячекатанная	320–470	–
углеродистая конструкционная	380–450	–
легированная конструкционная	800–1550	–
в отливках	400–600	–
Чугун в отливках:		
серый	120–380	500–1300
ковкий	300–630	1600–2200
Неметаллические материалы		
Текстолит	85–100	130–250
Гетинакс	150–170	150–180
Бакелизованная фанера	130	150
Капрон	35–80	60–80
Дуб вдоль волокон	95	50
Дуб поперек волокон	–	15
Сосна вдоль волокон	80	40
Сосна поперек волокон	–	5
Кирпичная кладка	0,2–0,5	2,5–9
Бетон	0,8–3,2	7,5–60
Стекло	35–100	500–2000
Гранит	13–17	70–300
Песчаник	–	15–150
Мрамор	–	70–150
Базальт	20–30	250–320

**Приложение Г- Объемная плотность различных материалов
(при 20°С)
(справочное)**

Т а б л и ц а Г.1

Наименование материала	ρ , (10 ³ кг/м ³)	Наименование материала	ρ , (10 ³ кг/м ³)
Металлы и сплавы			
Алюминий	2,7	Олово	7,29
Бронза	8,7–8,9	Платина	21,46
Висмут	9,8	Плутоний	
Дюралюминий	2,8	Свинец	11,35
Инвар	8,13	Серебро	10,5
Кадмий	8,65	Сталь легированная	7,9
Константан	8,88	Сталь малоуглеродистая	7,7
Латунь	8,4–8,7	Титан	4,5
Медь	8,93	Хром	7,15
Натрий	0,975	Цинк	7,15
Никель	8,9	Чугун	7,0
Природные каменные материалы и бетон			
Бетон	1,8–2,5	Мрамор	2,5–2,8
Гранит	2,5–3,0	Песчаник	2,5
Известняк	2,7	Сланец	2,72
Каменная кладка	1,6–1,9	Слюда	2,2–3,3
Кварц	2,65	Уголь	1,4–1,6
Неметаллические материалы			
Береза	0,7	Лед (при 0°С)	0,917
Дуб, бук	0,7–0,9	Снег свежавыпавший	0,08–0,19
Сосна, ель	0,4–0,5	Снег слежавшийся	0,2–0,4
Ясень	0,6–0,8	Стекло	2,2–2,6

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания

Составители: Молдаванов Сергей Юрьевич;
Дунаев Владислав Игоревич;
Георгияди Владимир Георгиевич

Редактор
Компьютерная верстка

Н.А. Колычева
С.Ю. Молдаванов

Подписано в печать
Бумага офсетная
Печ. л. 2,75
Усл. печ. л. 2,6
Уч.-изд. л. 2,0

Формат 60x84/16
Офсетная печать
Изд. № 182
Тираж 75 экз.
Заказ №

Цена руб.

Кубанский государственный технологический университет
350072, г. Краснодар, Московская 2, кор. А
Типография КубГТУ: 350058, г. Краснодар, ул. Старокубанская, 88/4,