

РАСЧЕТНЫЕ РАБОТЫ

Образец заполнения титульного листа

Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет

имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

Кафедра высшей математики

РАСЧЕТНАЯ РАБОТА 1

«МОНЕТКА»

Студент

Группа

Преподаватель

Вариант

Дата

Екатеринбург

РАСЧЕТНАЯ РАБОТА 1: «МОНЕТКА»

Задание к лабораторной работе

1. Возьмите 10 монет одинакового достоинства, хорошо перемешайте и выложите на стол. Сосчитайте количество гербов. Запишите результат.
2. Повторите пункт 1 сто раз. Результаты оформите в виде таблицы экспериментальных данных:

№ броска	Число выпавших гербов
1	7
...	...
100	3

3. Сосчитайте, сколько раз выпало 0 гербов, 1 герб, 2 герба, 3 герба,..., результаты оформите в виде статистического ряда:

	Случайная величина X – число выпадений гербов										
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Частота n_i	2	6	10

4. Постройте полигон частот, гистограмму.
5. Вычислите математическое ожидание a случайной величины X , ее дисперсию D и среднее квадратичное отклонение σ .
6. На графике, показывающем полигон относительных частот экспериментальных значений величины X , постройте кривую нормального распределения с вычисленными выше значениями математического ожидания и дисперсии.
7. Сравните экспериментальный и теоретический графики визуально.
8. Вычислите вероятности попадания случайной величины X в интервалы $[a - \sigma, a + \sigma]$, $[a - 2\sigma, a + 2\sigma]$, $[a - 3\sigma, a + 3\sigma]$. и сравните с экспериментальными данными.
9. Вычислите критерий χ^2 Пирсона и проверьте гипотезу о характере распределения (нормальное, биномиальное), приняв доверительную вероятность $\alpha = 0,05$.
10. Постройте доверительный интервал для математического ожидания величины X .

Образец выполнения работы

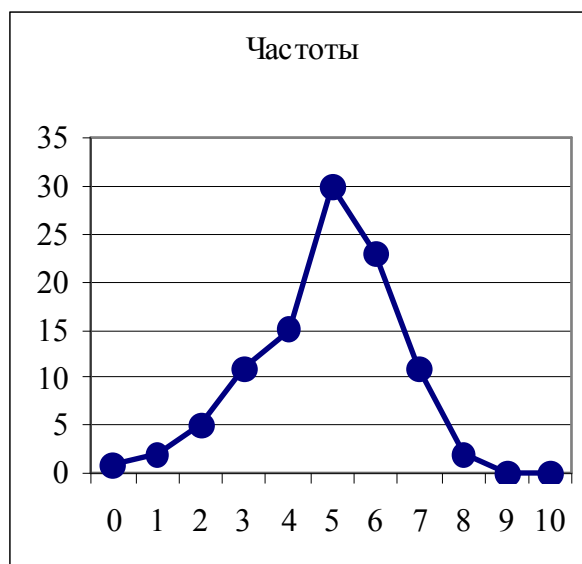
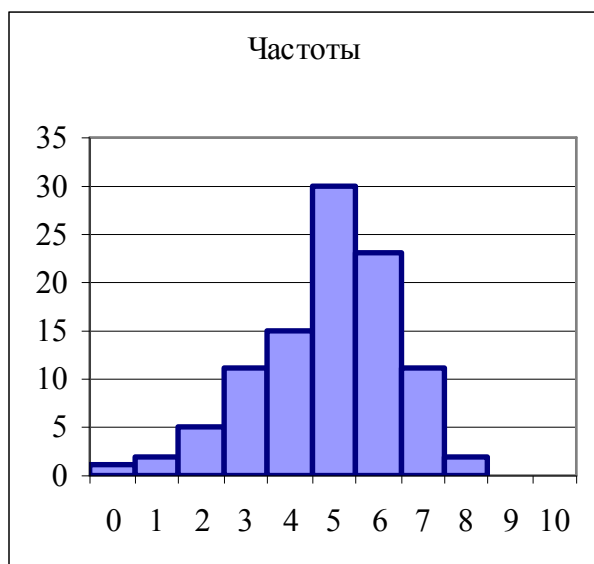
1;2. После выполнения пунктов 1 и 2 получены результаты:

Выборка									
1	7	3	6	0	6	6	4	4	5
6	3	5	5	8	5	3	7	4	6
4	2	6	6	6	5	6	6	3	4
5	4	8	4	5	5	5	5	7	5
4	4	5	5	6	5	6	6	3	6
6	5	3	2	3	3	7	5	5	3
4	4	1	7	5	5	7	5	4	5
4	6	7	5	7	6	6	6	5	2
2	5	3	5	5	6	6	5	6	4
4	7	7	2	3	6	5	7	5	5

3. По выборке строим статистический ряд:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	1	2	5	11	15	30	23	11	2	0	0

4. Полигон и гистограмма частот n_i :



5. Числовые характеристики выборочного распределения.

Выборочное среднее:

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 15 \cdot 4 + 30 \cdot 5 + 23 \cdot 6 + 11 \cdot 7 + 2 \cdot 8}{100} = 4,860;$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot (x_i - \bar{x}_B)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i \cdot x_i^2 - (\bar{x}_B)^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 2^2 + 11 \cdot 3^2 + 15 \cdot 4^2 + 30 \cdot 5^2 + 23 \cdot 6^2 + 11 \cdot 7^2 + 2 \cdot 8^2}{100} - 4,860^2 =$$

$$= 26,060 - 4,860^2 = 2,440.$$

Выборочное СКО: $\sigma_B = \sqrt{D_B} = 1,562$.

Исправленная выборочная дисперсия: $s_B^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{100}{99} \cdot 2,440 = 2,465$.

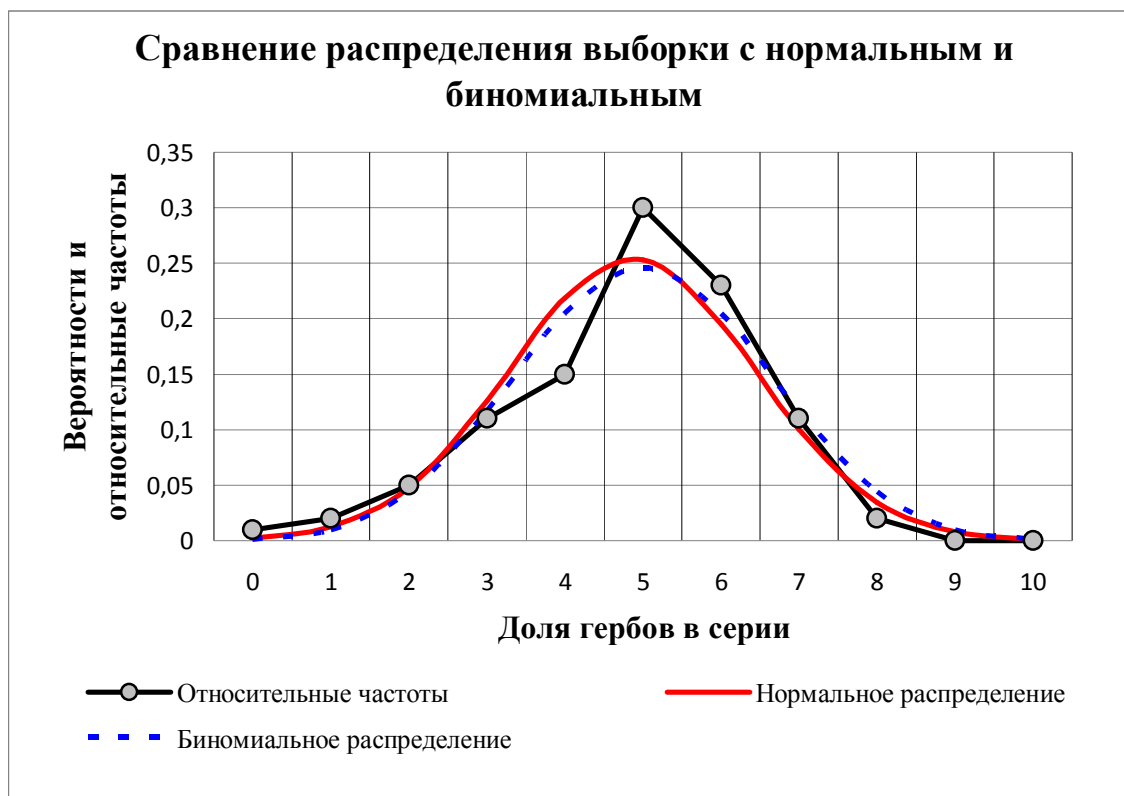
Исправленное выборочное СКО: $s_B = \sqrt{s_B^2} = 1,570$.

В качестве точечных оценок параметров распределения берем найденные выборочные средние, $a \approx \bar{x}_B = 4,860$, $\sigma \approx s_B = 1,570$.

6;7. Построение кривой нормального распределения и сравнение теоретического и экспериментального распределений.

Кривая нормального распределения $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ строится при по-

лученных экспериментальных значениях параметров $a = 4,860$ и $\sigma = 1,570$:



8. Вероятности попадания в интервалы.

$P\{\alpha < X < \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad \Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Значения функции Лапласа берутся из таблиц.

$$P\{a - \sigma < X < a + \sigma\} = \Phi\left(\frac{a + \sigma - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \sigma - a}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) = 0,6827.$$

Аналогично, $P\{a - 2\sigma < X < a + 2\sigma\} = 2\Phi(2) = 0,9545$,

$$P\{a - 3\sigma < X < a + 3\sigma\} = 2\Phi(3) = 0,9973.$$

Интервалы		Экспериментальная относительная частота	Теоретическая вероятность
$(a - \sigma; a + \sigma)$	$(3,298; 6,422)$	0,68	0,6827
$(a - 2\sigma; a + 2\sigma)$	$(1,736; 7,984)$	0,95	0,9545
$(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$	$(0,174; 9,547)$	0,99	0,9973

9. Вычисление критерия χ^2 Пирсона и проверка гипотезы о виде распределения.

Критерий Пирсона χ^2 : $\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=0}^{10} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$, где n_i - экспериментальные частоты, а p_i - теоретические вероятности, соответствующие значениям случайной величины X . Вычисления дают:

x_i	n_i	w_i	$p_i \text{ binom}$	np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	$p_i \text{ norm}$	np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	1	0,010	0,001	0,098	8,338	0,002	0,211	2,950
1	2	0,020	0,010	0,977	1,073	0,012	1,237	0,470
2	5	0,050	0,044	4,395	0,083	0,048	4,836	0,006
3	11	0,110	0,117	11,719	0,044	0,126	12,596	0,202
4	15	0,150	0,205	20,508	1,479	0,219	21,870	2,158
5	30	0,300	0,246	24,609	1,181	0,253	25,309	0,870
6	23	0,230	0,205	20,508	0,303	0,195	19,522	0,620
7	11	0,110	0,117	11,719	0,044	0,100	10,036	0,093
8	2	0,020	0,044	4,395	1,305	0,034	3,439	0,602
9	0	0,000	0,010	0,977	0,977	0,008	0,786	0,786
10	0	0,000	0,001	0,098	0,098	0,001	0,120	0,120
Сумма	100	1,000	1,000	100,000	14,924	1,000	99,961	8,875

В четвертом столбце таблицы приведены вероятности, вычисленные по формуле Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, $p = 0,5$:

$$p_{i \text{ binom}} = C_{10}^{x_i} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-x_i} = C_{10}^{x_i} \left(\frac{1}{2}\right)^{10},$$

в седьмом – значения плотности вероятности нормального распределения,

$$p_{i \text{ норм}} = f(x_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где среднее значение и СКО взяты из оценок по выборке: $\sigma = s_B = 1,570$, $a = \bar{x}_B = 4,860$.

В последней строке шестого и девятого столбцов приведены экспериментальные значения критерия $\chi_{\text{набл}}^2$: при сравнении с нормальным распределением $\chi_{\text{набл}}^2 = 8,875$, при сравнении с биномиальным распределением $\chi_{\text{набл}}^2 = 14,924$.

При $n \rightarrow \infty$ распределение этой случайной величины, независимо от того, каков закон распределения генеральной совокупности, стремится к распределению Пирсона χ^2 с числом степеней свободы $\nu = q - 1 - k$, где k – число параметров генерального распределения, оцениваемых на основании наблюдаемых данных.

а) Сравнение с нормальным распределением.

Так как оба параметра распределения генеральной совокупности оцениваются по данным выборки, число степеней свободы $\nu = 11 - 3 = 8$.

По таблице распределения χ^2 для $\nu = 8$ и $\alpha = 0,05$ находим критическую точку $\chi_{\text{кр}}^2(0,05;8) = 15,507$. Так как $\chi_{\text{набл}}^2 = 8,875 < \chi_{\text{кр}}^2 = 15,507$, гипотеза о нормальном характере распределения случайной величины X не отвергается.

б) Сравнение с биномиальным распределением.

Так как единственный параметр распределения генеральной совокупности, $p = 0,5$, не оценивается по данным выборки, число степеней свободы $\nu = 11 - 1 = 10$.

По таблице распределения χ^2 для $\nu = 10$ и $\alpha = 0,05$ находим критическую точку $\chi_{\text{кр}}^2(0,05;10) = 18,307$. Так как $\chi_{\text{набл}}^2 = 14,924 < \chi_{\text{кр}}^2 = 18,307$, гипотеза о биномиальном характере распределения случайной величины X не отвергается.

10. Доверительный интервал для математического ожидания величины X . Считая, что величина X распределена по нормальному закону с найденными ранее $a \approx \bar{x}_B = 4,860$, $\sigma \approx \sigma_B = 1,570$ и принимая, что доверительная вероятность $\alpha = 0,05$, найдем доверительный интервал $I_{0,95}$ для математического ожидания величины X :

$$I_{1-\alpha} = \left(\bar{x}_B - t_\alpha \cdot \frac{s_B}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B + t_\alpha \cdot \frac{s_B}{\sqrt{n}} \right),$$

где s_B – исправленное СКО, $s_B = 1,570$, t_α – квантиль распределения Стьюдента, из таблиц $t_{0,05} = 1,9840$.

Отсюда $I_{0,95} = (3,875; 5,845)$, с вероятностью 0,95 среднее количество гербов в серии из 10 выбрасываний лежит в этом интервале.

Варианты экспериментальных данных для самостоятельной работы

Вариант 1

Вариационный ряд									
6	3	6	5	4	5	3	3	2	3
3	5	2	4	4	7	8	7	5	7
7	5	7	3	5	6	5	7	5	6
4	7	3	5	2	7	6	2	4	5
7	4	6	4	6	2	4	3	4	3
7	5	8	6	4	7	5	8	5	6
3	8	3	1	7	5	5	4	6	6
3	2	3	4	8	5	6	2	6	6
1	5	5	4	7	5	10	5	5	8
7	2	1	6	4	2	7	6	8	5

Вариант 4

Вариационный ряд									
6	4	2	5	5	1	2	6	2	3
4	4	8	4	4	4	5	4	5	3
5	5	5	4	8	3	3	6	5	3
6	3	4	7	3	8	3	3	4	5
6	7	5	3	2	7	5	3	5	5
5	5	5	5	4	7	2	6	4	5
5	6	6	5	6	7	4	3	6	5
5	4	2	7	3	6	3	7	5	5
4	8	6	9	3	9	4	8	6	3
3	1	4	5	6	5	7	7	6	5

Вариант 2

Вариационный ряд									
3	4	7	6	5	6	4	7	3	6
6	6	4	1	7	5	3	3	4	7
6	5	6	6	5	6	6	7	5	6
3	3	1	4	4	6	6	5	3	4
5	7	4	4	8	4	4	3	4	9
4	5	5	4	5	7	2	5	6	6
6	5	6	7	4	3	6	6	7	6
4	3	7	4	6	5	6	7	4	3
6	5	7	5	7	6	2	6	5	2
4	6	7	2	6	7	5	5	6	5

Вариант 5

Вариационный ряд									
4	4	6	3	5	3	8	3	5	6
2	5	6	5	5	5	6	6	5	5
6	4	6	7	6	5	4	8	5	4
4	8	6	6	5	4	4	7	4	7
5	7	7	6	5	6	5	7	3	6
4	5	4	6	5	7	6	5	6	5
6	4	5	6	6	5	8	5	4	5
6	6	4	6	2	5	6	6	3	9
4	7	5	5	3	5	3	8	2	1
3	2	5	3	3	3	4	5	6	3

Вариант 3

Вариационный ряд									
5	7	6	5	5	4	3	7	4	6
5	4	3	6	4	5	5	7	6	6
4	3	6	5	3	6	4	8	6	5
4	3	2	7	3	6	5	4	6	7
6	7	4	5	6	8	4	6	5	4
6	8	7	5	4	5	6	9	4	8
5	6	5	4	3	5	6	7	3	6
6	8	4	5	7	6	3	4	2	7
4	6	4	5	7	2	4	6	8	3
7	6	5	4	3	7	6	4	4	5

Вариант 6

Вариационный ряд									
2	1	3	4	9	4	4	5	2	5
4	6	4	4	2	5	7	3	3	4
4	6	6	7	5	4	4	7	6	7
3	7	6	6	7	5	6	6	6	5
6	5	7	4	6	4	5	7	3	3
6	3	5	5	4	3	5	5	7	5
5	7	4	8	7	5	3	4	5	5
6	3	6	4	5	6	3	5	5	6
7	3	6	5	5	6	1	4	3	4
3	5	5	7	4	4	5	6	7	2

Вариант 7

Вариационный ряд									
5	4	7	4	3	5	6	4	6	5
4	5	5	6	5	7	4	6	3	4
6	7	5	4	4	4	5	4	3	8
6	6	7	6	6	7	6	7	4	5
6	3	5	2	3	5	4	6	6	5
5	3	4	7	7	5	5	3	5	5
3	6	6	5	4	6	6	3	4	4
8	7	2	7	3	7	5	7	4	3
8	1	2	3	4	6	3	7	8	5
5	5	4	2	6	2	2	3	3	1

Вариант 10

Вариационный ряд									
6	5	6	4	4	5	6	3	7	6
7	7	5	4	5	4	4	6	4	7
6	6	4	7	5	5	6	7	7	4
4	5	7	6	3	4	7	5	3	5
5	4	7	6	6	5	4	4	7	6
6	5	4	7	4	5	6	5	4	5
6	5	5	6	4	4	6	5	5	7
4	6	5	4	7	4	5	6	6	5
4	4	6	5	7	6	5	5	6	4
4	4	6	5	4	4	6	7	6	5

Вариант 8

Вариационный ряд									
5	5	6	5	3	3	2	2	5	7
7	10	5	5	5	3	5	2	9	3
4	4	5	3	5	6	5	5	5	5
2	3	3	3	6	5	5	7	8	5
4	6	4	7	5	5	3	6	4	5
3	4	6	5	6	2	6	6	3	4
4	5	5	3	4	6	6	3	6	7
5	6	5	6	7	4	6	3	6	4
5	7	5	4	5	5	2	6	6	4
5	5	6	3	4	5	5	7	3	4

Вариант 11

Вариационный ряд									
6	4	2	6	4	6	5	6	9	3
5	8	4	3	5	4	3	8	5	6
4	5	2	6	7	5	8	4	6	4
7	3	5	3	6	6	7	3	6	1
6	4	5	8	4	6	8	7	7	4
6	4	4	5	3	9	3	4	3	6
6	4	5	6	7	3	6	5	4	4
4	8	2	5	3	4	3	2	6	5
4	5	7	5	5	7	2	2	5	6
5	4	3	2	7	7	6	6	3	3

Вариант 9

Вариационный ряд									
4	4	5	5	3	3	6	5	7	5
2	8	7	6	4	5	6	4	4	6
7	4	4	2	3	7	7	4	6	7
4	4	4	7	8	5	3	4	7	3
2	5	7	5	8	8	5	5	4	8
5	5	4	2	4	6	6	6	4	4
6	2	6	3	8	5	3	5	7	3
3	2	6	5	3	7	3	6	6	8
6	7	6	3	6	5	5	5	6	5
7	5	7	4	4	3	5	8	6	6

Вариант 12

Вариационный ряд									
6	6	4	4	6	6	6	3	7	7
5	5	6	6	6	5	5	6	6	4
2	5	6	6	7	7	5	5	5	3
3	5	6	5	5	6	9	3	3	5
7	6	6	2	5	6	5	5	5	7
3	3	4	7	6	6	6	5	4	4
5	6	5	6	7	6	9	5	5	6
3	3	5	7	6	6	7	5	6	3
4	5	6	6	7	7	7	5	5	3
3	7	2	4	4	5	6	5	3	5

Вариант 13

Вариационный ряд									
5	4	4	6	6	7	5	5	5	6
3	7	5	5	8	4	9	6	5	5
7	7	6	6	4	6	7	3	4	3
7	8	5	5	3	7	4	5	5	2
4	6	5	3	5	4	6	7	6	0
2	3	6	3	2	4	7	4	2	3
6	6	6	2	5	6	4	5	6	3
4	2	3	5	7	7	5	3	5	3
5	5	5	6	3	3	2	6	4	5
2	6	5	6	4	7	6	7	2	2

Вариант 16

Вариационный ряд									
5	6	7	4	6	5	2	7	5	4
3	4	6	3	5	5	3	5	4	8
4	5	5	5	6	5	5	9	4	7
8	4	5	3	6	7	4	3	6	8
7	5	5	5	6	4	5	5	6	5
5	6	9	6	4	6	5	5	4	5
4	3	7	6	4	8	3	4	3	6
7	2	6	3	2	7	5	7	4	6
6	3	3	6	7	5	1	6	4	6
3	4	6	7	2	5	7	5	6	6

Вариант 14

Вариационный ряд									
6	4	5	7	4	7	4	3	5	5
3	8	5	5	5	6	6	6	7	8
4	4	4	6	5	4	6	5	6	5
3	8	4	5	7	3	4	5	3	1
6	5	6	4	2	7	3	4	4	5
4	5	4	6	5	8	6	4	4	6
5	9	6	4	5	4	6	6	7	5
6	6	4	8	6	5	5	6	3	5
4	6	4	5	0	4	5	3	4	6
5	6	6	5	6	3	5	5	4	6

Вариант 17

Вариационный ряд									
5	6	3	6	5	4	3	5	6	3
7	3	4	5	7	6	4	5	4	1
6	2	4	6	5	6	6	6	3	6
4	6	5	4	7	6	6	5	7	5
6	6	7	5	5	7	7	7	6	6
6	2	3	4	4	3	4	4	4	7
5	2	1	4	4	4	3	3	3	7
7	5	4	6	6	6	6	5	6	4
6	4	5	4	5	4	2	3	7	4
5	6	5	4	2	5	3	5	5	8

Вариант 15

Вариационный ряд									
3	8	2	9	9	3	4	5	3	4
6	4	5	1	6	6	3	8	5	3
4	3	6	6	5	4	6	5	5	3
5	7	7	5	4	6	5	6	5	2
4	4	7	7	8	3	4	6	8	4
9	5	4	5	3	4	5	7	4	4
3	3	7	4	4	5	4	4	4	4
4	5	5	7	1	3	6	6	6	7
6	7	6	4	6	6	3	3	3	5
4	7	4	7	4	6	4	5	5	4

Вариант 18

Вариационный ряд									
7	5	5	6	7	4	5	7	3	6
7	5	5	3	6	4	5	5	3	5
4	4	6	5	6	6	5	3	3	7
5	7	3	7	2	5	6	5	3	7
6	4	3	4	5	5	2	4	5	6
8	6	7	5	5	4	6	1	5	5
6	10	1	7	6	4	6	8	5	3
5	5	4	5	2	4	4	6	4	6
6	6	4	6	5	6	7	5	5	7
4	1	7	4	4	4	8	8	4	5

Вариант 19

Вариационный ряд									
6	4	4	7	3	2	6	5	3	4
9	6	7	5	7	4	1	3	5	7
5	5	4	4	7	7	7	5	6	1
5	4	4	7	4	3	8	6	4	5
7	5	6	5	5	2	6	6	6	4
4	2	5	7	4	7	7	5	8	5
6	5	5	8	5	6	3	4	3	6
5	3	3	5	7	5	4	5	5	5
3	5	5	3	8	5	6	9	4	3
5	4	3	5	6	7	7	3	3	5

Вариант 22

Вариационный ряд									
4	6	4	6	7	5	6	4	5	4
8	7	10	6	3	3	4	6	4	7
3	5	2	2	6	5	4	3	6	5
5	5	6	7	6	4	7	5	6	6
7	6	3	2	4	5	5	4	5	4
5	6	3	5	3	5	8	5	3	6
5	6	6	6	4	4	5	7	6	6
4	5	2	4	4	4	5	2	7	2
7	0	4	8	4	6	5	6	6	4
5	6	6	6	6	6	6	4	4	6

Вариант 20

Вариационный ряд									
3	4	4	4	6	6	8	5	5	2
3	6	8	3	7	3	6	3	5	4
8	4	6	5	6	7	4	4	4	5
6	2	7	6	7	6	3	4	7	6
5	4	6	4	4	3	5	6	7	6
5	6	5	6	6	9	5	1	5	5
4	7	3	1	4	1	4	2	3	4
6	7	5	2	3	8	3	8	9	7
3	5	4	2	5	7	4	5	6	5
5	5	4	5	7	5	2	4	5	7

Вариант 23

Вариационный ряд									
6	7	4	5	3	7	3	5	4	6
7	5	8	6	6	2	7	8	6	3
4	2	6	6	5	7	3	8	9	5
6	7	5	2	4	7	5	4	6	5
5	4	7	3	5	4	4	5	5	4
6	3	5	9	3	4	5	6	4	3
4	5	5	6	7	6	4	8	2	7
5	5	3	6	4	6	5	4	5	6
4	4	6	5	3	5	7	4	5	3
6	7	4	2	3	6	5	5	7	3

Вариант 21

Вариационный ряд									
1	7	3	6	0	6	6	4	4	5
6	3	5	5	8	5	3	7	4	6
4	2	6	6	6	5	6	6	3	4
5	4	8	4	5	5	5	5	7	5
4	4	5	5	6	5	6	6	3	6
6	5	3	2	3	3	7	5	5	3
4	4	1	7	5	5	7	5	4	5
4	6	7	5	7	6	6	6	5	2
2	5	3	5	5	6	6	5	6	4
4	7	7	2	3	6	5	7	5	5

Вариант 24

Вариационный ряд									
5	6	7	4	5	6	4	3	2	5
4	6	7	8	5	1	8	7	3	6
4	5	4	3	4	6	6	3	3	2
5	5	3	2	4	7	5	3	2	6
2	6	6	5	6	3	1	7	5	6
4	4	5	4	1	7	6	3	7	3
4	8	3	9	7	7	5	3	4	6
4	4	7	5	0	8	4	8	6	3
7	5	2	6	6	8	5	7	6	7
4	4	3	4	4	5	3	4	3	4