УДК 531.31

Кинематика: Методические указания к выполнению курсовой работы / Сост.: Н. Б. Новиков, В. Ю. Скворцов, В. А. Евгеньев. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2002. 28 с.

Курсовая работа является основной формой самостоятельной работы студентов по курсу «Теоретическая механика» и имеет целью закрепление навыков к практическому применению теории по разделу «Кинематика». Рассматриваются две задачи по темам: «Кинематика точки» и «Плоское движение твердого тела».

Предназначены для студентов всех факультетов и специальностей СПбГЭТУ «ЛЭТИ», изучающих кинематику в курсе «Теоретическая механика».

Утверждено

редакционно-издательским советом университета

в качестве методических указаний

ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

Курс теоретической механики имеет целью дать студентам знание основных законов механического движения материальных тел и систем тел под действием приложенных к ним сил, а также привить навыки к использованию этих законов при решении теоретических и практических задач в различных областях физики и техники.

При выполнении представленных заданий необходимо проанализировать движение точки и элементов механической системы. Практическое знание законов кинематики позволит в дальнейшем перейти к решению задач динамики сложных систем, что, в конечном счете, и является целью курса теоретической механики.

В данных методических указаниях использованы материалы работ [1], [2].

При выполнении курсовой работы должны быть соблюдены следующие требования:

1. Работу необходимо оформить на листах формата А4 и затем скрепить их. Титульный лист должен иметь следующий вид:

С.-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»

Кафедра .....

Курсовая работа по теоретической механике

Задание №....., вариант №.....

Выполнил студент .....

(факультет, курс, группа, фамилия, имя, отчество)

Руководитель .....

Дата .....

2. Текст каждой задачи переписывается полностью. Исходные данные, используемые при решении (числовые значения величин, заданные уравнения и т. п.), должны быть приведены в виде таблицы.

3. Решение каждой задачи сопровождается краткими пояснениями. Как минимум, должны быть названы буквенные обозначения всех величин.

4. Все вычисления следует выполнять в общем виде, приводя полностью производимые промежуточные преобразования. Числовые значения величин подставляются в окончательные результаты преобразований, причем строго в

том порядке, в котором записаны буквенные значения. При вычислении кинематических характеристик движения материальных объектов обязательно приводить все необходимые векторные формулы.

5. При выполнении курсовой работы все вычисления с точностью до трех верных знаков приводятся с достаточной подробностью, исключающей необходимость восстановления опущенных (не приведенных) промежуточных выкладок во время проверки.

6. Чертежи вычерчиваются на миллиметровке аккуратно и точно, с соблюдением выбранного масштаба. Выбранные масштабы длин, скоростей, ускорений, сил изображаются на соответствующем чертеже. На чертеже должны быть обозначены все величины (расстояния, углы и т. д.), используемые при решении задачи, а также все найденные величины (векторы скорости, ускорения и т. д.), причем последние выделяются более жирными линиями или линиями не черного цвета. Над буквами, обозначающими векторы, надо ставить черточки.

Все необходимые для выполнения работы формулы и определения приведены в примерах выполнения заданий.

Задача 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ ПРИ КООРДИНАТНОМ СПОСОБЕ ЗАДАНИЯ ЕЕ ДВИЖЕНИЯ

1.1. Условия задачи

По заданным кинематическим уравнениям движения точки (табл. 1.1) определить:

1) траекторию точки;

2) вектор скорости, вектор ускорения, а также радиус кривизны траектории точки в момент времени $t_1 = t_0 + \Delta\tau$, где t_0 определяется по указанному в графе 4 табл. 1.1 условию, а $\Delta\tau$ задается преподавателем.

Таблица 1.1

Номер варианта	$x = x(t)$, м	$y = y(t)$, м	τ_0 – момент времени, когда впервые после начала движения точки выполняется условие
1	2	3	4
1	$1+2\sin\frac{\pi t}{2}$	$2+3\cos\frac{\pi t}{2}$	$y = [y]_{min}$
2	$2\sin\frac{\pi t}{3}$	$4\cos^2\frac{\pi t}{3}$	Траектория пересекает ось y
3	$2t$	$2\cos^2 4t$	$y = [y]_{max}$
4	$\frac{1}{2}\sin t$	$1-\sin^2 t+2\sin t$	$x = \frac{1}{2}[x]_{max}$
5	$3\sin 2t+2$	$4\cos 2t-1$	$x = [x]_{min}$
6	$4\cos 6t$	$1+2\sin 3t$	Траектория пересекает ось y
7	$4t^2$	$3\sin^2\pi t$	$y = [y]_{max}$
8	$4\sin\frac{\pi t}{2}$	$1-\sin^2\frac{\pi t}{2}$	Траектория пересекает ось y
9	t	$\frac{e^t+e^{-t}}{2}-8$	$y(\tau_0) = 1$
10	$2\sin^2\frac{\pi t}{2}$	$\frac{t^2}{9}$	$x = [x]_{min}$
11	$1-\sin\frac{\pi t}{4}$	$1-\sin\frac{\pi t}{4}$	$x = [x]_{max}$
12	$5\cos 2t-3$	$8\sin 2t+4$	Траектория пересекает ось x

Окончание табл. 1.1

Номер варианта	$x = x(t)$, м	$y = y(t)$, м	τ_0 – момент времени когда впервые после начала движения точки выполняется условие
1	2	3	4
13	$\frac{e^{(t-1)}+e^{-(t-1)}}{2}$	$4t$	$x = [x]_{max}$
14	$8\cos^2\frac{\pi t}{2}$	$2\sin\frac{\pi t}{2}-1$	$x = [x]_{max}$
15	$e^{-(2t-1)}$	$2t-1$	Траектория пересекает ось x
16	$2\sin\frac{\pi t}{2}$	$2\cos\pi t$	$y = [y]_{max}$
17	$\frac{1}{4}t^2$	$2\ln(t+1)-\frac{t^2}{2}$	$v_y = 0$
18	$2\sin^2\frac{\pi t}{2}$	t^2-1	$v_x = 0$
19	$\frac{e^{\frac{t-1}{2}}+e^{-\frac{t-1}{2}}}{2}$	$\frac{e^{\frac{t-1}{2}}-e^{-\frac{t-1}{2}}}{2}$	Расстояние точки до начала координат равно 1 см
20	$\sin\frac{\pi t}{3}$	$2\left(\sin\frac{\pi t}{3}-\frac{1}{4}\right)^3$	$v_x = [v_x]_{max}$
21	$\cos\frac{\pi t}{3}$	$3+2\sin\frac{\pi t}{2}$	$x = [x]_{max}$
22	t^2-t	$e^{-2(t^2-t)}$	Траектория пересекает ось y
23	$1+e^{-\frac{t^2}{2}}$	$1+e^{-\frac{t^2}{2}}$	$v_x = [v_x]_{max}$
24	$\cos 2\pi t$	$\left(\cos 2\pi t-\frac{1}{3}\right)^2$	$y = [y]_{min}$
25	$2\sin 2t\,(\sin 2t-2)$	$\sin 2t$	Траектория пересекает ось y
26	$2\sin\frac{\pi t}{2}-3$	$4\cos\frac{\pi t}{2}+4$	$v_y = 0$
27	$\frac{t^2}{3}+2$	$\ln(t^2+1)-3$	Траектория пересекает ось x
28	$\frac{t^2}{2}-4$	e^{-t^2}	Траектория пересекает ось y
29	$-3\cos\pi t+5$	$3\sin\pi t$	Расстояние от точки до начала координат – наименьшее
30	$2t^2-1$	$3\cos\pi t$	$a_y = [a_y]_{min}$

1.2. Порядок выполнения работы

1. Построить траекторию точки, исследуя ее уравнение средствами математического анализа.

2. Определить момент времени t_1 в соответствии с заданным в табл. 1.1 условием и указать положение точки на траектории в этот момент.

3. Построить по составляющим $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$ вектор скорости точки $\vec{v}$ в расчетный момент времени.

4. Построить по составляющим $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ вектор $\vec{a}$ ускорения в расчетный момент времени.

5. Вычислить модули касательного $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений, а также радиус кривизны траектории в расчетный момент времени. Указать на графике $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$, $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ (в масштабе), где $\vec{a}_x = a_x\vec{i}$, $\vec{a}_y = a_y\vec{j}$.

6. Расчетные значения определяемых величин представить в форме табл. 1.2.

Таблица 1.2

Время t, с	Координаты, м		Скорость, м/с			Ускорение, м/с²					Радиус кривизны ρ, м
	x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a_τ	a_n	a	

7. Все графические построения производятся в масштабах:
– для траектории и координат – м;
– для скоростей – м/с;
– для ускорений – м/с².

1.3. Пример выполнения задания

По заданным кинематическим уравнениям движения точки (x и y – в метрах)

$$x = 2\cos t; \quad (1.1)$$

$$y = 4\cos 2t \quad (1.2)$$

определить: 1) траекторию точки; 2) вектор скорости, вектор ускорения, а также радиус кривизны траектории в момент времени, когда точка второй раз после начала движения пересекает ось x.

Решение. Для определения траектории точки исключим из уравнений (1.1) и (1.2) время t. Для этого представим (1.2) в виде

$$y = 4\cos 2t = 4(\cos^2 t - \sin^2 t) = 2(4\cos^2 t - 2).$$

Подставляя сюда выражение $\cos^2 t$ из (1.1), получим уравнение траектории точки в виде

$$y = 2(x^2 - 2). \qquad (1.3)$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$-2 \leqslant x \leqslant 2 \quad \text{и} \quad -4 \leqslant x \leqslant 4. \qquad (1.4)$$

Таким образом, траектория точки есть дуга параболы (1.3), координаты точек которой удовлетворяют условию (1.4).

Из (1.3) следует, что кривая, которой принадлежит траектория точки, симметрична относительно оси y.

Находим $\dfrac{dy}{dx} = 4x$; $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4$.

Из условия $y'_x = 0$ получаем, что экстремум функции $y = y(x)$ достигается при $x_1 = 0$. Так как при этом $y''_x > 0$, то при $x_1 = 0$ функция $y(x)$ принимает минимальное значение и $y_{\min} = y(x_1) = -4$. Определим точки пересечения кривой (1.3) с осью x. Из условия $y(x) = 0$ получаем:

$$x_1 = -\sqrt{2} \quad \text{и} \quad x_2 = +\sqrt{2}.$$

Отметим дополнительно, что для функции $y = 2(x^2 - 2)$ имеет место следующее условие: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = +\infty$.

Указанные свойства функции $y = y(x) = 2(x^2 - 2)$, а именно:

1) симметрия относительно оси y;

2) наличие единственного экстремума (минимума) при $x_1 = 0$;

3) нули функции (в точках $x_1' = -\sqrt{2}$ и $x_2' = +\sqrt{2}$);

4) знак второй производной ($\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$ при всех x);

5) поведение функции на бесконечности – позволяют построить график функции $y = y(x)$.

Вместе с тем, используя условие (1.4), можно выделить на этом графике дугу, которая является траекторией точки. Для уточнения вида кривой целесообразно подсчитать по формулам (1.3) и (1.4) несколько промежуточных точек. Так, при $x = \pm 0{,}5$; $y = -3{,}5$; при $x = \pm 2$; $y = 4$. Данные, необходимые для построения траектории, приводим в табл. 1.3, а траекторию на рис. 1.1.

Таблица 1.3

x	x^2	$x^2 - 2$	$y = 2(x^2 - 2)$
0	0	–2	–4
±0,5	0,25	–1,75	–3,5
$\pm\sqrt{2}$	2	0	0
±2	4	2	4

Определим момент времени, когда точка пересекает ось x во второй раз после начала движения. Из (1.2) получаем, что впервые после начала движения ($t_{\text{нач}} = 0$) $y = 0$ при $t = \pi/4$, а во второй раз $y = 0$ при $\tau_0 = -(3/4)\pi$ с. Положим $\Delta\tau = 0$, тогда $t_1 = \tau_0 + \Delta\tau = (3/4)\pi$ с. В этот момент t_1 и надлежит определять искомые кинематические характеристики движения точки.

Вычислим координаты точки M в момент времени $t_1 = (3/4)\pi$ с:

$$x(t)\big|_{t=t_1} = 2\cos\frac{3}{4}\pi = -\sqrt{2} = -1{,}414 \quad \text{м};$$

$$y(t)\big|_{t=t_1} = 4\cos\left(2\cdot\frac{3}{4}\pi\right) = 0.$$

Проекции вектора скорости на координатные оси и модуль вектора скорости находим по формулам

$$v_x = \dot{x}; \quad v_y = \dot{y}; \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \qquad (1.5)$$

Для заданных уравнений движения (1.1) и (1.2) имеем:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -2\sin t; \\ v_y &= -8\sin t; \\ v &= \sqrt{(2\sin t)^2 + (8\sin 2t)^2} = 2\sqrt{\sin^2 t + 16\sin^2 2t} \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

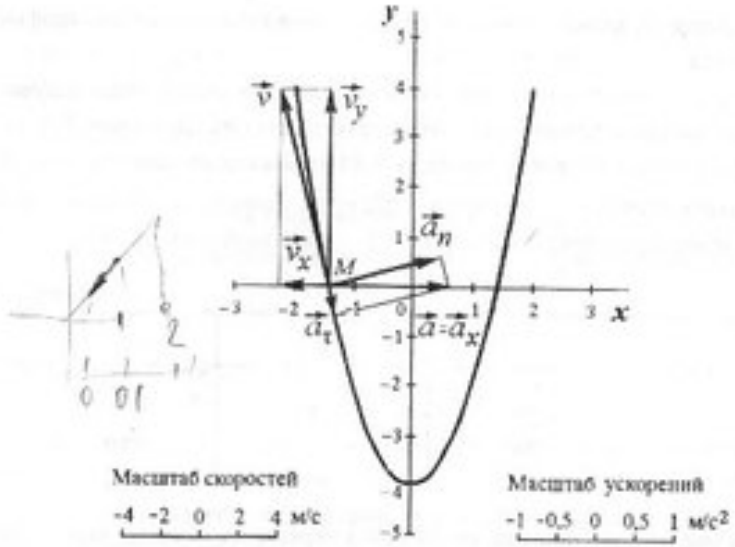

Рис. 1.1

и для момента времени $t_1 = (3/4)\,\pi$ с получим:

$$v_x\big|_{t=t_1} = -2\sin t_1 = -2\sin\frac{3}{4}\pi = -\sqrt{2} = -1{,}414 \quad \text{м/с};$$

$$v_y\big|_{t=t_1} = -8\sin 2t_1 = -8\sin\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = 8 \quad \text{м/с};$$

$$v\big|_{t=t_1} = 2\sqrt{\sin^2 t_1 + 16\sin^2 2t_1} =$$

$$= 2\sqrt{\sin^2\frac{3}{4}\pi + 16\sin^2\left(2\frac{3}{4}\pi\right)} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{2} + 16} = \sqrt{66} = 8{,}124 \quad \text{м/с}.$$

Проекции вектора ускорения на координатные оси и значение ускорения определяем по формулам

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x};\\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y};\\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.7)$$

Из (1.7) для заданных уравнений движения (1.1) и (1.2) с учетом (1.6) получим:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= -2\cos t;\\ a_y &= -16\cos 2t;\\ a &= \sqrt{(2\cos t)^2 + (16\cos 2t)^2} = 2\sqrt{\cos^2 t + 64\cos^2 2t}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.8)$$

Из (1.8) для заданного момента времени $t_1 = (3/4)\,\pi$ с получим:

$$a_x\big|_{t=t_1} = -2\cos\frac{3}{4}\pi = \sqrt{2} = 1{,}414 \quad \text{м/с}^2;$$

$$a_y\big|_{t=t_1} = 16\cos\left(2\frac{3}{4}\pi\right) = 0;$$

$$a\big|_{t=t_1} = \sqrt{\left(2\cos\frac{3}{4}\pi\right)^2 + \left[16\cos\left(2\frac{3}{4}\pi\right)\right]^2} = 1{,}414 \quad \text{м/с}^2.$$

Касательное и нормальное ускорения определяем по формулам:

$$\left.\begin{aligned} a_\tau &= \frac{dv}{dt};\\ a_n &= \sqrt{a^2 - a_\tau^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

В соответствии с (1.6) и (1.9) имеем:

$$a_\tau = 2\left|\frac{d}{dt}\sqrt{\sin^2 t_1 + 16\sin^2 2t_1}\right| =$$

$$= 2\left|\frac{2\sin t\cdot\cos t + 16\cdot 2\cdot 2\sin 2t\cdot\cos 2t}{2\sqrt{\sin^2 t_1 + 16\sin^2 2t_1}}\right| =$$

$$= \frac{2|\sin t\cdot\cos t\,(1 + 64\cos 2t)|}{|\sin t|\sqrt{1 + 64\cos^2 t}} = 2\frac{|\cos t\,(1 + 64\cos 2t)|}{\sqrt{1 + 64\cos^2 t}}. \qquad (1.10)$$

При $t_1 = (3/4)\,\pi$ с получим:

$$a_\tau\big|_{t=t_1} = 2\frac{\left|\cos\frac{3}{4}\pi\left[1 + 64\cos\left(2\frac{3}{4}\pi\right)\right]\right|}{\sqrt{1 + 64\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi\right)}} =$$

$$= 2\frac{\left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|}{\sqrt{1+64\cos^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+32}} = \frac{1{,}414}{5{,}744} = 0{,}246 \quad \text{м/с}^2;$$

если скорость выражена достаточно сложной функцией, то вместо (1.10) проще использовать следующую формулу для $\vec{a}_\tau$, полученную дифференцированием (1.5) по времени:

$$a_\tau = \left|\frac{d}{dt}\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right| = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}\right|;$$

$$a_n = \sqrt{a^2(t_1) - a_\tau^2(t_1)} = \sqrt{1{,}414^2 - 0{,}246^2} = \sqrt{2 - 0{,}0605} = \sqrt{1{,}9395} = 1{,}389 \quad \text{м/с}^2.$$

Строим в масштабе составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ ускорения на графике; их сумма геометрически должна быть равной полному ускорению точки $\vec{a}$.

Радиус кривизны траектории вычислим по формуле

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

Для заданного момента времени $t_1 = (3/4)\,\pi$ с имеем:

$$\rho = \frac{v^2(t_1)}{a_n(t_1)} = \frac{(8{,}124)^2}{1{,}389} = 47{,}52 \quad \text{м}.$$

Полученные значения кинематических величин для расчетного момента времени t_1 приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Время t_1, с	Координаты, м		Скорость, м/с			Ускорение, м/с²					ρ, м
	x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a_τ	a_n	a	
$\frac{3}{4}\pi$	−1,414	0	−1,414	8	8,124	1,414	0	0,246	1,389	1,414	47,52

Равенство геометрической суммы $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$, а также $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ одному и тому же вектору $\vec{a}$ (при построении в одном масштабе) свидетельствует о правильности произведенных расчетов.

Задача 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

2.1. Условия задачи

В шарнирном четырехзвенном плоском механизме $OABO_1DE$ (рис. 2.1, схемы 1–3) ведущее звено OA равномерно вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O. Звено O_1B имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку O_1. Точка E движется прямолинейно по вертикали вдоль оси ξ. Каток радиуса r движется без скольжения по неподвижной поверхности.

Номер схемы механизма, размеры звеньев, угловая скорость ведущего звена ω_{OA} и его положение для каждого из вариантов приведены в табл. 2.1. Для выданного варианта задания необходимо в указанном положении механизма найти скорости точек A, B, D, E и диаметрально противоположных точек G, H обода катка, ускорение точки B, а также угловые скорости всех звеньев и угловые ускорения звеньев AB и O_1B.

2.2. Порядок выполнения работы

1. Для заданного положения механизма требуется определить скорости точек B, D, E, G и H, используя способ мгновенного центра скоростей, поэтому перед выполнением графической части работы следует:

а) определить скорость точки A;

б) найти мгновенные центры скоростей для всех звеньев механизма и, оценив их расположение, выбрать масштаб длин таким образом, чтобы мгновенные центры скоростей располагались в пределах чертежа;

в) начертить в выбранном масштабе схему механизма, указав на ней мгновенные центры скоростей всех звеньев и векторы скоростей всех указанных ранее точек. Масштаб скоростей может отличаться от масштаба длин. На чертеже требуется указать принятые масштабы длин и скоростей.

2. Применяя способ мгновенного центра скоростей, определить и показать на схеме направление вращения всех звеньев механизма.

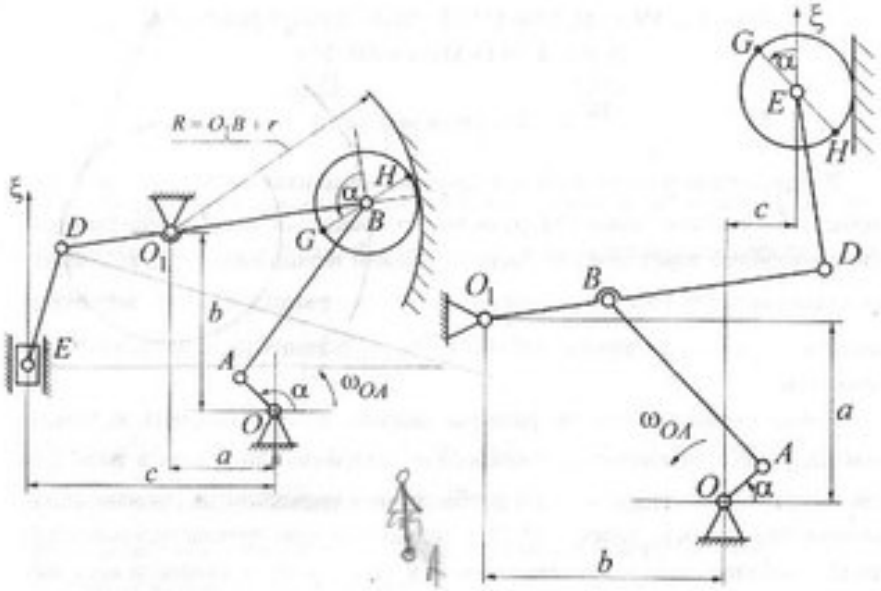

Схема 1

Схема 2

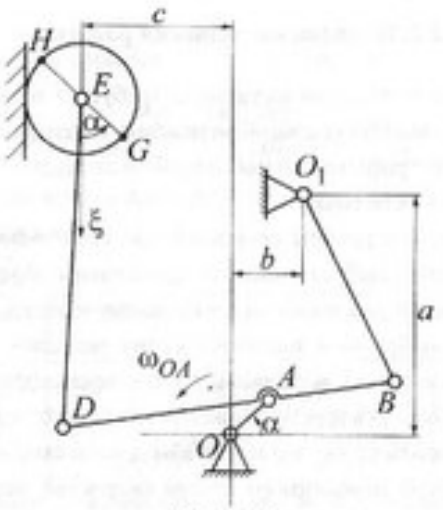

Схема 3

Рис. 2.1

Таблица 2.1

№ варианта	№ схемы	Размеры, м								α, ...°	ω_{OA}, c^{-1}	r, м
		OA	*AB*	O_1B	*BD*	*DE*	*a*	*b*	*c*			
1	2	2,5	12,5	7,5	3,5	12,0	12,0	4,0	4,0	45	40	6,0
2	1	2,5	10,0	7,5	10,5	8,0	6,5	9,0	13,0	45	20	4,0
3	3	6,0	7,5	17,5	15,0	18,0	16,0	5,0	7,0	90	10	8,0
4	2	2,5	12,5	7,5	3,5	12,0	12,0	4,0	4,0	90	40	4,0
5	1	2,5	10,0	7,5	10,5	8,0	6,5	9,0	13,0	60	20	4,5
6	3	6,0	7,5	17,5	15,0	22,5	16,0	5,0	7,0	210	10	10,0
7	2	2,5	13,0	7,5	3,5	10,0	12,0	4,0	4,0	135	40	4,0
8	1	4,0	20,0	10,0	14,0	15,0	12,0	15,0	21,0	135	25	5,0
9	3	6,0	7,5	17,5	15,0	22,5	16,0	5,0	7,0	300	10	8,0
10	2	4,0	15,0	8,0	6,0	20,0	17,5	5,0	6,0	180	30	5,0
11	1	4,0	20,0	10,0	14,0	15,0	12,0	15,0	21,0	180	25	5,5
12	3	6,0	7,5	17,5	15,0	22,5	16,0	5,0	7,0	315	10	8,0
13	2	4,0	15,0	8,0	6,0	20,0	17,5	5,0	6,0	225	40	6,0
14	1	5,0	17,5	16,0	23,5	18,0	14,0	19,0	27,0	225	25	6,0
15	3	4,0	5,0	13,0	10,0	18,0	11,0	3,0	4,5	270	15	6,5
16	2	4,0	18,0	8,0	6,0	20,0	17,5	5,0	6,0	270	30	5,0
17	1	5,0	20,0	16,0	23,5	16,0	14,0	19,0	27,0	270	25	6,5
18	3	4,0	5,0	12,0	10,0	16,0	11,0	3,0	4,5	225	15	5,5
19	2	5,0	20,0	10,0	6,0	25,0	21,0	6,0	7,0	315	30	9,0
20	1	6,0	20,0	17,5	25,0	20,0	16,0	20,0	30,0	315	30	8,0
21	3	4,0	5,0	12,5	10,0	12,0	10,0	3,0	4,5	180	15	4,0
22	2	5,0	20,0	10,0	6,0	25,0	21,0	6,0	7,0	300	30	10,0
23	1	6,0	20,0	17,5	25,0	20,0	16,0	20,0	30,0	300	30	7,0
24	3	2,5	3,0	7,5	6,0	10,0	7,5	2,0	3,0	135	8	4,0
25	2	5,0	20,0	10,0	6,0	20,0	21,0	6,0	7,0	210	30	8,0
26	1	8,0	35,0	25,0	40,0	25,0	20,0	25,0	40,0	120	20	10,0
27	3	2,5	3,0	7,5	6,0	7,5	7,5	2,0	4,5	75	8	3,5
28	2	5,0	21,0	10,0	6,0	20,0	21,0	6,0	7,0	120	30	10,0
29	1	8,0	35,0	25,0	35,0	25,0	20,0	25,0	40,0	150	20	9,0
30	3	2,5	3,0	7,5	6,0	7,5	7,5	2,0	3,0	60	8	3,0

3. Проверить правильность определения скорости $\vec{v}_B$ точки B, применяя способы: а) полюса; б) проекций.

4. Определить ускорение точки A и, используя способ полюса, найти ускорение точки B. Построить на схеме в выбранном масштабе ускорение $\vec{a}_A$ точки A и ускорение $\vec{a}_B$ точки B с его составляющими. Указать масштаб ускорений.

5. Проверить правильность определения ускорения $\vec{a}_B$ построением многоугольника ускорений.

2.3. Пример выполнения задания

В шарнирном плоском механизме $OMNO_1DE$ (рис. 2.2, *а*) ведущее звено OM равномерно вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку O. Звено O_1N имеет неподвижную ось вращения, проходящую через точку O_1. С шатуном MN жестко связан прямоугольный треугольник MNL. Каток с центром E движется прямолинейно вдоль горизонтальной направляющей. Элементы механизма: звено LE, жесткий треугольник MNL и каток с центром E – совершают плоскопараллельное движение. Данные для решения задачи приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

№ варианта	№ схемы	Размеры, м									α, ...°	ω_{OM}, c^{-1}
		OM	MN	ML	NL	O_1N	LE	a	c	r		
31	4	3,0	8,0	5,65	5,65	8,0	13,0	13,0	1,5	3,0	60	20

Решение.

1. Определение скорости точки M:

$$\vec{v}_M = \vec{\omega}_{OM} \times \overrightarrow{OM} \qquad (2.1)$$

откуда $v_M = \omega_{OM} \sin 90° = 20 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ м/с.

2. Построение мгновенных центров скоростей:

а) мгновенными центрами скоростей звеньев OM, O_1N и катка будут, соответственно, точки O, O_1 и P_{GH};

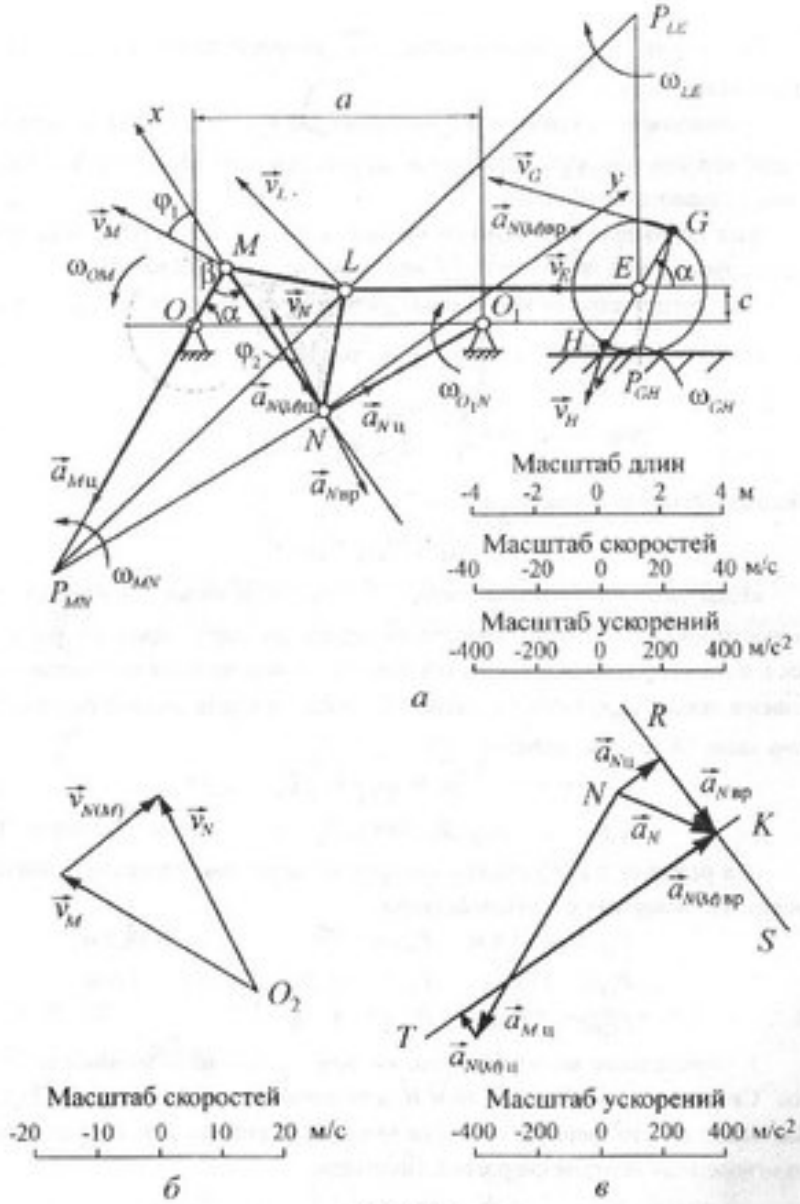

Рис. 2.2

б) для звена MNL известен вектор $\vec{v}_M$ скорости точки M и линия вектора скорости точки N.

Положение мгновенного центра скоростей P_{MN} звена MNL определится точкой пересечения перпендикуляров, проведенных из точек M и N к направлениям скоростей этих точек.

Зная положение мгновенного центра скоростей звена MNL, определяем направление скоростей точек N и L жесткого треугольника MNL.

Для этого построим мгновенные радиус-векторы $P_{MN}N$ и $P_{MN}L$ этих точек. Так как $\vec{v}_N \perp P_{MN}N$ и $\vec{v}_L \perp P_{MN}L$, то

$$\left.\begin{aligned} v_N &= \omega_{MN} \cdot P_{MN}N, \\ v_L &= \omega_{MN} \cdot P_{MN}L. \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

Аналогично можно записать и для v_M:

$$v_M = \omega_{MN} \cdot P_{MN}M; \qquad (2.3)$$

в) для звена LE известны вектор $\vec{v}_L$ скорости точки L и линия вектора скорости точки E. В точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек L и E к направлениям скоростей этих точек, определится положение мгновенного центра скоростей P_{LE} звена LE. Используя мгновенный центр скоростей звена LE, можно записать:

$$v_L = \omega_{LE} \cdot P_{LE}L; \qquad (2.4)$$

$$v_E = \omega_{LE} \cdot P_{LE}E; \qquad (2.5)$$

г) в результате графических построений получены следующие значения модулей мгновенных радиусов-векторов:

$P_{MN}M = 15{,}8$ м; $P_{MN}N = 14{,}4$ м; $P_{MN}L = 18{,}4$ м;
$P_{LE}L = 17{,}8$ м; $P_{LE}E = 12{,}2$ м; $P_{GH}H = 1{,}6$ м;
$P_{GH}E = 3{,}0$ м; $P_{GH}G = 5{,}8$ м.

3. Определение модулей скоростей точек с помощью мгновенных центров. Скорости точек N; L; E; G и H определяются по формулам (2.2)–(2.5). Как видно из этих формул, скорости точек пропорциональны их расстояниям до мгновенных центров скоростей. Получаем:

$$\frac{v_N}{v_M} = \frac{P_{MN}N}{P_{MN}M}; \quad \frac{v_N}{v_L} = \frac{P_{MN}N}{P_{MN}L}; \quad \frac{v_L}{v_E} = \frac{P_{LE}L}{P_{LE}E};$$

$$\frac{v_E}{v_H} = \frac{P_{GH}E}{P_{GH}H}; \quad \frac{v_E}{v_G} = \frac{P_{GH}E}{P_{GH}G}.$$

Отсюда

$$v_N = \frac{v_M}{P_{MN}M} \cdot P_{MN}N = \frac{60{,}0}{15{,}8} \cdot 14{,}4 = 54{,}7 \text{ м/с};$$

$$v_L = \frac{v_N}{P_{MN}N} \cdot P_{MN}L = \frac{54{,}7}{14{,}4} \cdot 18{,}4 = 70{,}0 \text{ м/с};$$

$$v_E = \frac{v_L}{P_{LE}L} \cdot P_{LE}E = \frac{70{,}0}{17{,}8} \cdot 12{,}2 = 48{,}0 \text{ м/с};$$

$$v_H = \frac{v_E}{P_{GH}E} \cdot P_{GH}H = \frac{48{,}0}{3{,}0} \cdot 1{,}6 = 25{,}6 \text{ м/с};$$

$$v_G = \frac{v_E}{P_{GH}E} \cdot P_{GH}G = \frac{48{,}0}{3{,}0} \cdot 5{,}8 = 92{,}8 \text{ м/с}.$$

4. Определение угловых скоростей звеньев механизма. Угловая скорость жесткого треугольника MNL может быть определена по любой из формул (2.2), (2.3):

$$\omega_{MN} = \frac{v_M}{P_{MN}M} = \frac{v_N}{P_{MN}N} = \frac{v_L}{P_{MN}L};$$

$$\omega_{MN} = \frac{60{,}0}{15{,}8} = \frac{57{,}7}{14{,}4} = \frac{70{,}0}{18{,}4} = 3{,}8 \text{ с}^{-1}.$$

Угловая скорость звена LE определится из формул (2.4), (2.5):

$$\omega_{LE} = \frac{v_L}{P_{LE}L} = \frac{v_E}{P_{LE}E};$$

$$\omega_{LE} = \frac{70{,}0}{17{,}8} = \frac{48{,}0}{12{,}2} = 3{,}93 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения угловых скоростей звена BO_1 и катка воспользуемся, соответственно, формулами

$$v_N = \omega_{O_1N} \cdot O_1N;$$

$$\omega_{O_1N} = \frac{v_N}{O_1N} = \frac{54{,}7}{8{,}0} = 6{,}85 \text{ с}^{-1}$$

и для катка

$$v_E = \omega_{GH} \cdot P_{GH} E,$$

$$\omega_{GH} = \frac{v_E}{P_{GH} E} = \frac{48,0}{3,0} = 16,0 \text{ с}^{-1}.$$

Полученные результаты приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Скорости точек, м/с							Угловые скорости звеньев, $с^{-1}$				
v_M	v_N	v_L	v_E	v_G	v_H	v_{AB}	ω_{OM}	ω_{O_1N}	ω_{AB}	ω_{DE}	ω_{GH}
60,0	54,7	70,0	48,0	92,7	25,6	30,5	20,0	6,85	3,8	3,93	16,0

По результатам вычислений в пп. 1–4 и по формулам (2.1)–(2.5) изобразим векторы скоростей точек M, N, L, E, H и G и направления вращения звеньев механизма на схемах (рис. 2.2, *а*, *б*).

5. Определение скорости точки N способом полюса. Для определения скорости точки N звена MN за полюс выбираем точку M, так как для нее известны значение и направление скорости, найденные по (2.1). Тогда скорость точки N определяется выражением

$$\vec{v}_N = \vec{v}_M + \vec{v}_{N(M)}$$

или

$$\vec{v}_N = \vec{v}_M + \vec{\omega}_{MN} \times \overrightarrow{MN}, \qquad (2.6)$$

где $\vec{v}_{N(M)} = \vec{\omega}_{MN} \times \overrightarrow{MN}$ – вращательная скорость точки N относительно полюса – точки M.

В (2.6) известны: величина и направление вектора $\vec{v}_M$; линия вектора $\vec{v}_N$; линия вектора $\vec{v}_{MN}$.

Построим треугольник скоростей (2.6). Из произвольной точки O_2 (рис. 2.2, *б*) в выбранном масштабе строим вектор $\vec{v}_M$ и прямую, параллельную вектору $\vec{v}_N$. Чтобы определить вершину треугольника, из конца вектора $\vec{v}_M$ проводим прямую, параллельную линии вектора $\vec{v}_{N(M)}$. Точка пересечения этой линии с линией вектора $\vec{v}_N$ определит вершину треугольника и, следовательно, конец вектора $\vec{v}_N$.

Из полученного векторного треугольника скоростей, пользуясь масштабом, находим: $v_N = 55,0$ см/с; $v_{N(M)} = 30$ см/с.

6. Применяя теорему проекций, определяем скорость точки N по известной скорости точки M, проецируя векторы $\vec{v}_N$ и $\vec{v}_M$ на MN:

$$v_N \cdot \cos\varphi_2 = v_M \cdot \cos\varphi_1.$$

Углы φ_1 и φ_2 определяем из чертежа механизма (рис. 2.2, *а*). Получаем $\varphi_2 = 5°$; $\varphi_1 = 25°$. Тогда $v_N \cos 5° = v_M \cos 25°$ и $v_N = \frac{60,0 \cdot 0,9063}{0,9962} = 54,7$ м/с. Сравнивая полученные в пп. 3, 5, 6 для скорости v_N значения, убеждаемся, что относительная погрешность не превышает допустимой – 5 %.

7. Аналитический способ определения ускорения точки N. Ускорение точки N определяется выражением

$$\vec{a}_N = \vec{a}_M + \vec{a}_{N(M)}, \qquad (2.7)$$

где $\vec{a}_M = \vec{a}_{M\,вр} + \vec{a}_{M\,ц}$ – ускорение точки M звена OM, которая принята за полюс; $\vec{a}_{N(M)}$ – ускорение точки N во вращательном движении звена MN вокруг выбранного полюса M. Вектор $\vec{a}_{N(M)}$ представим в виде

$$\vec{a}_{N(M)} = \vec{a}_{N(M)вр} + \vec{a}_{N(M)ц}, \qquad (2.8)$$

где $\vec{a}_{N(M)вр}$ – вращательная составляющая ускорения $\vec{a}_{N(M)}$; $\vec{a}_{N(M)ц}$ – центростремительная составляющая.

Имеем

$$a_{N(M)вр} = \varepsilon_{MN} \cdot MN; \qquad (2.9)$$

$$a_{N(M)ц} = \omega^2_{MN} \cdot MN. \qquad (2.10)$$

С другой стороны, поскольку точка N принадлежит кривошипу O_1N, вращающемуся вокруг оси O_1, то ускорение точки N слагается из центростремительного ускорения $\vec{a}_{N\,ц}$ и вращательного ускорения $\vec{a}_{N\,вр}$, т. е.

$$\vec{a}_N = \vec{a}_{N\,вр} + \vec{a}_{N\,ц}.$$

При этом

$$a_{N\,вр} = \varepsilon_{O_1N} \cdot O_1N; \qquad (2.11)$$

$$a_{N\,ц} = \omega^2_{O_1N} \cdot O_1N. \qquad (2.12)$$

Векторное уравнение (2.7) с учетом (2.8)–(2.12) можно записать в виде

$$\vec{a}_{N\,вр} + \vec{a}_{N\,ц} = \vec{a}_{M\,вр} + \vec{a}_{M\,ц} + \vec{a}_{N(M)вр} + \vec{a}_{N(M)ц}. \qquad (2.13)$$

Определяем модули ускорений, входящих в формулу (2.13):

$$a_{M\,ц} = \omega^2_{OM} \cdot OM = 20^2 \cdot 3 = 1200 \quad м/с^2;$$

$$a_{M\,вр} = \varepsilon_{OM} \cdot OM = 0, \text{ так как } \omega_{OM} = const;$$

$$a_{N\,ц} = \omega^2_{O_1N} \cdot O_1N = 6{,}85^2 \cdot 8{,}0 = 375{,}4 \quad м/с^2;$$

$$a_{N(M)ц} = \omega^2_{MN} \cdot MN = 3{,}8^2 \cdot 8{,}0 = 115{,}5 \quad м/с^2.$$

Вектор $\vec{a}_{N(M)ц}$ известен по направлению (он направлен от точки N к точке M). Ускорение $\vec{a}_{N\,вр}$ точки N

$$a_{N\,вр} = \varepsilon_{O_1N} \cdot O_1N \qquad (2.14)$$

и ее вращательное ускорение $\vec{a}_{N(M)вр}$

$$a_{N(M)вр} = \varepsilon_{MN} \cdot MN \qquad (2.15)$$

известны только по линиям действия. Определяем их величину аналитически.

Проведем перпендикулярно к неизвестному вектору $\vec{a}_{N(M)вр}$ (рис. 2.2, *а*) координатную ось Nx и спроектируем обе части векторного уравнения (2.13) на эту ось. Неизвестные векторы $\vec{a}_{N\,вр}$ и $\vec{a}_{N(M)вр}$ направляем по линиям их действия условно. В нашем случае вектор $\vec{a}_{N\,вр}$ направлен противоположно вектору $\vec{v}_N$, а вектор $\vec{a}_{N(M)вр}$ в положительном направлении оси Ny. Получим:

$$-a_{N\,ц}\cos(90^\circ - \gamma) - a_{N\,вр}\cos\gamma = -a_{M\,ц}\cos\beta + a_{N(M)ц}.$$

Необходимые углы β и γ определяем по рис. 2.2, *а*: $\beta = 66^\circ$ и $\gamma = 5^\circ$. Подставляем числовые значения величин:

$$-376{,}0 \cdot 0{,}0872 - a_{N\,вр} \cdot 0{,}9962 = -1200{,}0 \cdot 0{,}4067 + 115{,}5,$$

откуда

$$a_{N\,вр} = \frac{488{,}0 - 115{,}5 - 32{,}88}{0{,}9962} = 342{,}0 \quad м/с^2.$$

Полученный знак (+) указывает, что направление вектора $\vec{a}_{N\,вр}$ было выбрано правильно.

1110 1000 - 2см
14

Из формулы (2.14) следует, что

$$\varepsilon_{O_1N} = \frac{a_{N\,вр}}{O_1N} = \frac{342{,}0}{8{,}0} = 42{,}8 \ с^{-2}.$$

Определяем модуль искомого ускорения:

$$a_N = \sqrt{(a_{N\,ц})^2 + (a_{N\,вр})^2} = \sqrt{376^2 + 342^2} = 508 \quad м/с^2.$$

Для определения величины вектора $\vec{a}_{N(M)вр}$ проектируем обе части векторного уравнения (2.13) на ось Ny, перпендикулярную звену MN.

Получим:

$$a_{N\,ц}\cos\gamma - \left|a_{N\,вр}\right|\cos(90^\circ - \gamma) = -a_{M\,ц}\cos(90^\circ - \beta) + a_{N(M)вр}.$$

Подставляем числовые значения величин:

$$376{,}0 \cdot 0{,}9962 - 342{,}0 \cdot 0{,}0872 = -1200{,}0 \cdot 0{,}9135 + a_{N(M)вр},$$

откуда

$$a_{N(M)вр} = 1096 + 374 - 29{,}7 = 1440{,}3 \quad м/с^2.$$

Из формулы (2.15) следует, что

$$\varepsilon_{MN} = \frac{a_{N(M)вр}}{MN} = \frac{1440{,}3}{8{,}0} = 180{,}0 \ с^{-2}.$$

8. Графический способ определения $\vec{a}_{N\,вр}$, $\vec{a}_{N(M)вр}$ и $\vec{a}_N$. Проверим правильность определения этих векторов графически. Для этого по формулам (2.8)–(2.13) и вычисленным величинам составляющих ускорения точки B в выбранном масштабе строим многоугольник ускорений (рис. 2.2, *в*), т. е. графически представляем векторное равенство (2.13):

а) последовательно переносим векторы, составляющие равенство (2.13), со схемы (рис. 2.2, *а*) параллельно самим себе, в выбранном масштабе ускорений;

б) откладываем от произвольной точки N вектор ускорения полюса $\vec{a}_{M\,ц}$;

в) из конца вектора $\vec{a}_{M\,ц}$ откладываем вектор $\vec{a}_{N(M)ц}$;

г) из конца вектора $\vec{a}_{N(M)ц}$ проводим прямую KT, параллельную линии вектора $\vec{a}_{N(M)вр}$;

д) с другой стороны, из той же точки N откладываем вектор $\vec{a}_{N\text{ц}}$;

е) из конца вектора $\vec{a}_{N\text{ц}}$ проводим прямую RS, параллельную линии вектора $\vec{a}_{N\text{вр}}$. Точка пересечения прямых RS и KT позволяет определить величины и направления векторов $\vec{a}_{N\text{вр}}$, $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$ и $\vec{a}_N$. Измеряя их на диаграмме, с учетом масштаба получим:

$$a_N = 500 \text{ м/с}^2; \quad a_{N\text{вр}} = 340 \text{ м/с}^2; \quad a_{N(M)\text{вр}} = 1450 \text{ м/с}^2.$$

Сопоставляя направления векторов $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$ и $\vec{a}_{N\text{вр}}$ с направлениями вращения звеньев MN и O_1N соответственно, заключаем, что направление вектора $\vec{a}_{N(M)\text{вр}}$ и вектора вращательной скорости $\vec{v}_{N(M)}$ совпадают. Следовательно, вращение звена MN в данный момент времени является ускоренным.

Вектор $\vec{a}_{N\text{вр}}$ направлен противоположно вектору скорости $\vec{v}_N$. Следовательно, звено O_1N в данный момент времени вращается замедленно.

Для сравнения полученных результатов составим табл. 2.4.

Таблица 2.4

Способ определения	Ускорения точек, м/с^2						Угловые ускорения звеньев, с$^{-2}$	
	a_M	$a_{N\text{ц}}$	$a_{N\text{вр}}$	a_N	$a_{N(M)\text{ц}}$	$a_{N(M)\text{вр}}$	ε_{O_1N}	ε_{MN}
Графический	1200	376	340	500	115,5	1450	42,5	181
Аналитический	1200	376	342	508	115,5	1440	42,8	180

Из таблицы видно, что разница между результатами, полученными указанными способами, лежит в допустимых пределах.

Список литературы

1. Методические указания к выполнению курсовой работы. Теоретическая механика. Вып. I: Кинематика точки / Под ред. Е. А. Непомнящего и Ю. Н. Горина; ЛЭТИ. Л., 1977.
2. Методические указания к выполнению курсовой работы. Теоретическая механика. Вып. II: Кинематика составного движения точки и плоского движения / Под ред. Е. А. Непомнящего и Ю. Н. Горина; ЛЭТИ. Л., 1977.