ИНСТИТУТ ТРАНСПОРТА И СВЯЗИ

Факультет компьютерных наук и электроники

Домашние работы

По дисциплине **«Численные Методы»**

Выполнил:

Студенты группы 3***В*

****

Преподаватель:

А.В.Граковский

Рига 2***

Задание 1.

Решить систему линейных уравнений 3-го порядка с комплексными коэффициентами методом исключения Гаусса.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

где

$a_{11} = (N_g + 4) + j5,\quad a_{12} = -3 - j4,\quad a_{13} = 4 - j4,\quad b_1 = 3 + j6,$

$a_{21} = -3 + j2,\quad a_{22} = 8 + j(10 - N_s),\quad a_{23} = 1 + j2,\quad b_2 = 1 - j(N_s - 20),$

$a_{31} = j(N_g + 1),\quad a_{32} = N_s - 10,\quad a_{33} = N_s - j(N_g),\quad b_3 = j10.$

$N_g = 19$, $N_s = 13$.

Решение.

Исходная матрица коэффициентов и свободных членов, после подстановки переменных.

$$A_0 = \left[\begin{array}{ccc|c} 23.0000+5.0000i & -3.0000-4.0000i & 4.0000-4.0000i & 3.0000+6.0000i \\ -3.0000+2.0000i & 8.0000-3.0000i & 1.0000+2.0000i & 1.0000+7.0000i \\ 0+20.0000i & 3.0000+0.0000i & 13.0000-19.0000i & 0+10.0000i \end{array}\right]$$

Коэффициент для обнуления элемента a_{21} будет $k_1 = -a_{21}/a_{11} = 0.1065-0.1101i$

Домножаем первую строку на этот коэффициент и прибавляем результат ко второй строке.

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} 23.0000+5.0000i & -3.0000-4.0000i & 4.0000-4.0000i & 3.0000+6.0000i \\ 0+0.0000i & 7.2401-3.0957i & 0.9856+1.1336i & 1.9801+7.3087i \\ 0+20.0000i & 3.0000+0.0000i & 13.0000-19.0000i & 0+10.0000i \end{array}\right]$$

Коэффициент для обнуления элемента a_{31} будет $k_2 = -a_{31}/a_{11} = -0.1805-0.8303i$

Домножаем первую строку на этот коэффициент и прибавляем результат к третьей строке.

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 23.0000+5.0000i & -3.0000-4.0000i & 4.0000-4.0000i & 3.0000+6.0000i \\ 0+0.0000i & 7.2401-3.0957i & 0.9856+1.1336i & 1.9801+7.3087i \\ 0+0.0000i & 0.2202+3.2130i & 8.9567-21.5993i & 4.4404+6.4260i \end{array}\right]$$

Коэффициент для обнуления элемента a_{32} будет $k_3=-a_{32}/a_{22}=0.1347-0.3862i$

Умножаем вторую строку на этот коэффициент и прибавляем к строке 3.

$$A_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 23.0000+5.0000i & -3.0000-4.0000i & 4.0000-4.0000i & 3.0000+6.0000i \\ 0+0.0000i & 7.2401-3.0957i & 0.9856+1.1336i & 1.9801+7.3087i \\ 0+0.0000i & 0+0.0000i & -9.5272+21.8272i & -7.5297-6.6458i \end{array}\right]$$

Из приведенной к такому виду матрицы находим x_1, x_2, x_3.

x3 = b3/a33 =-0.1293 + 0.4014i= 0.422*exp(1.882i)

x2 = (b2 - a23*x3)/a22 = -0.0532 + 0.9523i= 0.954*exp(1.627i)

x1 = (b1 - a13*x3 - a12*x2)/a11 = -0.0266 + 0.2893i= 0.291*exp(1.662i)

Проверка. Подставим значения x_1, x_2, x_3 в уравнения и получим:

$c_1 = a_{11}*x_1 + a_{12}*x_2 + a_{13}*x_3$ = 3.0000 + 6.0000i

$c_2 = a_{21}*x_1 + a_{22}*x_2 + a_{23}*x_3$ = 1.0000 + 7.0000i

$c_3 = a_{31}*x_1 + a_{32}*x_2 + a_{33}*x_3$ = 0.0000 +10.0000i

Невязки для каждого уравнения для действительной и мнимой составляющих соответственно:

	real(c)-real(b)	imag(c)-imag(b)
1	-4.4409e-016	8.8818e-016
2	4.4409e-016	0
3	-2.4425e-015	0

Задание 2.

Задана функция одной переменной ***y(x)*** в виде таблицы значений:

x	-1	19	6	10
y(x)	1	8	8	-2

1. Интерполировать функцию ***y(x)*** полиномом Лагранжа 3-го порядка $\boldsymbol{L_3(x)}$. Выполнить проверку правильности интерполяции по всем точкам.

2. Аппроксимировать функцию по методу наименьших квадратов полиномом 2-го порядка $\boldsymbol{\varphi_2(x)}$.

3. Построить графики интерполяции $\boldsymbol{L_3(x)}$ и аппроксимации $\boldsymbol{\varphi_2(x)}$ на одном рисунке в интервале ***x***□$\boldsymbol{[x_{min}, x_{max}]}$ из таблицы и отметить на поле графика заданные табличные точки.

Решение.

1. Локальные полиномы Лагранжа для заданной функции:

$$l_0(x)=\frac{(x-19)(x-6)(x-10)}{(-1-19)(-1-6)(-1-10)};\qquad l_1(x)=\frac{(x+1)(x-6)(x-10)}{(19+1)(19-6)(19-10)};$$

$$l_2(x)=\frac{(x+1)(x-19)(x-10)}{(6+1)(6-19)(6-10)};\qquad l_3(x)=\frac{(x+1)(x-19)(x-6)}{(10+1)(10-19)(10-6)};$$

Итоговый полином примет вид:

$$L_3(x)=-\frac{1(x-19)(x-6)(x-10)}{1540}+\frac{8(x+1)(x-6)(x-10)}{2340}+\frac{8(x+1)(x-19)(x-10)}{364}+$$

$$+\frac{2(x+1)(x-19)(x-6)}{396}=(0.0298)\mathrm{x}^3\text{ - }(0.7652)\mathrm{x}^2+(3.9020)\mathrm{x}+5.6970;$$

Проверка. Подстановка значений исходной таблицы.

$$(59/1980)(-1)^3\text{ - }(101/132)(-1)^2+(3863/990)(-1)+188/33=1;$$

$$(59/1980)(19)^3\text{ - }(101/132)(19)^2+(3863/990)(19)+188/33=8;$$

$$(59/1980)(6)^3\text{ - }(101/132)(6)^2+(3863/990)(6)+188/33=8;$$

$$(59/1980)(10)^3\text{ - }(101/132)(10)^2+(3863/990)(10)+188/33=\text{-}2;$$

2. Аппроксимирующий по методу наименьших квадратов полином 2-го порядка:

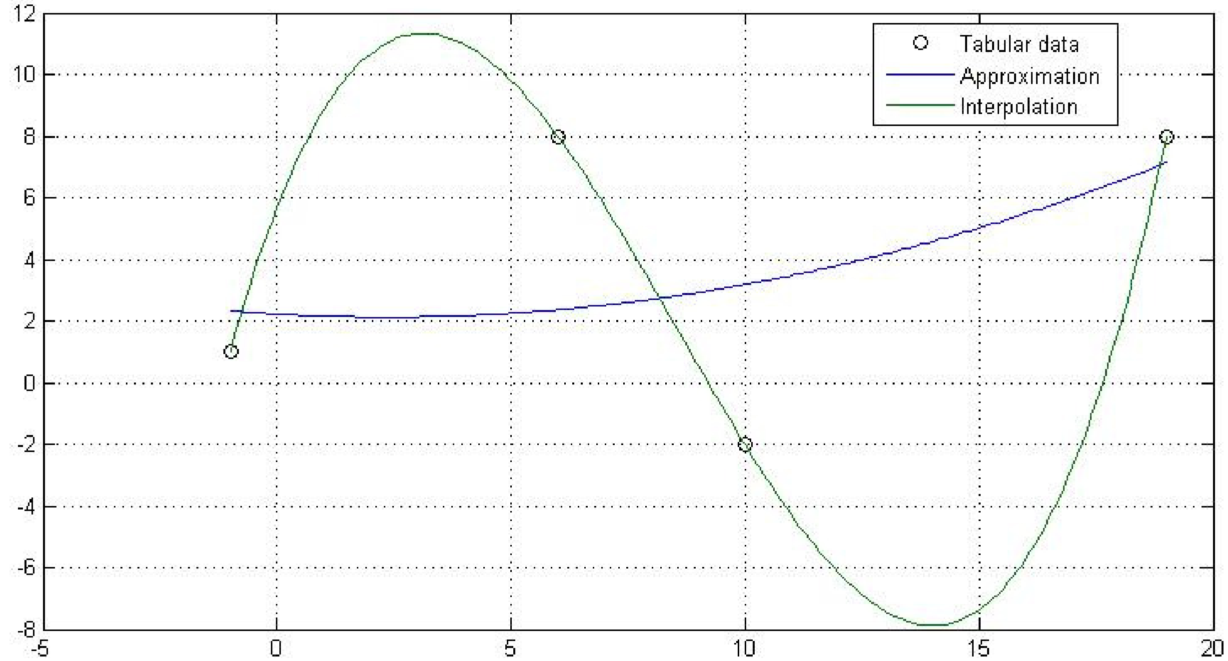
$$\phi_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

Система уравнений для вычисления коэффициентов:

$$\begin{cases} 4a_0+34a_1+498a_2=15\\ 34a_0+498a_1+8074a_2=179\\ 498a_0+8074a_1+141618a_2=2977 \end{cases}$$

Решив систему, получим полином: $\phi_2(x)=0.0181^2-0.0855x+2.2283;$

3. Графики функции, интерполяции $\boldsymbol{L_3(x)}$ и аппроксимации $\boldsymbol{\varphi_2(x)}$:



Задание 3.

Задана функция одной переменной $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+1}}$;

1. Вычислить определенный интеграл $I=\int_1^3 f(x)dx$, разделяя интервал на $n=5$ частей с шагом $h=(b-a)/n$:
    - методом прямоугольников;
    - методом трапеций;
    - методом Симпсона.
2. Сравнить полученные результаты.
3. Вычислить производную $f'(x)$ по методу центральных разностей и интеграл с переменным верхним пределом $F(x)=\int_1^x f(x)dx$, по методу трапеций, выбирая шаг *h.* Результаты занести в таблицу.
4. Построить графики функций $f(x)$, $f'(x)$ и $F(x)$ на одном рисунке на интервале $x\in[1,3]$.

Решение.

1. Разделим интервал на части: $h=(3-1)/5=0,4$ и составим таблицу:

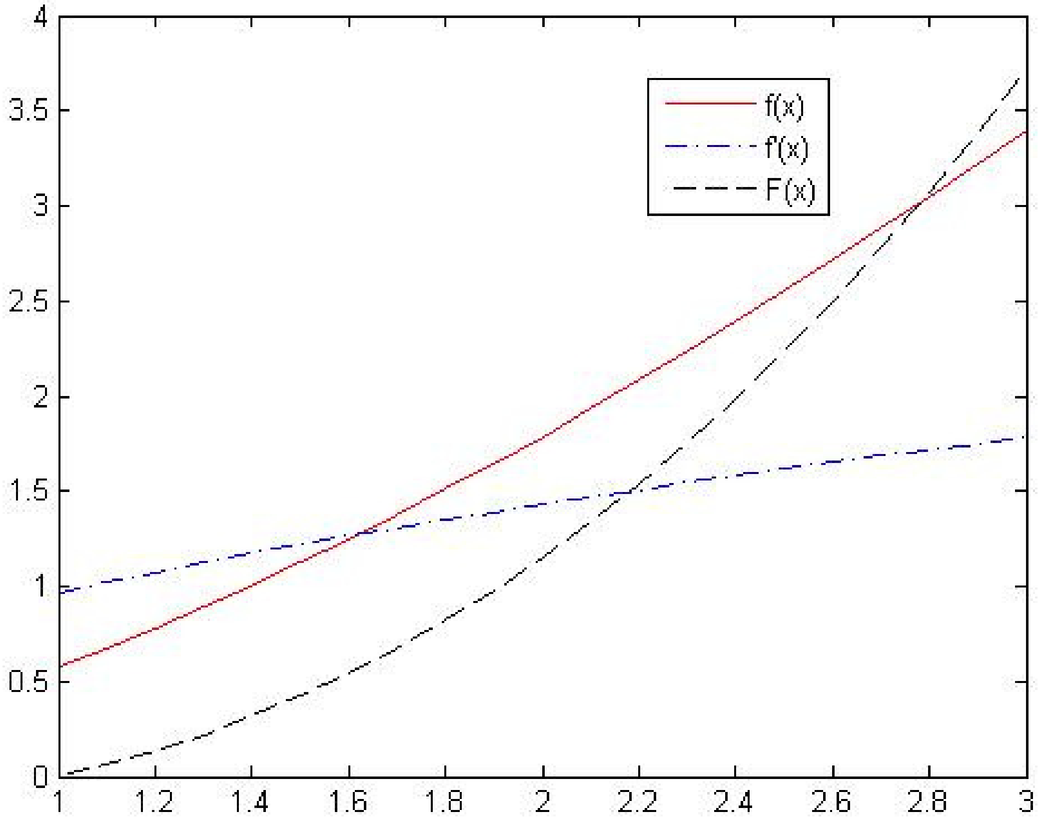
x_i	$1\le x_i<1.4$	$1.4\le x_i<1.8$	$1.8\le x_i<2.2$	$2.2\le x_i<2.6$	$2.6\le x_i\le 3$	$\sum S_i$
Метод прямоугольников: $S_i=f(x_i)\times h$	0.2309	0.4022	0.6043	0.8331	1.0860	3.1565
Метод трапеций: $S_i=\dfrac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\times h$	0.3166	0.5032	0.7187	0.9595	1.2233	3.7213
Метод Симпсона: $S_i=(f(x_{i-1})+4f(x_i)+f(x_{i+1}))\times\dfrac{h}{6}$	0.3138	0.5008	0.7166	0.9576	1.2216	3.7104

2. Из таблицы видно, что решение, полученное по методу Симпсона, располагается между методами прямоугольников и трапеций. Так как график функции на интервале от 1 до 3 возростает, то метод прямоугольников принимает отрицательную погрешность, соответственно метод трапеций положительную. Самое точное значение площяди дает метод Симпсона, так как он высчитывает площадь подинтегрального выражения при помощи трёх точек, что является наиболее эффективным, нежели по одной (метод прямоугольников) или двум (метод трапеций).

3. Значения производной, найденные по методу центральных разностей, и интеграла с переменным верхним пределом, по методу трапеций:

x_i	1	1.4	1.8	2.2	2.6	3
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2 \times h}$	-	1.1666	1.3467	1.5053	1.6486	1.7803
$F(x_i) = F(x_{i-1}) + S_i$	0	0.3166	0.8198	1.5385	2.4980	3.7213

4. Графики функции, производной и интеграла:



+/-

Задание 4.

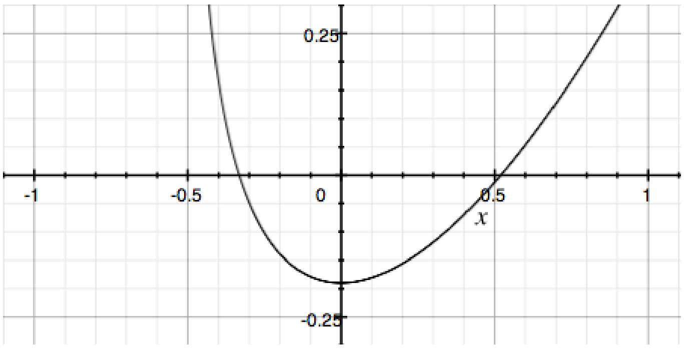
Решить нелинейное уравнение $\frac{x^2}{\sqrt{2x+1}} = 0.19;$

- методом бисекции;
- методом хорд;
- методом Ньютона;
- методом простых итераций (последовательных приближений).

Выполнить по 6 итераций каждого метода, сравнить погрешность вычислений.

Решение.

Анализ функции $y(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2x+1}} - 0.19$ и графики показывают, что уравнение имеет 2 корня на интервалах (-0.5;0] и [0;1].



Рассмотрим интервал [0;1]; x=0.5211;

I. Метод бисекции: $x_i = (a+b)/2$. Здесь и далее □ - погрешность вычислений.

	a	y(a)	b	y(b)	x_i	$y(x_i)$	$\varepsilon = \lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
1	0	-0.19	1	0.3874	0.5	-0.0132	-
2	0.5	-0.0132	1	0.3874	0.75	0.1658	0.25
3	0.5	-0.0132	0.75	0.1658	0.625	0.0704	0.125
4	0.5	-0.0132	0.625	0.0704	0.5625	0.0271	0.0625
5	0.5	-0.0132	0.5625	0.0271	0.5313	0.0065	0.0313
6	0.5	-0.0132	0.5313	0.0065	0.5156	-0.0035	0.0156

X=0.5156;

II. Метод хорд: $x_i = b - \dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} f(b)$;

	a	**y(a)**	**b**	**y(b)**	x_i	$y(x_i)$	$\varepsilon = \lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
1	0	-0.19	1	0.3874	0.3291	-0.1059	-
2	0.3291	-0.1059	1	0.3874	0.4731	-0.0295	0.1440
3	0.4731	-0.0295	1	0.3874	0.5105	-0.0067	0.0373
4	0.5105	-0.0067	1	0.3874	0.5188	-0.0014	0.0083
5	-0.5188	-0.0014	1	0.3874	0.5206	-0.0003	0.0018
6	0.5206	-0.0003	1	0.3874	0.5210	-0.0001	0.0004

X=0.5210;

III. Метод Ньютона: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{y(x_i)}{y'(x_i)}$, где $y'(x_i) = \dfrac{\sqrt{2x_i+1}(3x_i^2+2x_i)}{4x_i^2+4x_i+1}$.

	x_i	$y(x_i)$	$y'(x_i)$	x_{i+1}	$\varepsilon = \lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
1	5.000-e01	-1.322e-02	6.187e-01	5.214e-01	-
2	5.214e-01	1.904-e04	6.365e-01	5.211e-01	2.137e-02
3	5.211e-01	3.677e-08	6.362e-01	5.211e-01	2.991e-04
4	5.211e-01	1.388e-15	6.362e-01	5.211e-01	5.779e-08
5	5.211e-01	0.000e+00	6.362e-01	5.211e-01	2.220e-15
6	5.211e-01	0.000e+00	6.362e-01	5.211e-01	0.000e+00

X=0.5211;

IV. Метод простых итераций.

Выразим $\varphi(x) \to x_{i+1} = \dfrac{x_i^2}{\sqrt{2x_i+1}} - 0.19 + x_i$. Тогда $\varphi'(x_i) = \dfrac{\sqrt{2x_i+1}(3x_i^2+2x_i)}{4x_i^2+4x_i+1} + 1$. В точке $x_0 = 0.5$, $\lvert \varphi'(x_0) \rvert = 1.6187 > 1$, т. е. не выполняется условие сходимости метода. Процесс итераций в данном случае будет расходящимся. Введем корректирующий коэффициент: $\varphi(x) \to x_{i+1} = -0.5(\dfrac{x_i^2}{\sqrt{2x_i+1}} - 0.19) + x_i$, отсюда $\varphi'(x_i) = -\dfrac{\sqrt{2x_i+1}(3x_i^2+2x_i)}{8x_i^2+8x_i+2} + 1$.

При этом в точке $x_0 = 0.5$, $\lvert \varphi'(x_0) \rvert = 0.6996 < 1$, т. е. можно проводить итерации.

	x_i	x_{i+1}	$\varepsilon = \lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
1	0.5	0.5066	-
2	0.5066	5.112	0.0066
3	0.5112	0.5143	0.0046
4	0.5143	0.5164	0.0031
5	0.5164	0.5179	0.0021
6	0.5179	0.5189	0.0015

X=0.5189;

Выводы.

Сравнивая погрешности вычислений, можно видеть, что самые точные результаты дал метод Ньютона. Он за меньшее количество итераций находит корень с большей точностью, таким образом проявляется его порядок скороти сходимости p=2. Так как метод Бисекций и метод Хорд имеет p=1, то скорость сходимости меньше и зачастую сильно зависит от вида функции (метод Хорд показал такой хороший результат из за того, что корень находится почти на середине интервала). Скорость схождения метода Простых итераций вплотную связан с выбором корректирующего коэффициента, и поэтому его сложно сравнивать с остальными 3-мя методами (скорость сходимости нельзя определить).

+

Задание 5.

Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами классическим аналитическим методом, операторным аналитическим методом, численным методом Рунге-Кутта 4-го порядка. Сравнить полученные результаты. Построить график решения.

$y''(t)+5y'(t)+13y(t)=19$, $y(0)=5$, $y'(0)=10$

Решение.

I. Аналитический метод.

При $t\to\infty$, производные будут равны 0, а значит $13y(t)=19$, т. е. $y(\infty)=\dfrac{19}{13}$. Для поиска свободной составляющей решаем характеристическое уравнение $p^2+5p+13=0$.

$$p=\frac{-5\pm\sqrt{-27}}{2}\approx -2.5\pm 2.5981i.$$

Общее решение примет вид:

$$y(t)=A_0e^{-2.5t}\sin(2.5981t+\varphi)+\frac{19}{13}$$

Ищем независимую переменную. Первая производная общего решения:

$$y'(t)=A_0(-2.5e^{-2.5t}\sin(2.5981t+\varphi)+2.5981e^{-2.5t}\cos(2.5981t+\varphi)).$$

Подставим граничные условия в общее решение и уравнение первой производной, получим систему:

$$\begin{cases}A_0\sin\varphi=\dfrac{46}{13}\\ -2.5A_0\sin\varphi+2.5981A_0\cos\varphi=10\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}A_0\sin\varphi=\dfrac{46}{13}\\ A_0\cos\varphi=7.2538\end{cases}$$

$$\varphi=arctg(\frac{46}{13}\cdot 0.1379)\approx arctg0.4878\approx 0.4538 \qquad\qquad A_0=\frac{46}{13\cdot\sin 0.4538}=8.0713$$

Общее решение уравнения:

$$y(t)=\frac{19}{13}+8.0713\cdot e^{-2.5t}\sin(2.5981t+0.4538)$$

+

II. Операторный метод.

$y''(t)+5y'(t)+13y(t)=19$, $y(0)=5$, $y'(0)=10$

Переходим к операторному отображению:

$$(p^2Y(p)-5p-10)+5(pY(p)-5)+13Y(p)=\frac{19}{p}$$

$$Y(p)=\frac{F_1(p)}{pF_2(p)}=\frac{5p^2+35p+19}{p(p^2+5p+13)}$$

Отсюда: $F_2^{'}(p)=2p+5$

Корни характеристического уравнения были найдены раньше:

$$p_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{-27}}{2}\approx-2.5\pm2.5981i$$

По теореме разложения возвращаемся в область времени:

$$y(t)=\frac{F_1(0)}{F_2(0)}+2\cdot\operatorname{Re}al\left\{\frac{F_1(p_1)}{p_1F_2^{'}(p_1)}\cdot e^{p_1t}\right\}=\frac{19}{13}+2\cdot\operatorname{Re}al\left\{\frac{-72+25.9808i}{-13-12.9904i}\cdot e^{(-2.5+2.5981i)t}\right\}=$$

$$=\frac{19}{13}+2\cdot\mathrm{Real}\left\{4.0357\cdot e^{-1.112\cdot i}\cdot e^{(-2.5+2.5981i)t}\right\}=\frac{19}{13}+8.0714\cdot e^{-2.5\cdot t}\cdot\mathrm{Real}\left\{e^{-1.112\cdot i}\cdot e^{2.5981t\cdot i}\right\}=$$

$$=\frac{19}{13}+8.0714\cdot e^{-2.5t}\cdot\cos(2.5981t-1.112).$$

+

III. Метод Рунге-Кутта 4-го порядка.

$y''(t)+5y'(t)+13y(t)=19$, $y(0)=5$, $y'(0)=10$

Введем замену. Исходное уравнение обратится в систему уравнений.

$$\begin{cases} y'(t)=z(t) \\ z'(t)=19-5z(t)-13y(t) \end{cases}$$

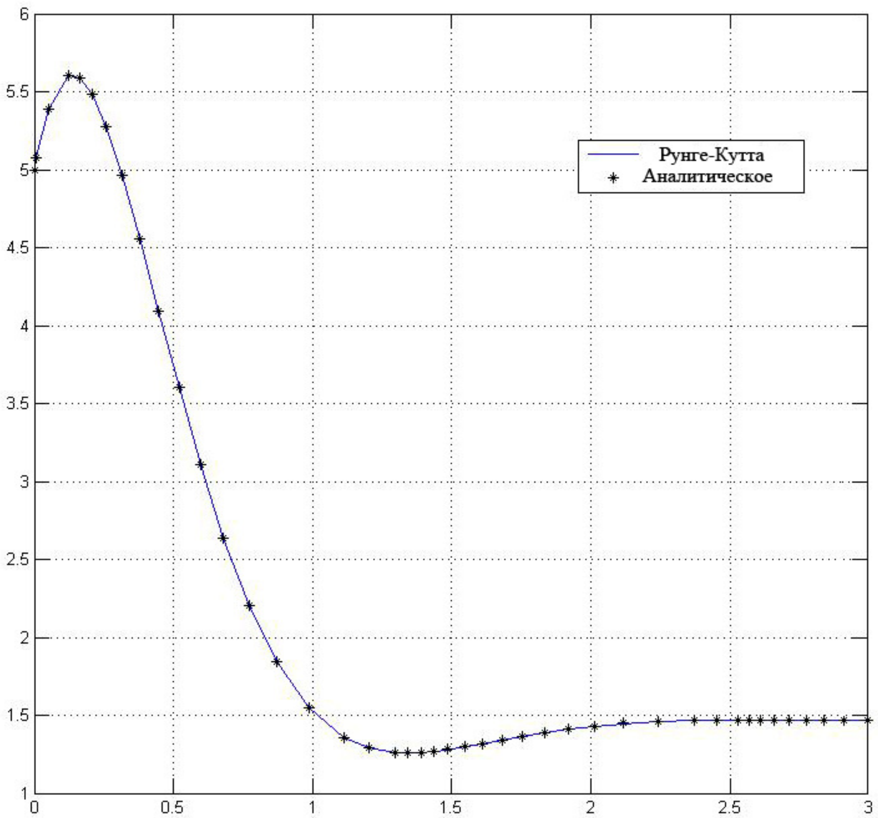
Метод Рунге-Кутта использует следующие формулы для расчета очередной точки:

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{6}(f_1+2f_2+2f_3+f_4)$$

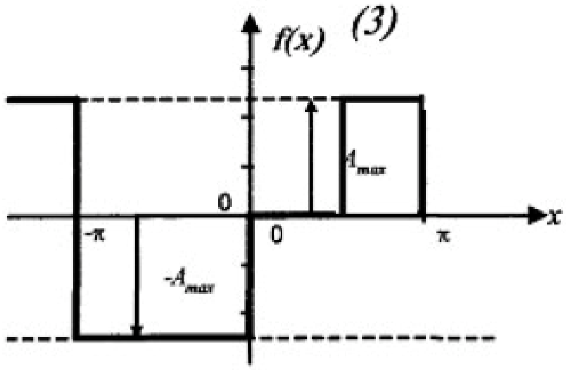
где $f_1=f(x_k,y_k)$; $\quad f_2=f(x_{k+\frac{1}{2}},y_k+\frac{h}{2}f_1)$;

$f_3=f(x_{k+\frac{1}{2}},y_k+\frac{h}{2}f_2)$; $\qquad f_4=f(x_{k+1},y_k+hf_3)$

IV. График решения.



Задание 6.



1. Для периодической несинусоидальной функции, заданной графически, определить:

- постоянную составляющую A_0

- косинусные и синусные коэффициенты C_k и B_k для трех первых гармоник (k = 1, 2, 3) разложения в ряд Фурье

- модуль A_k и фазу φ_k каждой гармоники.

Nvar=2*19+13-8*6=3, A_{max} = 19.

2. Построить комплексный спектр $\{C(k\omega_0), B(k\omega_0)\}$ и амплитудно-фазовый спектр сигнала $\{A(k\omega_0), \varphi(k\omega_0)\}$, как функцию от частоты $k\omega_0$

3. Рассчитать значения функции $\phi(\omega_0 t) = A_0 + \sum_{k=1}^{3} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$ в 7 точках на интервале $[-\pi; \pi]$ и занести их в таблицу.

4. По результатам расчета построить графики исходной функции $f(\omega_0 t)$ и $\phi(\omega_0 t)$ на одном рисунке.

Решение.

Аналитическое выражение, описывающее кривую: $f(x) = \begin{cases} -19, [-\pi; 0] \\ 0, \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ 19\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \end{cases}$

1.а) постоянная составляющая

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -19\, dx + \int_{0}^{\pi/2} 0\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 19\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-19x\Big|_{-\pi}^{0} + 0 + 19x\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(0 - (19\pi) + 19\pi - \frac{19\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{19\pi}{2}\right) = -4.75$$

б) коэффициенты B_k для k = 1, 2, 3 по формуле $B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(1x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -19\cdot\sin(1x)dx + \int_{0}^{\pi/2} 0\cdot\sin(1x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 19\sin(1x)dx\right) =$$

$$= \frac{19}{1\pi}\left((\cos 1x)\big|_{-\pi}^{0} - (\cos(1x)\big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{19}{1\pi}\left(1-(-1)-(-1-0)\right) = \frac{19}{1\pi}(3) = \frac{57}{1\pi} = 18.1437$$

$$B_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -19\cdot\sin(2x)dx + \int_{0}^{\pi/2} 0\cdot\sin(2x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 19\sin(2x)dx\right) =$$

$$= \frac{19}{2\pi}\left((\cos 2x)\big|_{-\pi}^{0} - (\cos(2x)\big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{19}{2\pi}\left(1-1-(1-(-1))\right) = \frac{19}{2\pi}(-2) = -\frac{19}{\pi} = -6.0479$$

$$B_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(3x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -19\cdot\sin(3x)dx + \int_{0}^{\pi/2} 0\cdot\sin(3x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 19\sin(3x)dx\right) =$$

$$= \frac{19}{3\pi}\left((\cos 3x)\big|_{-\pi}^{0} - (\cos(3x)\big|_{\pi/2}^{\pi}\right) = \frac{19}{3\pi}\left(1-(-1)-(-1-0)\right) = \frac{19}{3\pi}(3) = \frac{19}{\pi} = 6.0479$$

1. в) коэффициенты C_k для k = 1, 2, 3 по формуле $C_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$

$$C_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(1x)dx = \frac{1}{1\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -19\cdot\cos(1x)dx + \int_{0}^{\pi/2} 0\cdot\cos(1x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 19\cos(1x)dx\right) =$$

$$= \frac{19}{1\pi}\left(\sin(1x)\big|_{\pi/2}^{\pi} - \sin(1x)\big|_{-\pi}^{0}\right) = \frac{19}{1\pi}\left(0-1-(0-0)\right) = \frac{19}{1\pi}(-1) = -6.0479$$

$$C_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(2x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -19\cdot\cos(2x)dx + \int_{0}^{\pi/2} 0\cdot\cos(2x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 19\cos(2x)dx\right) =$$

$$= \frac{19}{2\pi}\left(\sin(2x)\big|_{\pi/2}^{\pi} - \sin(2x)\big|_{-\pi}^{0}\right) = \frac{19}{2\pi}\left(0-0-(0-0)\right) = \frac{19}{2\pi}(0) = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(3x)dx = \frac{1}{3\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -19\cdot\cos(3x)dx + \int_{0}^{\pi/2} 0\cdot\cos(3x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 19\cos(3x)dx\right) =$$

$$= \frac{19}{3\pi}\left(\sin(3x)\big|_{\pi/2}^{\pi} - \sin(3x)\big|_{-\pi}^{0}\right) = \frac{19}{3\pi}\left(0-(-1)-(0-0)\right) = \frac{19}{3\pi}(1) = 2.0160$$

1. г) модуль гармоник A_k для k = 1, 2, 3 по формуле $A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}$

$$A_1 = \sqrt{18.1437^2 + (-6.0479)^2} = 19.1251$$

$$A_2 = \sqrt{(-6.0479)^2 + 0^2} = 6.0479$$

$$A_3 = \sqrt{6.0479^2 + (2.016)^2} = 6.3751$$

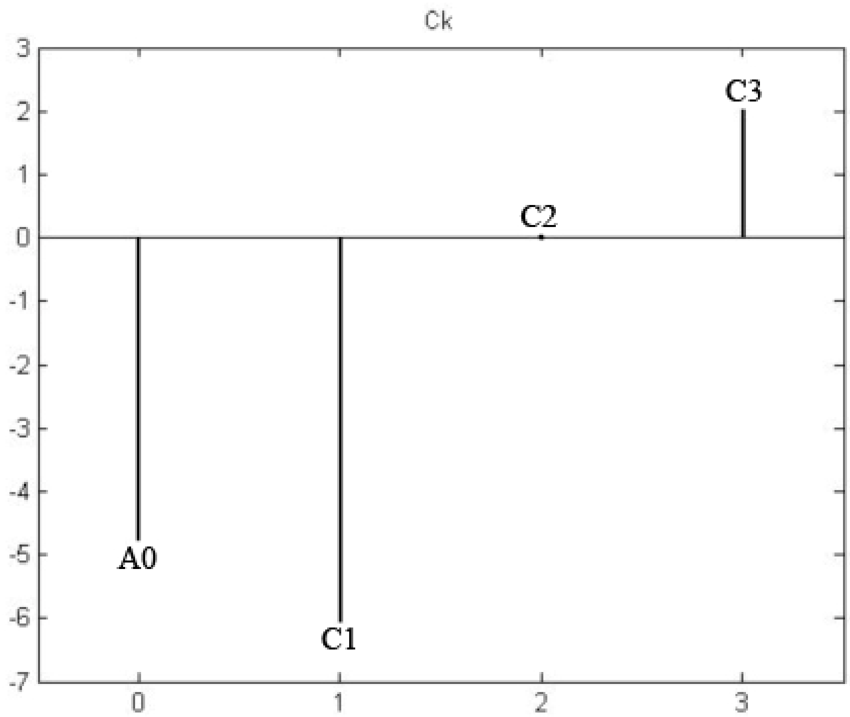
1. д) фаза гармоник для k = 1, 2, 3 по формуле $\varphi_k = arctg\,\frac{B_k}{C_k}$

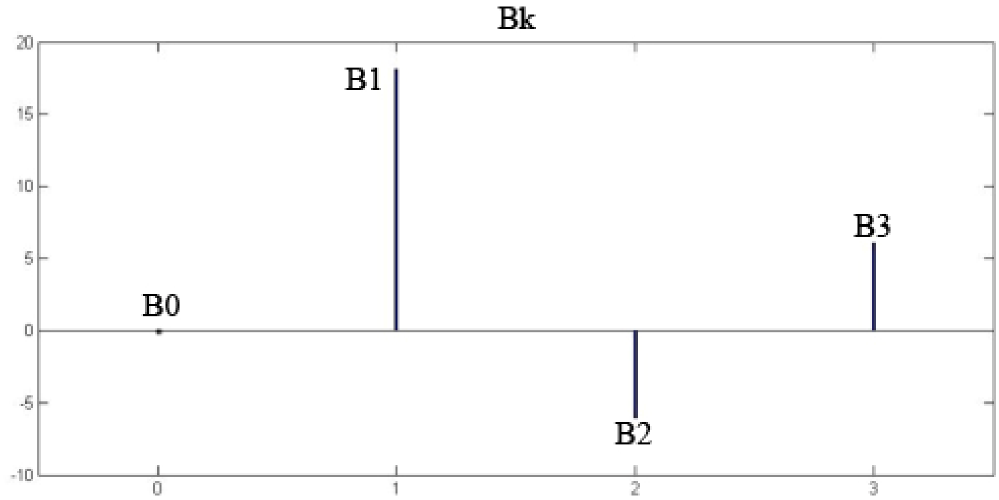
$$\varphi_1 = arctg\left(-\frac{57}{19}\right) = arctg(-3) = 1.8925$$

$$\varphi_2 = arctg\,\frac{-19}{\pi \cdot 0} = arctg(-\infty) = -1.5708$$

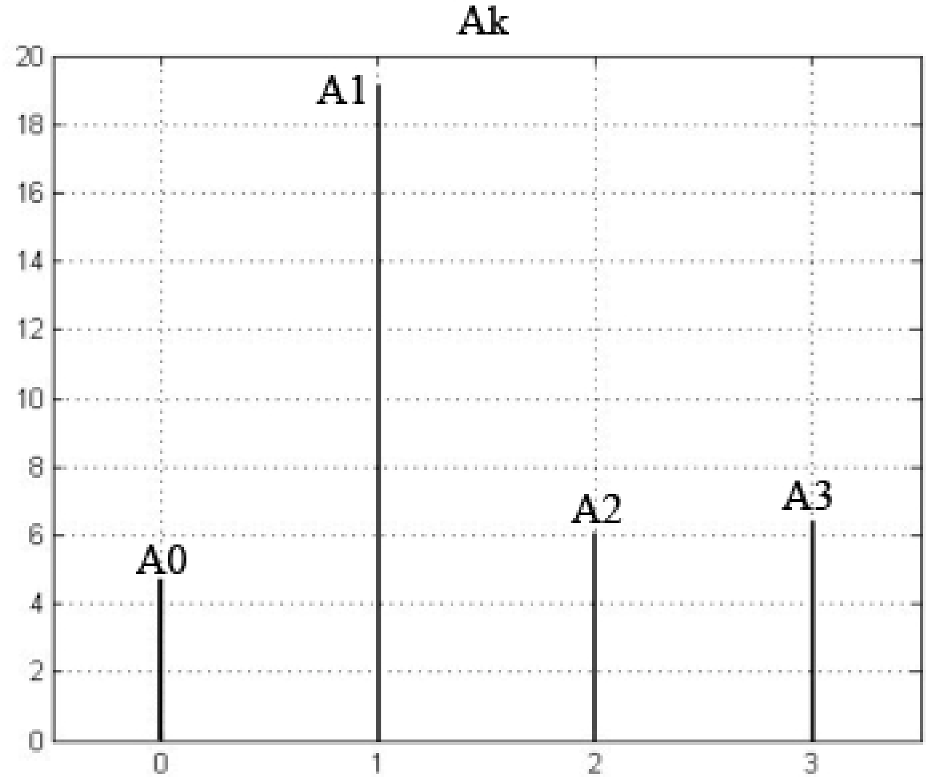
$$\varphi_3 = arctg\frac{19 \cdot 3}{19} = arctg(3) = 1.2490$$

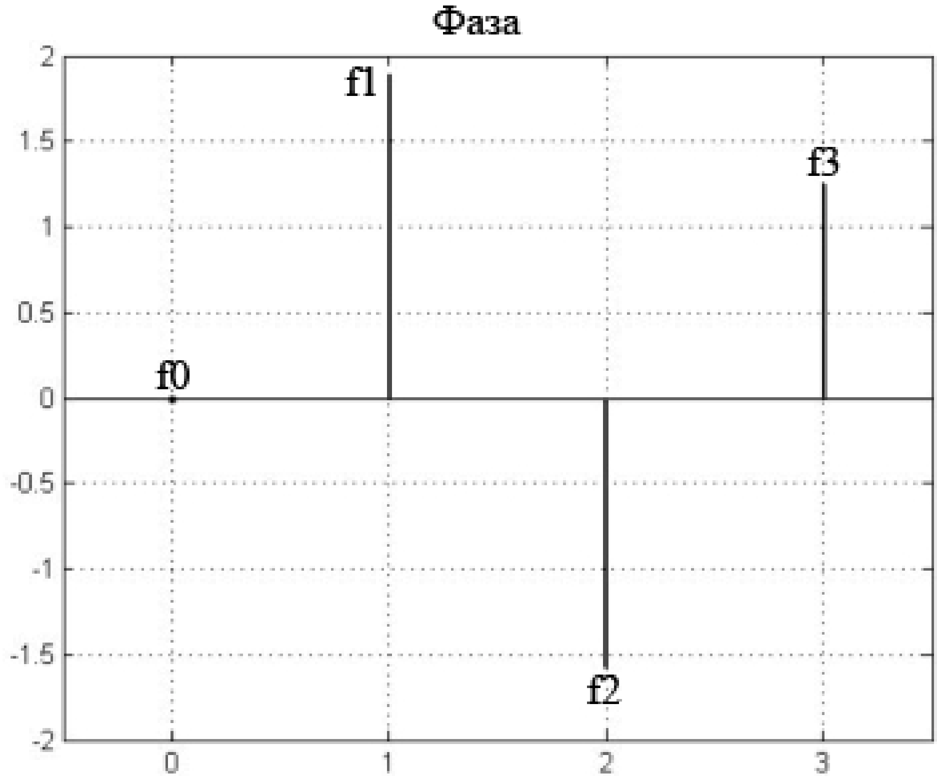
2. Комплексный спектр $\{C(k\omega_0), B(k\omega_0)\}$





Амплитудно-фазовый спектр сигнала $\{A(k\omega_0), \varphi(k\omega_0)\}$

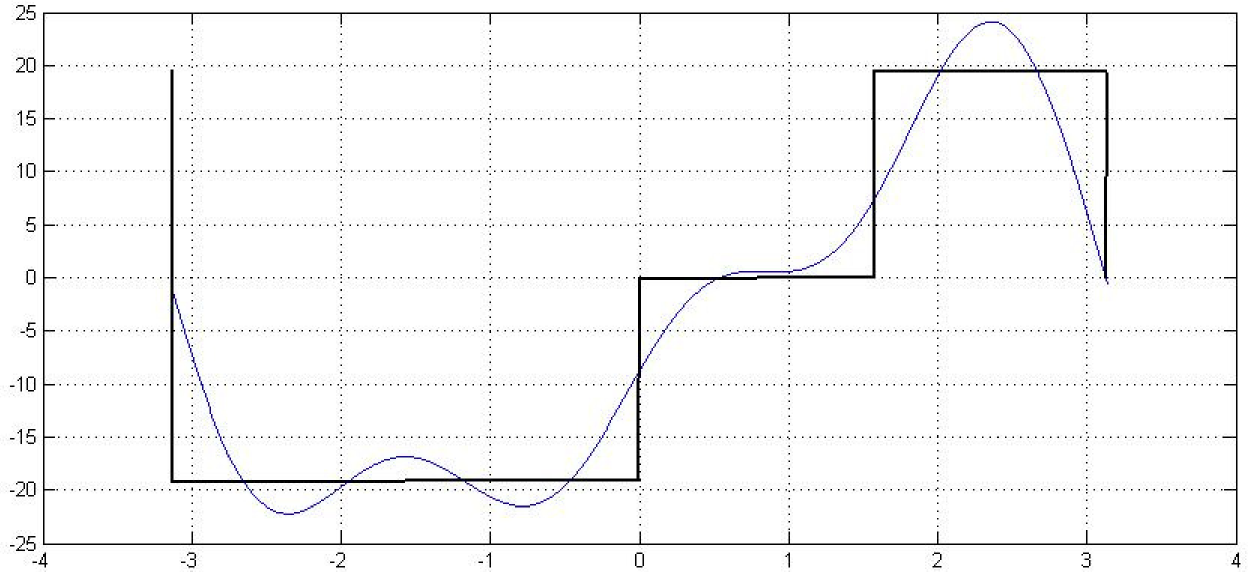




3. Общий вид разложения периодической функции в ряд

$$\phi(\omega_0 t) = A_0 + A_1 \cdot \cos(x - \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(2x - \varphi_2) + A_3 \cdot \cos(3x - \varphi_3) =$$
$$= -4.75 + 19.1251 \cdot \cos(\omega_0 t - 1.8925) + 6.0479 \cdot \cos(2\omega_0 t + 1.5708) + 6.3750 \cdot \cos(3\omega_0 t - 1.2490)$$

t	$-\pi$	$\frac{-3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\varphi(\omega_0 t)$	-0.7181	-22.2019	-16.8458	-8.7819	7.3458	24.1059	-0.7181



Задание 7.

2.6. Решение одного ОДУ второго порядка: $y'' - (y')^2 + 3y = 2\sin(0.8t)$, с начальными условиями $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$ при $0 < t < 7$. Построить графики функции, производной от времени и дуг от друга (фазовый портрет).

Решение.

Переводим ОДУ второго порядка, в систему ОДУ первого порядка.

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = 2\sin(0.8t) + z^2 - 3y \end{cases}$$

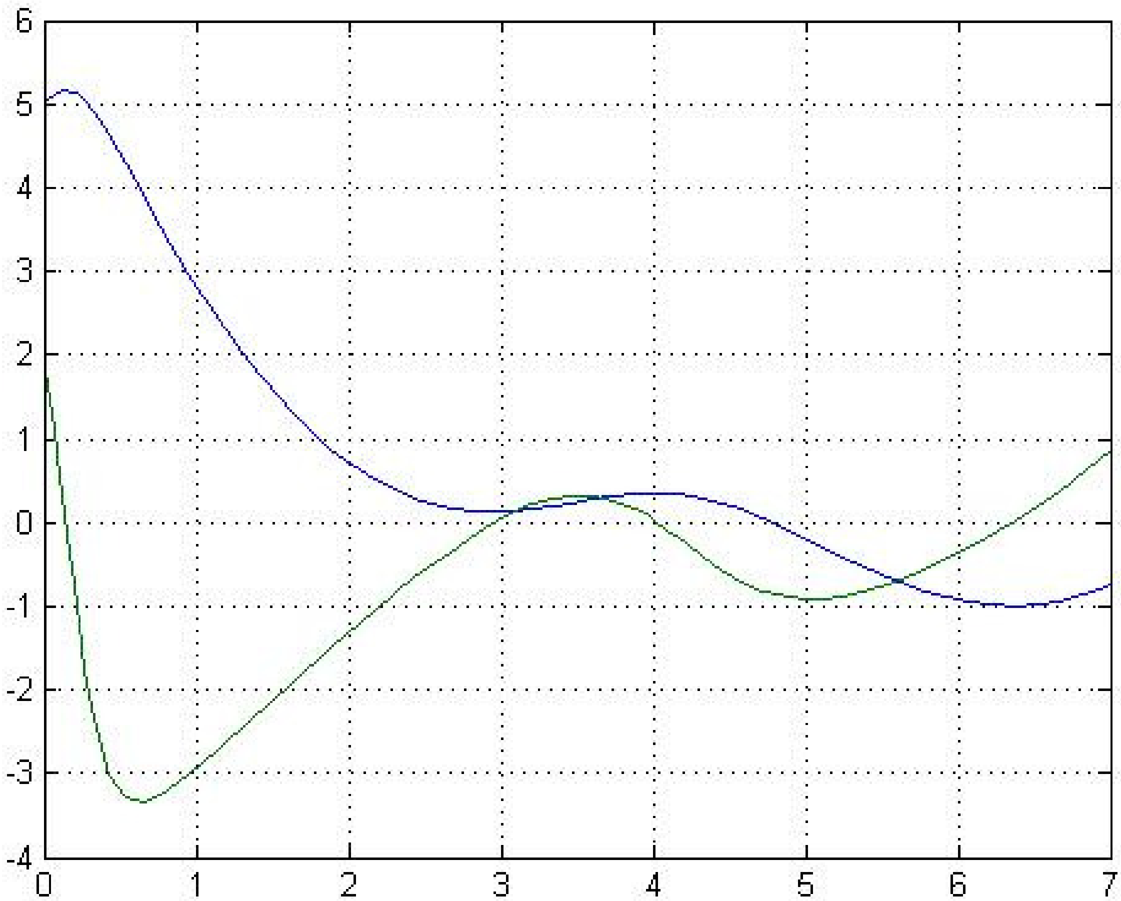
М-файл функции:

```
function y= pdu26(t,x)
y=[x(2); 2*sin(0.8*t)+x(2).*x(2)-3.*x(1)];
```

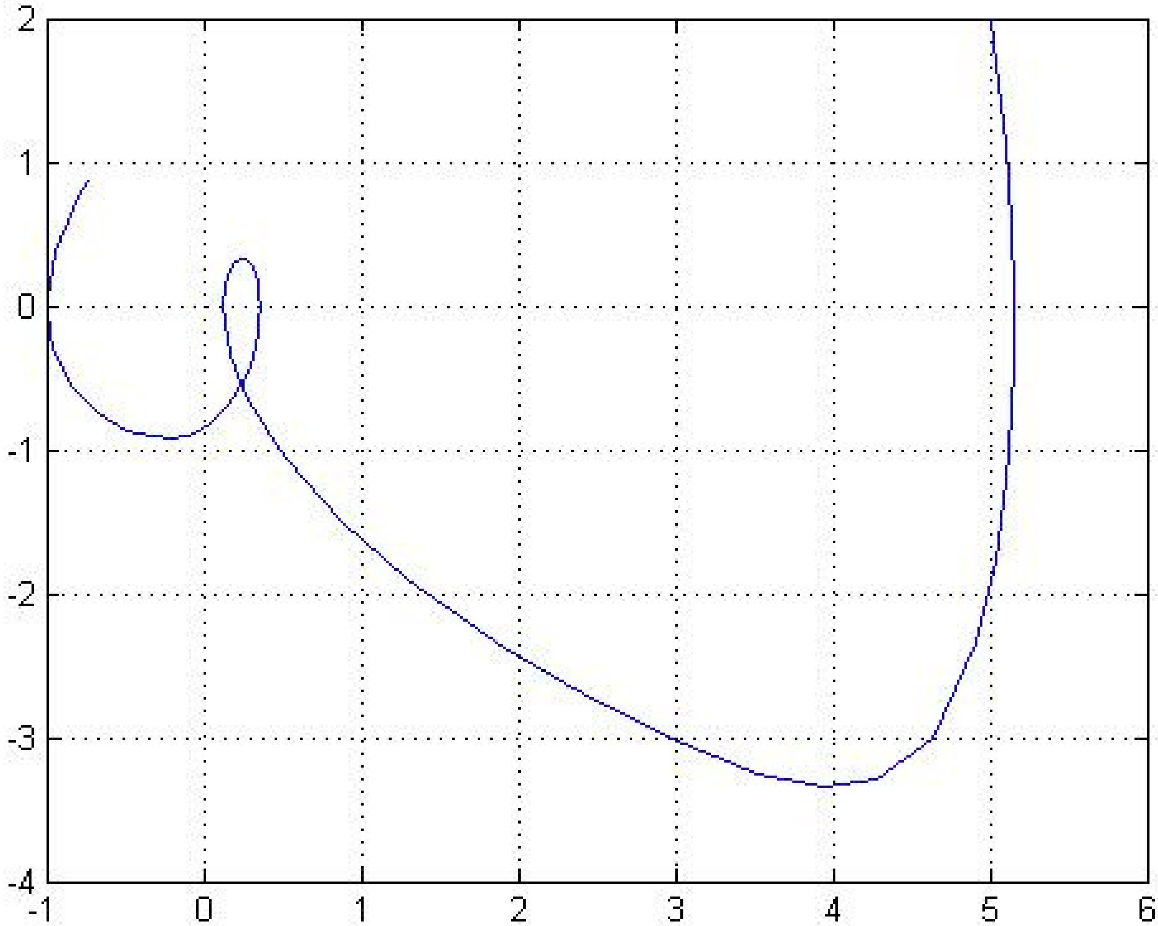
Ход решения в MatLab:

```
>> [t,x]=ode23('pdu26',[0 7], [5 2]);
```

График функции и производной от времени:



Фазовый портрет:



Задание 8.

4.2. Минимизировать функцию при наличии ограничений. Начальные условия $x0=[111]$.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4e^{-x_1^2-x_2^2-x_3^2}-6x_1x_2x_3;$$

$$\begin{cases} x_1+3x_2x_3-8\le 0; \\ x_1+x_2=4; \\ x_3\ge 0; \end{cases}$$

Решение.

Представляем ограничения в виде $G(X)\le 0, C_e(X)\le 0$.

$$\begin{cases} x_1+3x_2x_3-8\le 0; \\ x_1+x_2-4=0; \\ -x_3\le 0; \end{cases}$$

М-файл функции:

```
function f = fun1(x)
f = x(1)^2+x(2)^2+x(3)^2+4*exp(-x(1)^2-x(2)^2-x(3)^2)-6*x(1)*x(2)*x(3);
```

М-файл ограничений:

```
function [g,ce]=mycon(x)
g(1) = -8+x(1)+3*x(2)*x(3);
g(2) = -x(3);
ce = x(1)+x(2)-4;
```

Ход решения в MatLab:

```
>> x0=[1 1 1]; x=fmincon('fun1', x0, [], [], [], [], [], [], 'mycon')
x =
    2.7202    1.2798    1.3752
>> fun1(x)
ans=
   - 17.7957
```

Проверка условий:

>> x(1)+3*x(2)*x(3)-8 ans = 1.7704e-007	>> x(1)+x(2)-4 ans = 1.9540e-014	>> -x(3) ans = -1.3752

Функция будет минимальна при $x=[2.7202\ 1.2798\ 1.3752]$ и она будет равна -17.7957.

+