

Индивидуальные задания

1. Найти решение уравнения колебания полуограниченной струны ($0 \leq x < \infty$): $u_{tt}'' = a^2 u_{xx}''$, удовлетворяющее начальными $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t'(x,0) = \psi(x)$ и граничным условиям. Изобразить профиль струны для моментов времени $t = l/4a, l/2a, l/a, 3l/a$.

| Номер варианта | a | l | Границные условия | $\varphi(x)$ | $\psi(x)$ |
|----------------|-----|-----|-------------------|--|--|
| 1 | 4 | 5 | u_1 | 0 | $\begin{cases} 3, & x \in [0,5], \\ 0, & x \in [5, \infty). \end{cases}$ |
| 2 | 5 | 3 | u_1 | $\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{3}, & x \in [0,3], \\ 0, & x \in [3, \infty). \end{cases}$ | 0 |
| 3 | 1 | 2 | u_1 | 0 | $\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2}, & x \in [0,2], \\ 0, & x \in [2, \infty). \end{cases}$ |
| 4 | 3 | 2 | u_1 | $\begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & x \in [1,3], \\ 0, & x \notin [1,3]. \end{cases}$ | 0 |
| 5 | 1 | 2 | u_1 | 0 | $\begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & x \in [1,3], \\ 0, & x \notin [1,3]. \end{cases}$ |
| 6 | 3 | 8 | u_1 | $\begin{cases} 2, & x \in [0,4], \\ -2, & x \in [4,8], \\ 0, & x \in [8, \infty). \end{cases}$ | 0 |
| 7 | 3 | 2 | u_1 | 0 | $\begin{cases} x-1, & x \in [1,2], \\ 3-x, & x \in [2,3], \\ 0, & x \notin [1,3]. \end{cases}$ |

Продолжение

| Номер варианта | a | l | Границ-ные условия | $\varphi(x)$ | $\psi(x)$ |
|----------------|-----|-----|--------------------|---|---|
| 8 | 1 | 6 | u_1 | $\begin{cases} x, & x \in [0,3], \\ 6-x, & x \in [3,6], \\ 0, & x \notin [0,6]. \end{cases}$ | 0 |
| 9 | 4 | 6 | u_1 | 0 | $\begin{cases} x, & x \in [0,3], \\ 6-x, & x \in [3,6], \\ 0, & x \notin [0,6]. \end{cases}$ |
| 10 | 5 | 4 | u_1 | $\begin{cases} -\cos(\pi x/4), & x \in [2,6], \\ 0, & x \notin [2,6]. \end{cases}$ | 0 |
| 11 | 4 | 4 | u_1 | $\begin{cases} 1, & x \in [0,2], \\ 3, & x \in [2,4], \\ 0, & x \in [4, \infty). \end{cases}$ | 0 |
| 12 | 2 | 5 | u_1 | $\begin{cases} -\sin(\pi x/5), & x \in [0,5], \\ 0, & x \in [5, \infty). \end{cases}$ | 0 |
| 13 | 2 | 5 | u_1 | 0 | $\begin{cases} 1, & x \in [0,3], \\ 2, & x \in [3,5], \\ 0, & x \in [5, \infty). \end{cases}$ |
| 14 | 3 | 3 | u_2 | $\begin{cases} \sin(\pi x/3), & x \in [0,3], \\ 0, & x \in [3, \infty). \end{cases}$ | 0 |
| 15 | 4 | 2 | u_2 | 0 | $\begin{cases} \sin(\pi x/2), & x \in [0,2], \\ 0, & x \in [2, \infty). \end{cases}$ |
| 16 | 1 | 2 | u_2 | $\begin{cases} \cos(\pi x/2), & x \in [1,3], \\ 0, & x \notin [1,3]. \end{cases}$ | 0 |
| 17 | 3 | 2 | u_2 | 0 | $\begin{cases} \cos(\pi x/2), & x \in [1,3], \\ 0, & x \notin [1,3]. \end{cases}$ |

Окончание

| Номер варианта | a | l | Границ-ные условия | $\varphi(x)$ | $\psi(x)$ |
|----------------|-----|-----|--------------------|--|---|
| 18 | 1 | 8 | u_2 | $\begin{cases} 2, & x \in [0,4], \\ -2, & x \in [4,8], \\ 0, & x \in [4, \infty). \end{cases}$ | 0 |
| 19 | 5 | 2 | u_2 | 0 | $\begin{cases} x-1, & x \in [1,2], \\ 3-x, & x \in [2,3], \\ 0, & x \notin [1,3]. \end{cases}$ |
| 20 | 2 | 6 | u_2 | $\begin{cases} x, & x \in [0,3], \\ 6-x, & x \in [3,6], \\ 0, & x \notin [0,6]. \end{cases}$ | 0 |
| 21 | 4 | 6 | u_2 | 0 | $\begin{cases} x, & x \in [0,3], \\ 6-x, & x \in [3,6], \\ 0, & x \notin [0,6]. \end{cases}$ |
| 22 | 3 | 4 | u_2 | $\begin{cases} -\cos(\pi x/4), & x \in [2,6], \\ 0, & x \notin [2,6]. \end{cases}$ | 0 |
| 23 | 3 | 4 | u_2 | 0 | $\begin{cases} 2, & x \in [0,2], \\ 4-x, & x \in [2,4], \\ 0, & x \in [4, \infty). \end{cases}$ |
| 24 | 1 | 4 | u_2 | $\begin{cases} 1, & x \in [0,2], \\ 3, & x \in [2,4], \\ 0, & x \in [4, \infty). \end{cases}$ | 0 |
| 25 | 5 | 5 | u_2 | 0 | $\begin{cases} 1, & x \in [0,3], \\ 2, & x \in [3,5], \\ 0, & x \in [5, \infty). \end{cases}$ |

где $u_1 : u(0,t) = 0$, $u_2 : u'_x(0,t) = 0$.

2. Найти решение уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в ограниченном стержне $(0 \leq x \leq l)$, удовлетворяющее начальному $u(x,0) = \varphi(x)$ и следующим граничным условиям:

| Номер варианта | a | l | Граничные условия | $\varphi(x)$ |
|----------------|-----|-----|-----------------------------|----------------|
| 1 | 3 | 5 | $u(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_1(x)$ |
| 2 | 2 | 1 | $u(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_2(x)$ |
| 3 | 3 | 2 | $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_7(x)$ |
| 4 | 5 | 1 | $u'_x(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_5(x)$ |
| 5 | 1 | 2 | $u(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_6(x)$ |
| 6 | 3 | 8 | $u(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_2(x)$ |
| 7 | 3 | 2 | $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_3(x)$ |
| 8 | 1 | 6 | $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_2(x)$ |
| 9 | 4 | 6 | $u'_x(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_7(x)$ |
| 10 | 5 | 4 | $u'_x(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_8(x)$ |
| 11 | 4 | 1 | $u(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_4(x)$ |
| 12 | 2 | 5 | $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_8(x)$ |
| 13 | 1 | 5 | $u(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_7(x)$ |
| 14 | 3 | 3 | $u(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_7(x)$ |
| 15 | 4 | 1 | $u(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_8(x)$ |

Найти решение уравнения колебания ограниченной струны
 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $(0 \leq x \leq l)$, удовлетворяющее начальному
 $u(x,0) = \varphi(x)$ и следующим граничным условиям:

| Номер варианта | a | l | Границные условия | $\varphi(x)$ |
|----------------|-----|-----|-----------------------------|----------------|
| 16 | 1 | 2 | $u'_x(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_2(x)$ |
| 17 | 3 | 2 | $u'_x(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_5(x)$ |
| 18 | 1 | 3 | $u(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_6(x)$ |
| 19 | 5 | 2 | $u(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_1(x)$ |
| 20 | 2 | 6 | $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_3(x)$ |
| 21 | 4 | 1 | $u(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_8(x)$ |
| 22 | 3 | 4 | $u(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_4(x)$ |
| 23 | 3 | 1 | $u'_x(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_7(x)$ |
| 24 | 1 | 4 | $u'_x(0,t) = u(l,t) = 0$ | $\varphi_8(x)$ |
| 25 | 1 | 5 | $u'_x(0,t) = u'_x(l,t) = 0$ | $\varphi_2(x)$ |

где

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{2x}{l}, & x \in [0, l/2], \\ 2(l-x), & x \in [l/2, l], \end{cases} \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, l/4] \cup [3l/4, l], \\ 1, & x \in [l/4, 3l/4], \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) = \cos^2 \frac{\pi x}{l}, \quad \varphi_4(x) = \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$\varphi_5(x) = \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad \varphi_6(x) = \sin \frac{\pi x}{2l},$$

$$\varphi_7(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{l}, \quad \varphi_8(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, l/2] \cup [2l/3, l], \\ 2, & x \in [l/2, 2l/3]. \end{cases}$$