

Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана

В.В. Кокушкин, С.Н. Саяпин, П.М. Шкапов

Пространственная статика



Москва

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МГТУ им. Н. Э. Баумана

2 0 1 5

УДК 531
ББК 22.21
К59

Издание доступно в электронном виде на портале *ebooks.bmstu.ru*
по адресу: <http://ebooks.bmstu.ru/catalog/178/book1348.html>

Факультет «Фундаментальные науки»
Кафедра «Теоретическая механика»

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана в качестве методических указаний*

Рецензенты:

канд. физ.-мат. наук *Ю.В. Герасимов*,
канд. хим. наук *Г.Д. Казакова*

Кокушкин, В. В.

К59

Пространственная статика: методические указания к выполнению домашнего задания по теме «Статика» / В. В. Кокушкин, С. Н. Саяпин, П. М. Шкапов. — Москва : Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. — 44, [4] с. : ил.

ISBN 978-5-7038-4308-6

Рассмотрены примеры решения типовых задач по теме «Статика». Приведены варианты задач домашнего задания.
Для студентов 1-го курса МГТУ им. Н.Э. Баумана.

УДК 531
ББК 22.21

ISBN 978-5-7038-4308-6

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015
© Оформление. Издательство
МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

Домашнее задание по теме «Статика» состоит из двух частей: «Плоская статика» и «Пространственная статика».

Вторая часть домашнего задания включает в себя две типовые задачи, в которых рассматриваются системы твердых тел, находящихся в равновесии под действием заданной пространственной системы сил. Варианты задач из домашнего задания представлены в приложении, в котором первая цифра соответствует типу задачи, вторая — номеру варианта.

Условия типовых задач.

Задача первого типа. Определить: реакции сферического шарнира или подпятника A и подшипника B дополнительно в задачах вариантов 4, 13, 16, 18, 25, 26, 27 — реакцию опоры, касающейся середины соответствующего отрезка в точке K ; в задачах вариантов 9, 24 — реакцию стержня KC ; в остальных задачах — необходимую для равновесия силу Q . При этом в вариантах задач, в которых сила Q приложена в точке D , принять точку D лежащей на середине соответствующего отрезка. Принять как заданные величины P и l , при этом $l_1 = 2l$, $R = 2r = l$, $M = 0,5Pl$. В задачах вариантов 1, 2, 4, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 23, 24, 25 принять $AB = 2BC = 2l$. Во всех вариантах принять $\alpha = \gamma = 30^\circ$, $\beta = \varphi = 60^\circ$, при этом углы α и β отсчитываются в вертикальных плоскостях, а углы γ и φ — в горизонтальных.

Задача второго типа. Определить реакцию заделки, если заданы P и l , пара сил с моментом $M = 3Pl$, $q_0 = 3P/l$, $AB = BC = CD = DE = l$, $\gamma = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим примеры решения задач первого типа.

Пример 1. Прямоугольная плита $ABCD$ весом P имеет горизонтальную ось вращения AB . В точке A помещен подпятник, в точке B — цилиндрический шарнир, а в точке K — точечная опора. Плита повернута вокруг оси AB на угол α , и на нее действует сила G под углом β к горизонту в вертикальной плоскости Π , причем сама плоскость повернута относительно плоскости рисунка (фронтальной плоскости) вокруг вертикали, проходящей через точку C , на угол γ (рис. 1).

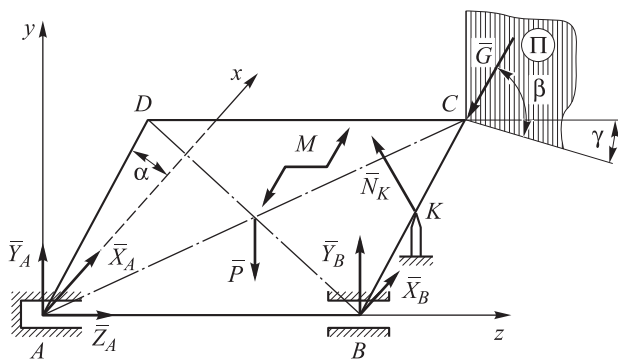


Рис. 1

При заданных P и l определить реакции опор A , B и K . Момент пары сил, действующих в плоскости плиты, $M = 2Pl$, $G = 2P$, $AB = 2BC = l$, $BK = KC$.

Решение. Пространственные силы запишем в виде величин их проекций на заданные оси координат (см. рис. 1):

$$G_x = G \cos \beta \sin \gamma = G \frac{1}{2} \frac{1}{2} = 0,25G = 0,5P;$$

$$G_y = -G \sin \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}G = -\sqrt{3}P;$$

$$G_z = -G \cos \beta \cos \gamma = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}G = -\frac{\sqrt{3}}{2}P.$$

Проекция вектора момента пары сил \bar{M} на оси координат (рис. 2):

$$M_x = -M \sin \alpha = -0,5M = -Pl;$$

$$M_y = M \cos \alpha = 0,86M = 1,73Pl;$$

$$M_z = 0.$$

Реакция \bar{N}_K направлена перпендикулярно к поверхности плиты $ABCD$.

Условия равновесия имеют следующий вид:

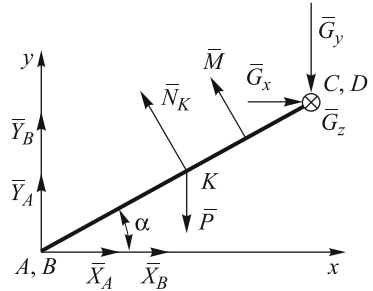


Рис. 2

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B - N_K \sin \alpha + G \cos \beta \sin \gamma = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + N_K \cos \alpha - P - G \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad Z_A - G \cos \beta \cos \gamma = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \quad -Y_B AB - M \sin \alpha - N_K AB \cos \alpha + \\ + P \frac{1}{2} AB + |G_y| AB - |G_z| BC \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad X_B AB - N_K AB \sin \alpha + M \cos \alpha + |G_x| AB + |G_z| BC \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0, \quad -P \frac{1}{2} BC \cos \alpha - |G_x| BC \sin \alpha - |G_y| BC \cos \alpha + N_K BK = 0.$$

Из условий равновесия получаем решение:

$$N_K = \frac{7 + \sqrt{3}}{2} P = 4,37P; \quad X_B = \frac{7 - \sqrt{3}}{8} P = 0,66P; \quad Y_B = -\frac{7}{8} P = -0,88P;$$

$$X_A = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{8} P = 1,02P; \quad Y_A = \frac{9 - 6\sqrt{3}}{8} P = -0,17P; \quad Z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} P = 0,87P.$$

Пример 2. Вал с рычагом CD находится под действием пространственной системы сил (рис. 3).

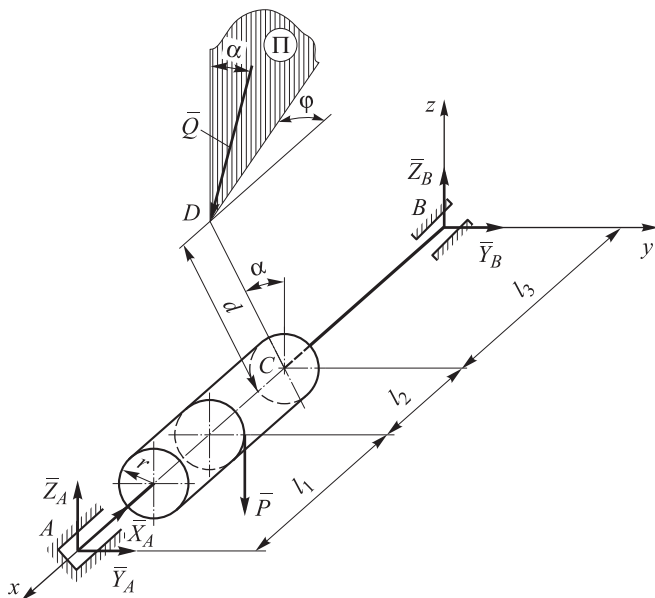


Рис. 3

Определить необходимую для равновесия силу Q , реакции в подпятнике A и в цилиндрическом шарнире B при заданных P и l ,

причем $l_1 = d = l$; $l_2 = 0,5l$; $l_3 = 1,5l$. Сила Q действует в плоскости Π под углом α к вертикальной оси. При этом плоскость Π повернута на угол φ относительно вертикальной плоскости, параллельной плоскости xBz . Весом вала с рычагом CD пренебрегаем.

Решение. Освободим систему от наложенных на нее связей, заменяя их соответствующими реакциями. Определим величины проекций силы Q на координатные оси:

$$Q_x = Q \sin \alpha \cos \varphi = \frac{1}{4}Q; \quad Q_y = Q \sin \alpha \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{4}Q;$$

$$Q_z = -Q \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}Q.$$

Запишем условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad -X_A + Q \sin \alpha \cos \varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + Q \sin \alpha \sin \varphi = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad Z_A + Z_B - P - Q \cos \alpha = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k) = 0, \quad -|Q_y|d \cos \alpha + |Q_z|d \sin \alpha - Pr = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k) = 0, \quad P(l_2 + l_3) + |Q_x|d \cos \alpha + |Q_z|l_3 - Z_A(l_1 + l_2 + l_3) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k) = 0; \quad Y_A(l_1 + l_2 + l_3) + |Q_x|d \sin \alpha + |Q_y|l_3 = 0.$$

Из условий равновесия получаем решение:

$$X_A = 1,29P; \quad Y_A = -1,33P; \quad Z_A = 3,2P;$$

$$Q = 5,17P; \quad Y_B = -0,89P; \quad Z_B = 2,27P.$$

Рассмотрим решение задачи второго типа.

Пример. Стержень $ABCD$, заделанный в стену, нагружен силой P , действующей в плоскости Π , повернутой вокруг вертикали, проходящей через точку D на угол γ от плоскости, параллельной плоскости AXZ , парой сил с моментом $M = 3Pl$ и силами, распределенными по линейному закону с максимальной интенсивностью $q_0 = 2P/l$, как показано на рис. 4.

Определить реакцию заделки, если $AB = BC = CD = l$.

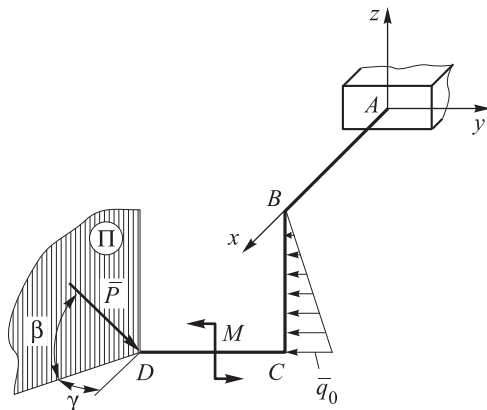


Рис. 4

Решение. Заменяем распределенные силы равнодействующей силой $Q = q_0 l / 2 = P$ и приложим ее в точке K на расстоянии $BK = 2BC / 3 = 2l / 3$ (рис. 5).

Реакцию и векторный момент пространственной заделки, а также силу P разложим по осям координат. Определим величины проекций силы P на оси координат:

$$P_x = -P \cos \beta \cos \gamma = -0,43P;$$

$$P_y = P \cos \beta \sin \gamma = 0,25P;$$

$$P_z = -P \sin \beta = -0,86P.$$

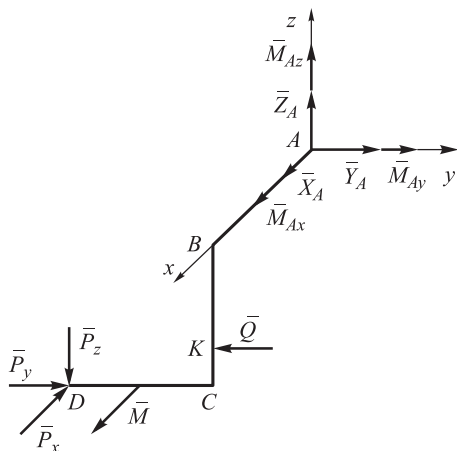


Рис. 5

Запишем условия равновесия:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad X_A - P \cos \beta \cos \gamma = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad Y_A + P \cos \beta \sin \gamma - Q = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n F_{kz} = 0, \quad Z_A - P \sin \beta = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_x(F_k) = 0, \quad M_{Ax} + M - Q \frac{2}{3} BC + |P_y| BC + |P_z| DC = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_y(F_k) = 0, \quad M_{Ay} + |P_x| BC + |P_z| AB = 0;$$

$$\sum_{k=1}^n M_z(F_k) = 0; \quad M_{Az} - QAB - |P_x| CD + |P_y| AB = 0.$$

Из условий равновесия получаем решение:

$$X_A = 0,43P; \quad Y_A = 0,75P; \quad Z_A = 0,86P;$$

$$M_{Ax} = -3,44Pl; \quad M_{Ay} = -1,29Pl; \quad M_{Az} = 1,18Pl.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТАТИКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭВМ*

Определение реакций связей и неизвестных сил в задачах пространственной статики с математической точки зрения связано с нахождением решения линейной системы алгебраических уравнений равновесия, имеющих стандартную матричную форму

$$[A]\{X\} = \{B\}, \quad (1)$$

где $[A]$ — матрица коэффициентов; $\{X\}$ и $\{B\}$ — матрицы-столбцы неизвестных и свободных членов соответственно.

При этом все представленные в вариантах домашнего задания задачи в типовой постановке элементарно решаются без применения ЭВМ. Порядок систем уравнений не велик (не более 6 неизвестных), и решение может быть найдено известными аналитическими методами подстановки, последовательного исключения неизвестных и, в наиболее сложных случаях, через определители методом Крамера.

Использование ЭВМ целесообразно в следующих случаях: большое число расчетов для однотипных схем; решение задач с изменением исходных заданных геометрических параметров или системы заданных сил; нахождение оптимальных значений искомых параметров по каким-либо критериям.

Рассмотрим систему, схема которой представлена на рис. 6. Сила F действует в вертикальной плоскости Π под углом α к плоскости $ABCD$. При этом плоскость Π повернута на угол γ относительно горизонтального ребра DC . При расчетах будем полагать: $P = F = 10$ Н; $DE = EC$; $M = 10$ Н·м; $l = 0,5$ м; $\beta = 45^\circ$; $\alpha = \gamma/2$.

Требуется рассчитать реакции опор A , B и K при изменении значений угла γ в диапазоне $0 \dots 360^\circ$; построить графики зависи-

* Задание на решение с помощью ЭВМ может быть выдано по желанию студента.

мостей, составляющих реакции сферического шарнира A и реакции опорного стержня L от значений угла γ .

Запишем условия равновесия:

$$\begin{aligned} \sum_k F_{kx} &= 0; & X_A + X_B + F \cos \alpha \sin \gamma + R_K \sin \beta &= 0; \\ \sum_k F_{ky} &= 0; & Y_A - F \cos \alpha \cos \gamma &= 0; \\ \sum_k F_{kz} &= 0; & Z_A + Z_B + R_K \cos \beta - F \sin \alpha - P &= 0; & (2) \\ \sum_k M_{Ax}(\bar{F}_k) &= 0; & Z_B \cdot 3l + R_K \cos \beta \cdot 3l - F \sin \alpha \cdot 1,5l - P \cdot 1,5l + M &= 0; \\ \sum_k M_{Ay}(\bar{F}_k) &= 0; & -R_K (\cos \beta \cdot 2l + \sin \beta \cdot l) + Pl + F \sin \alpha \cdot 2l &= 0; \\ \sum_k M_{Az}(\bar{F}_k) &= 0; & -X_B \cdot 3l - R_K \sin \beta \cdot 3l - Fl \cos \alpha (1,5 \sin \gamma + 2 \cos \gamma) &= 0. \end{aligned}$$

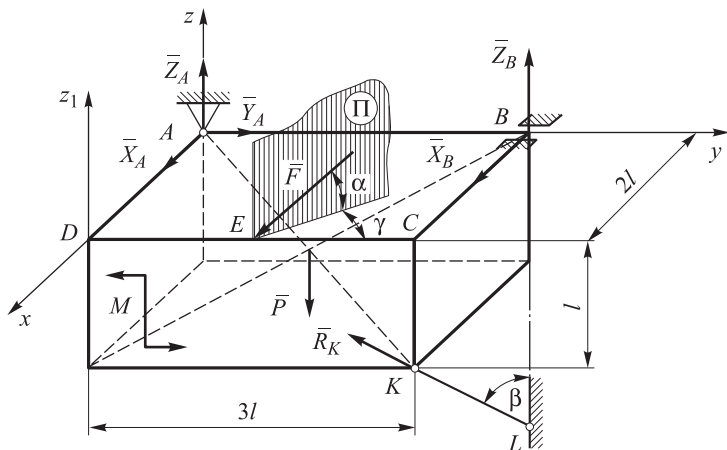


Рис. 6

Рекомендуется дополнить систему уравнений (2) выражением для контрольной суммы моментов сил относительно оси Dz_1 :

$$\sum_k M_{Az}(\bar{F}_k) = -X_B \cdot 3l - Y_A \cdot 2l - R_K \sin \beta \cdot 3l - F \cos \alpha \sin \gamma \cdot 1,5l. \quad (3)$$

При проведении расчетов ненулевое значение выражения (3) соответствует понятию «невязки», т. е. фактической ошибке расчетов, обусловленных либо неправильным составлением системы (2), либо погрешностью численного счета.

Систему уравнений (2), (3) представим в матричной форме (1), где $\{X\}$ — матрица-столбец неизвестных, элементами которой являются:

$$X(1) = X_A; \quad X(2) = Y_A; \quad X(3) = Z_A; \quad X(4) = X_B;$$

$$X(5) = Z_B; \quad X(6) = R_K; \quad X(7) = \sum_k M_{Dz1}(\bar{F}_k).$$

Выражения для ненулевых элементов матрицы коэффициентов $[A]$ и матрицы-столбца свободных членов $\{B\}$ в таком случае имеют следующий вид:

$$A(1, 1) = A(1, 4) = A(2, 2) = A(3, 3) = A(3, 5) = A(7, 7) = 1;$$

$$A(1, 6) = \sin \beta; \quad A(3, 6) = \cos \beta; \quad A(4, 5) = A(7, 4) = 3l;$$

$$A(4, 6) = 3l \cos \beta; \quad A(5, 6) = -l(2 \cos \beta + \sin \beta); \quad A(6, 4) = -3l;$$

$$A(6, 6) = -3l \sin \beta; \quad A(7, 2) = 2l; \quad A(7, 6) = 3l \sin \beta;$$

$$B(1) = -F \cos \alpha \sin \gamma; \quad B(2) = F \cos \alpha \cos \gamma; \quad B(3) = F \sin \alpha;$$

$$B(4) = F \sin \alpha \cdot 1,5l - M + P \cdot 1,5l; \quad B(5) = -(F \sin \alpha \cdot 2l + Pl);$$

$$B(6) = Fl \cos \alpha (1,5 \sin \gamma + 2 \cos \gamma); \quad B(7) = -F \cos \alpha \sin \gamma \cdot 1,5l.$$

Решение системы уравнений (2), (3), приведенных к форме (1), осуществляют стандартными численными методами, реализуемыми в пакете прикладных программ MATLAB, MathCAD, либо для этой цели самостоятельно составляют программу на языках FORTRAN,

BASIC и др. Полученные результаты можно представить в табличном виде или графически. Графики зависимостей $x_A(\gamma)$, $y_A(\gamma)$ и $R_k(\gamma)$ приведены на рис. 7.

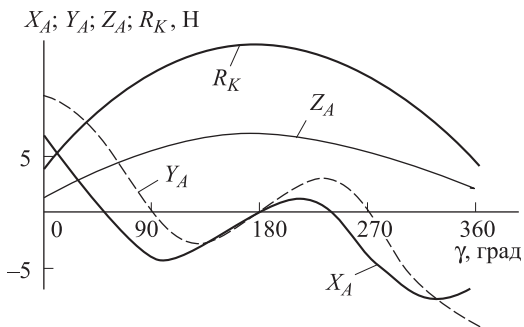


Рис. 7

Рассмотренный пример иллюстрирует некоторые особенности, связанные с использованием вычислительной техники при изучении курса теоретической механики.

ЛИТЕРАТУРА

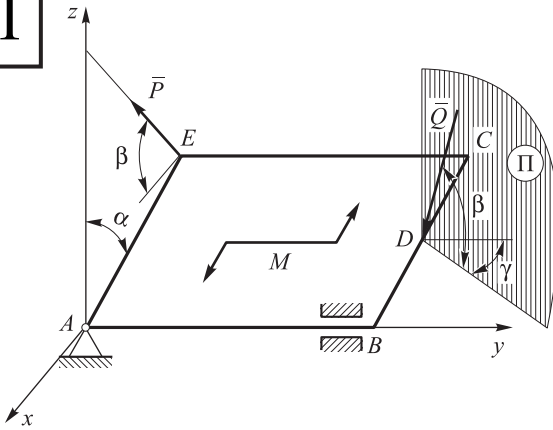
Бурмистров Б.А., Кирюшкина И.А., Кокушкин В.В. Пространственная статика: метод. указания к разделу курсовой работы по теоретической механике. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994.

Курс теоретической механики: под ред. К.С. Колесникова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011.

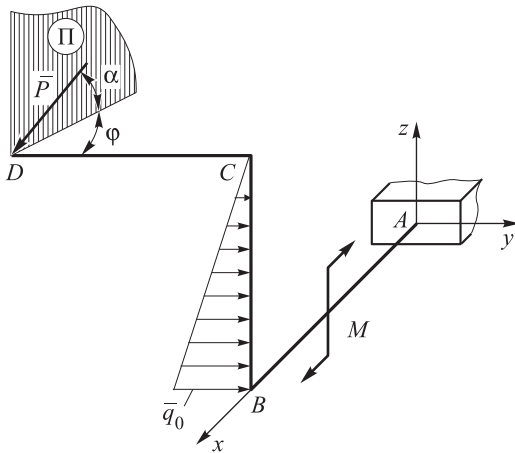
Методические указания к решению задач и выполнению курсовых заданий по теме «Статика»: под ред. В.В. Дубинина. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.

ПРИЛОЖЕНИЕ

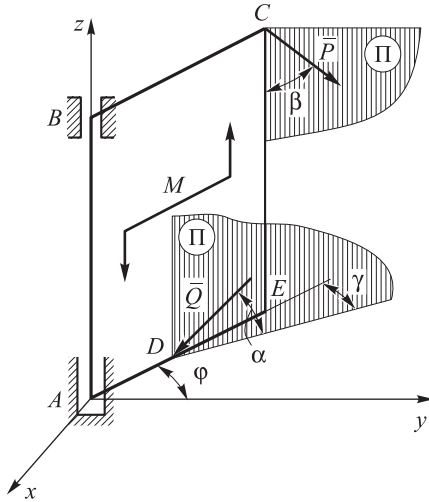
1.01



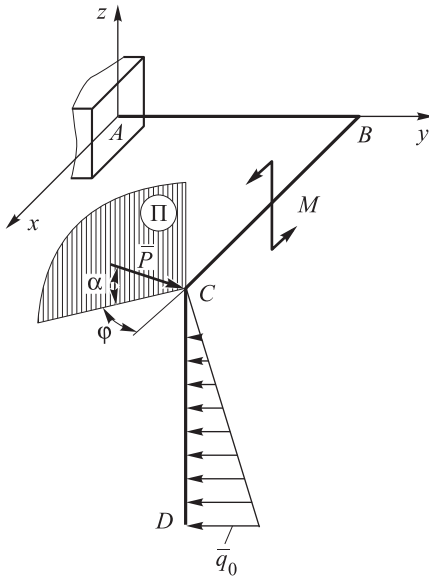
2.01



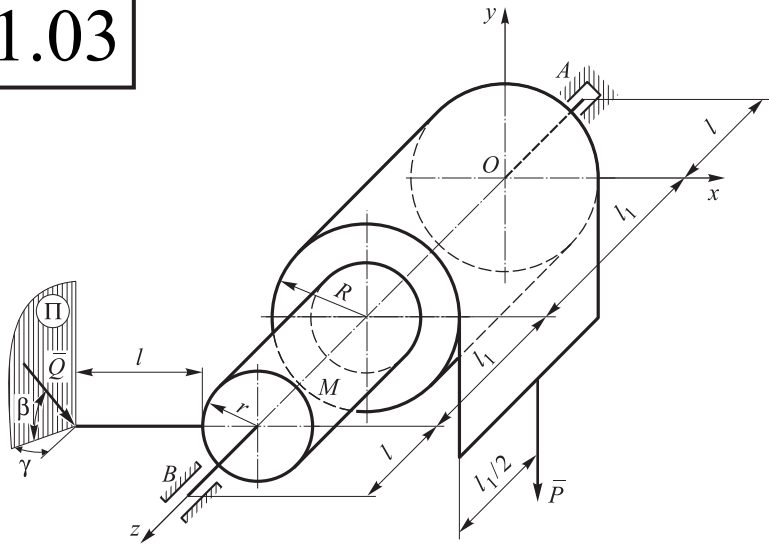
1.02



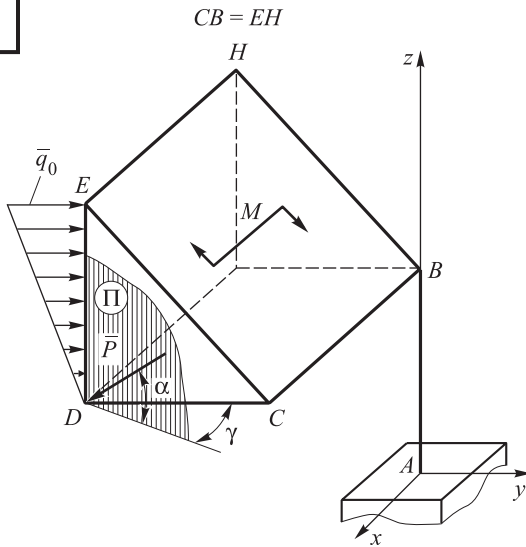
2.02



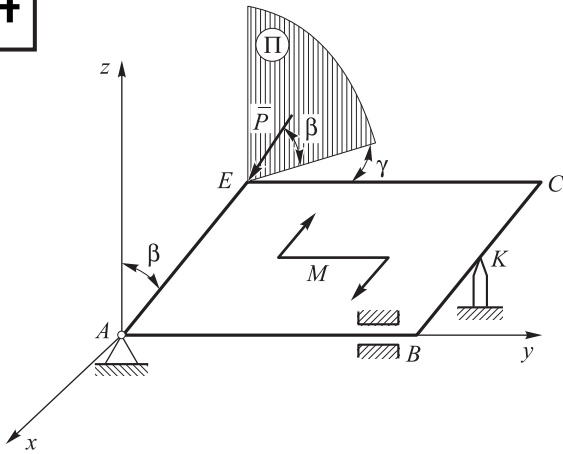
1.03



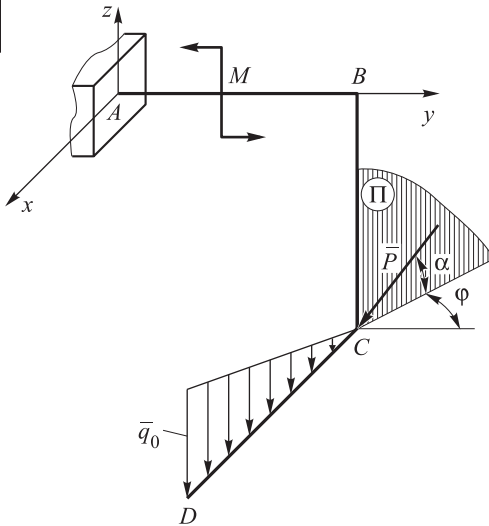
2.03



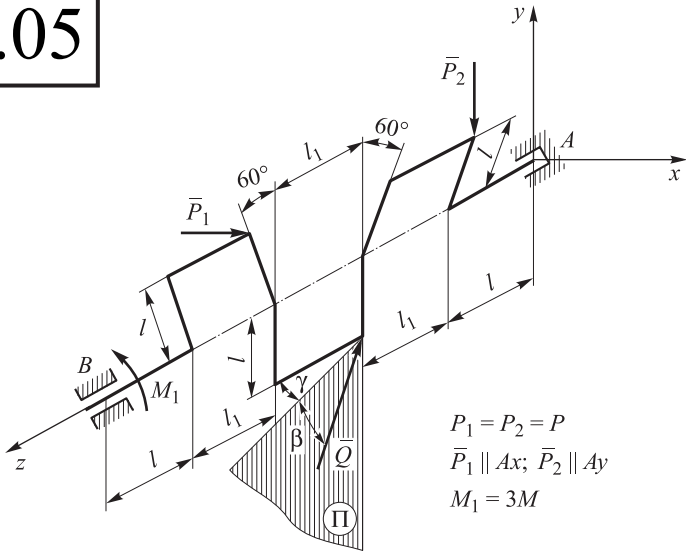
1.04



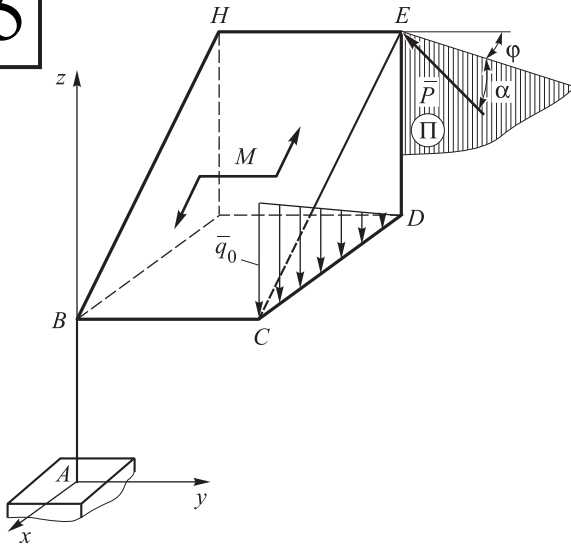
2.04



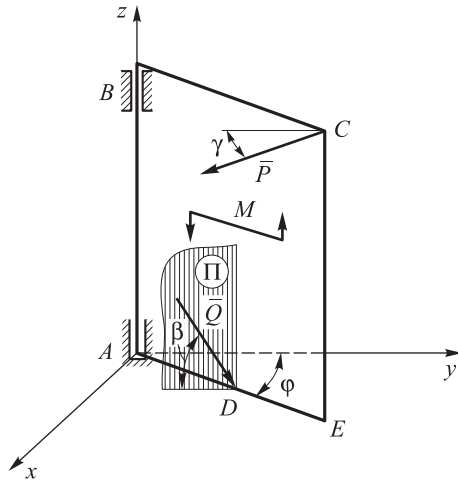
1.05



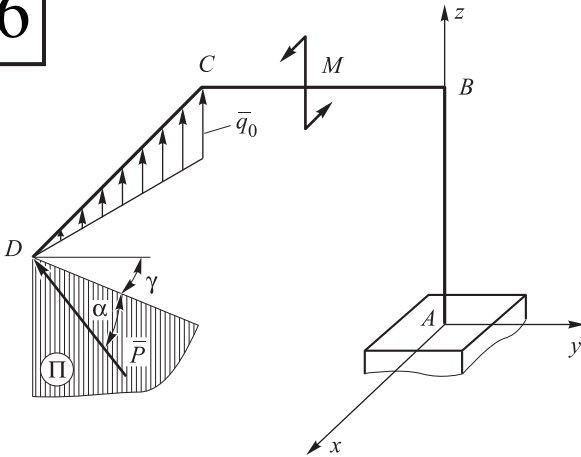
2.05



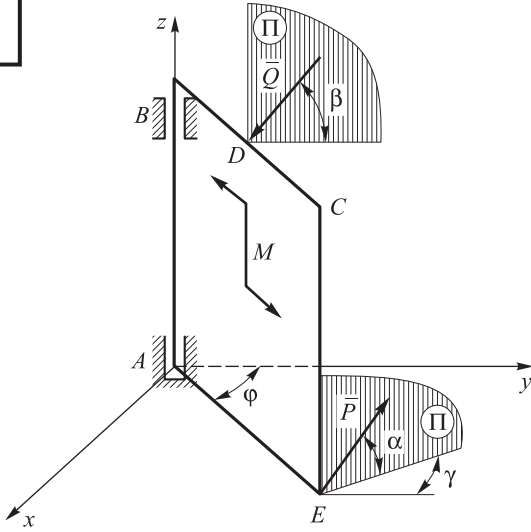
1.06



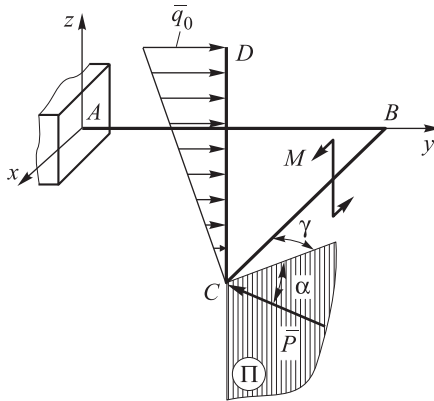
2.06



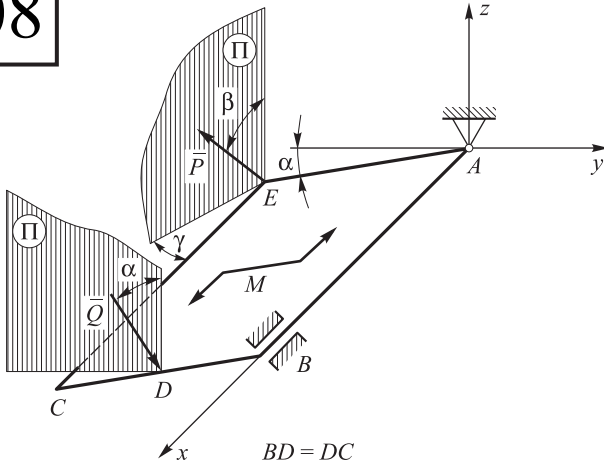
1.07



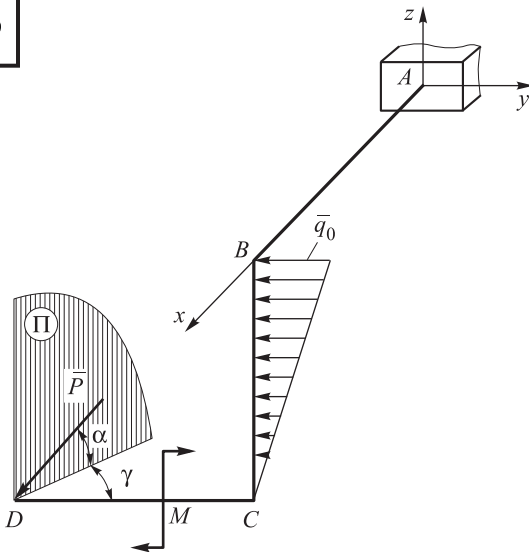
2.07



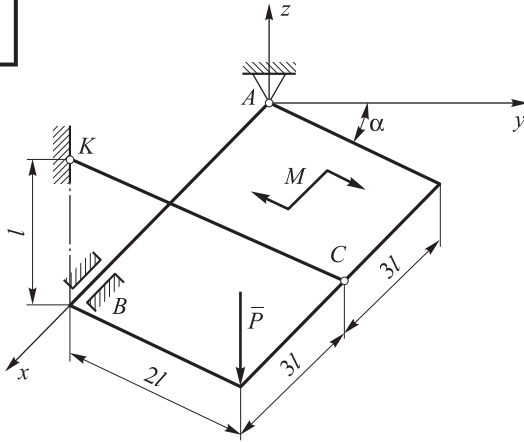
1.08



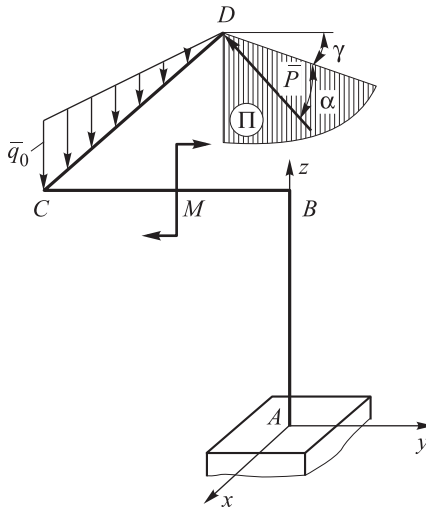
2.08



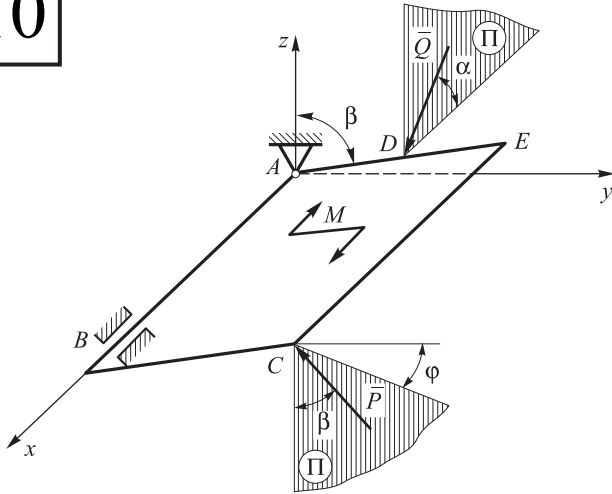
1.09



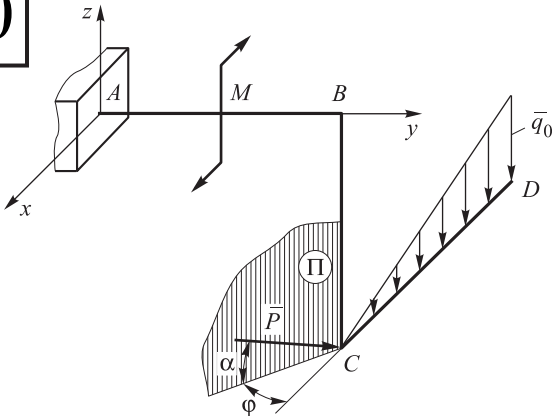
2.09



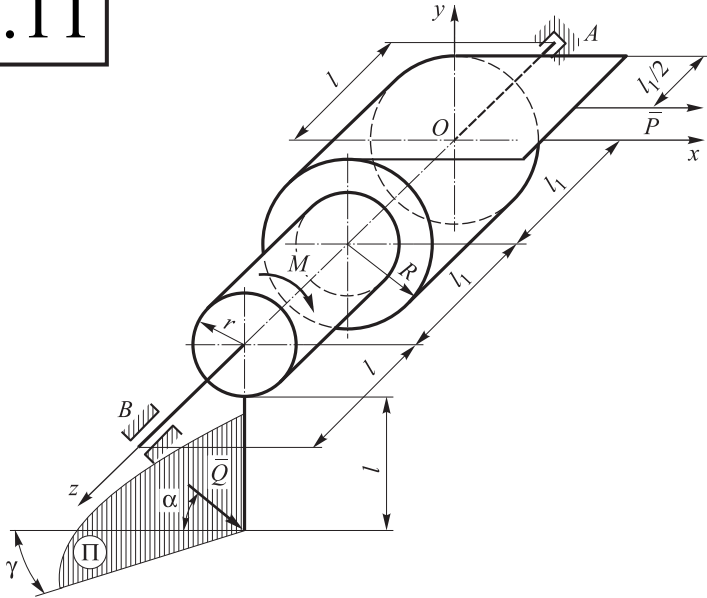
1.10



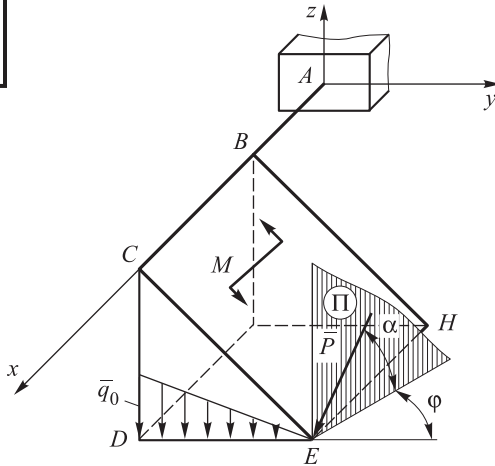
2.10



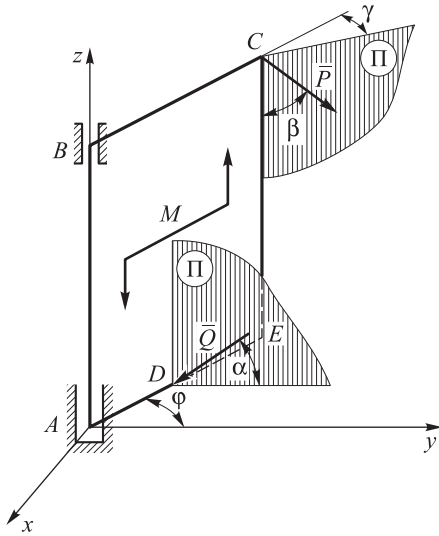
1.11



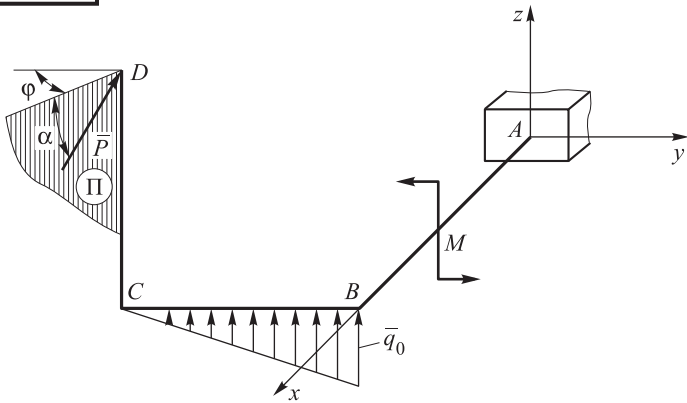
2.11



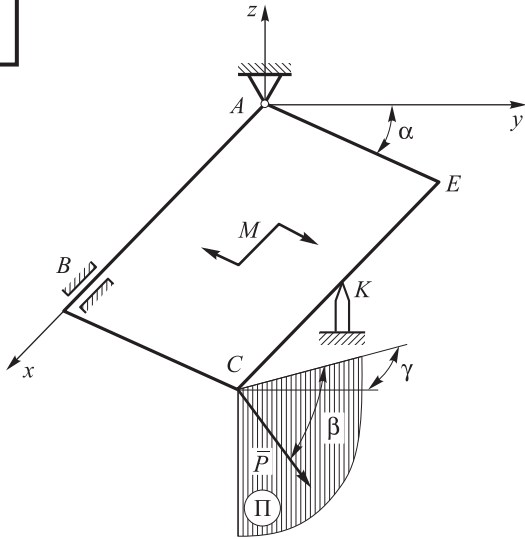
1.12



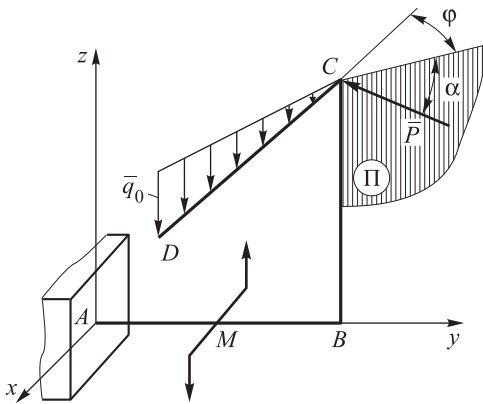
2.12



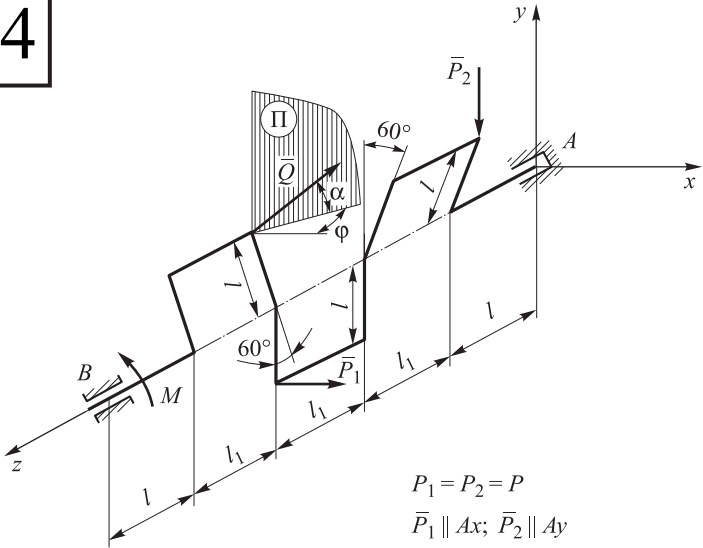
1.13



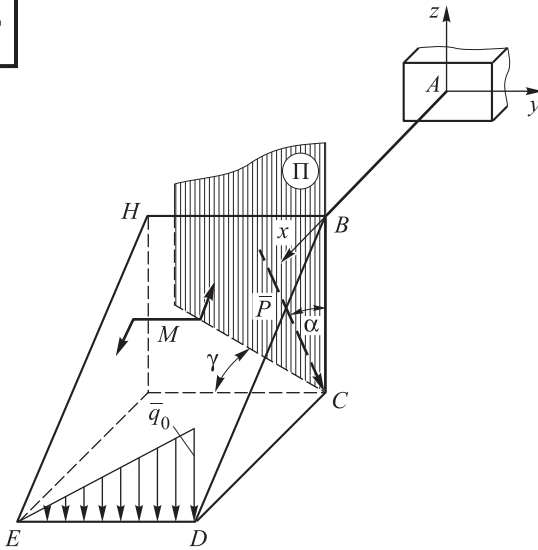
2.13



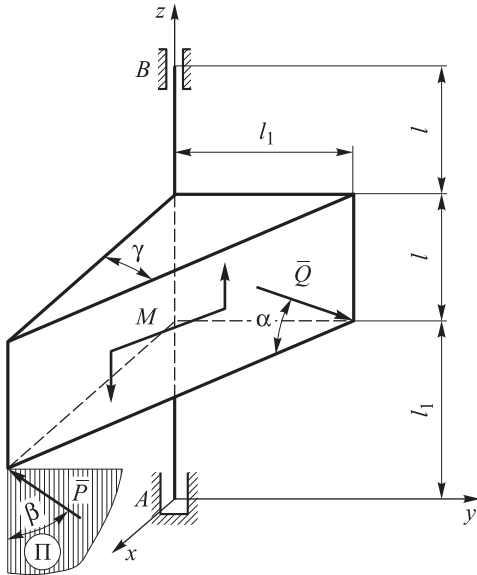
1.14



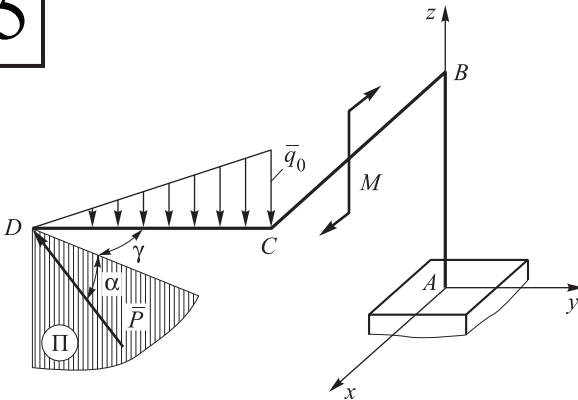
2.14



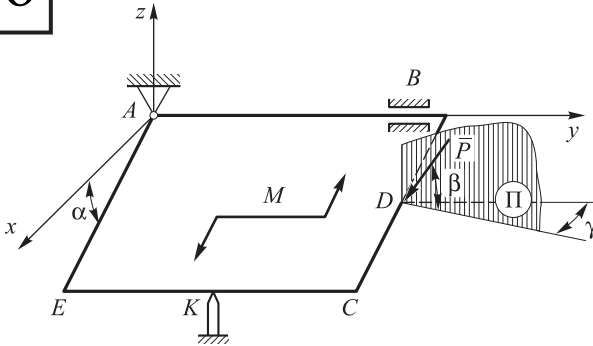
1.15



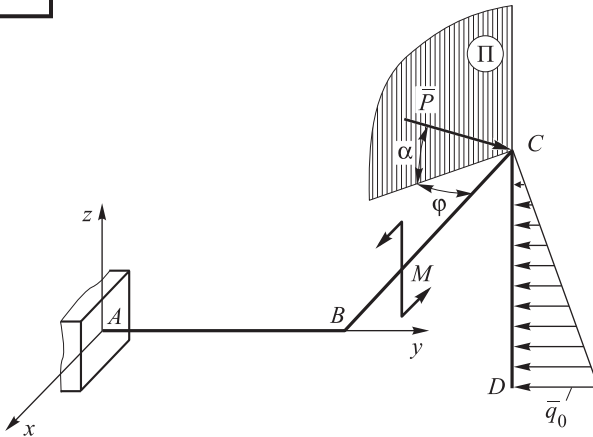
2.15



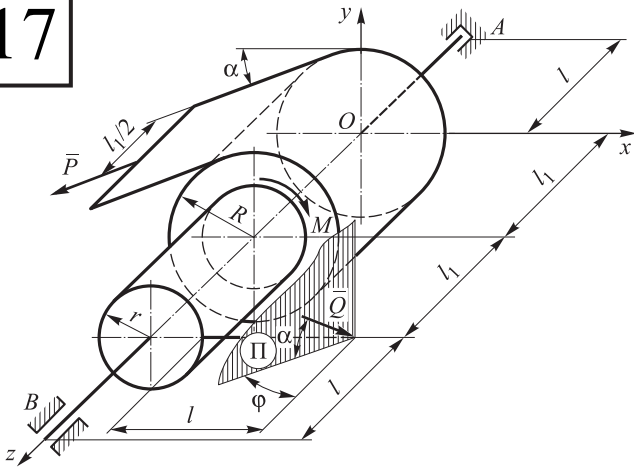
1.16



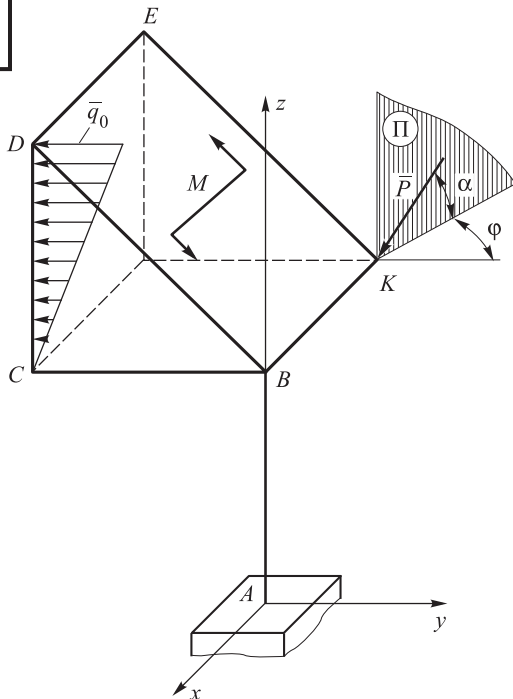
2.16



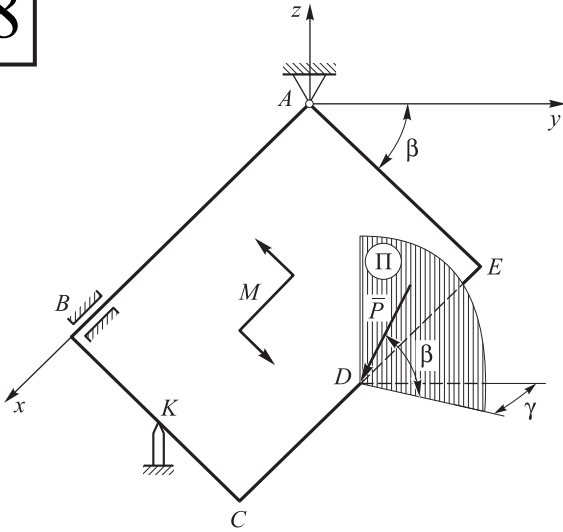
1.17



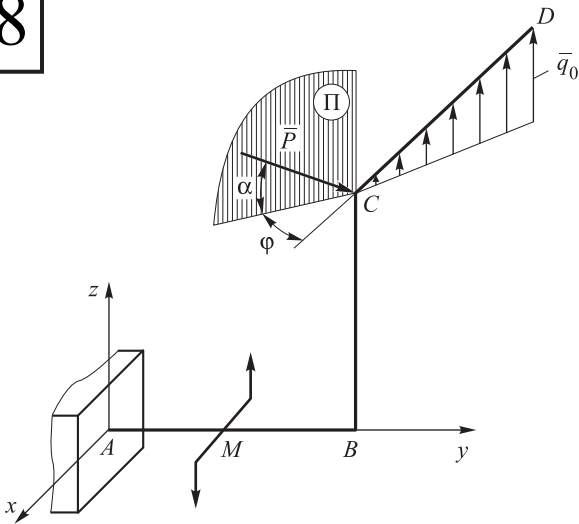
2.17



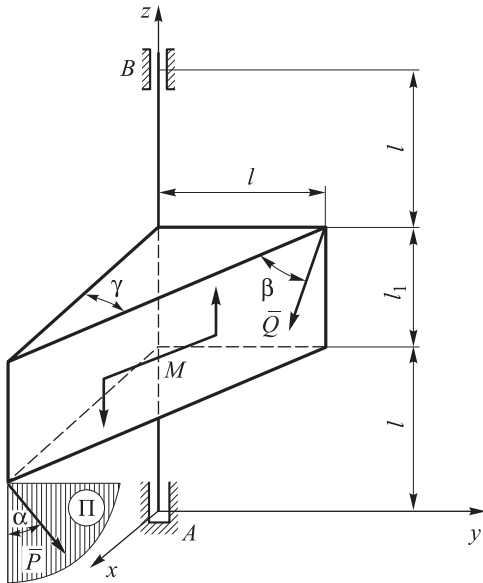
1.18



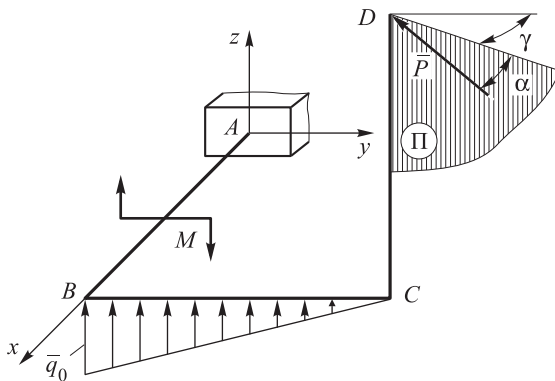
2.18



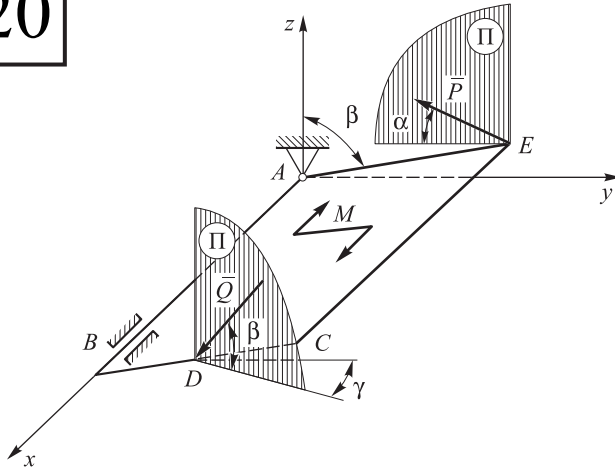
1.19



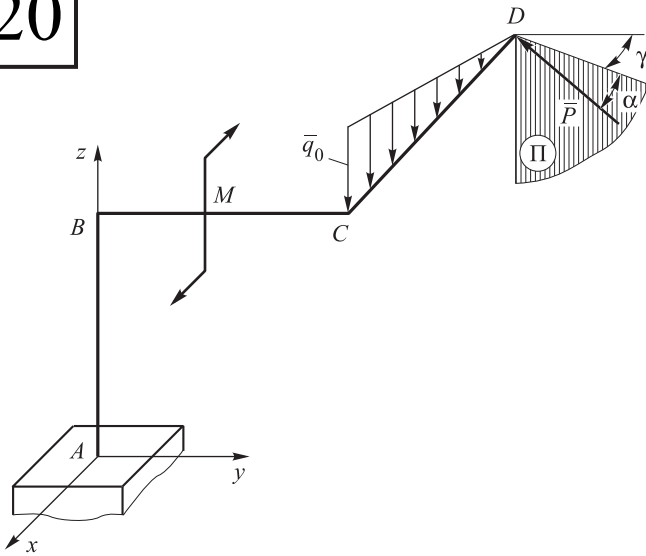
2.19



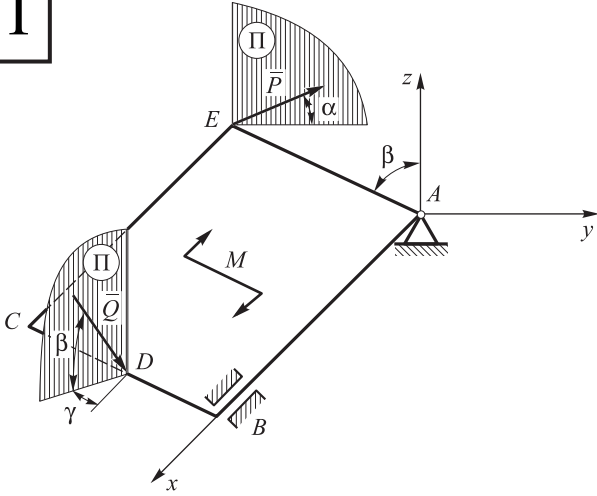
1.20



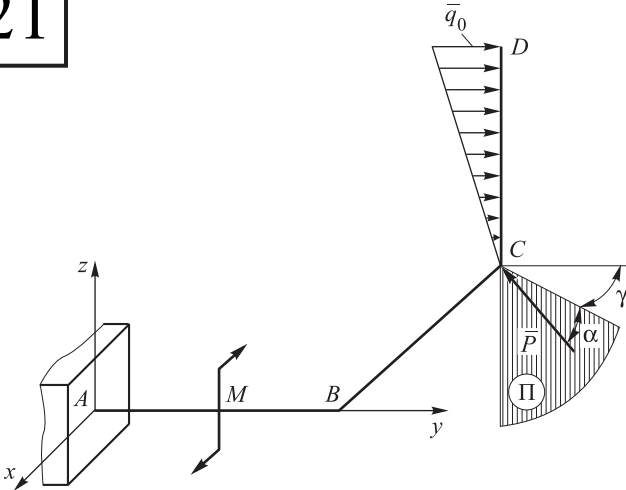
2.20



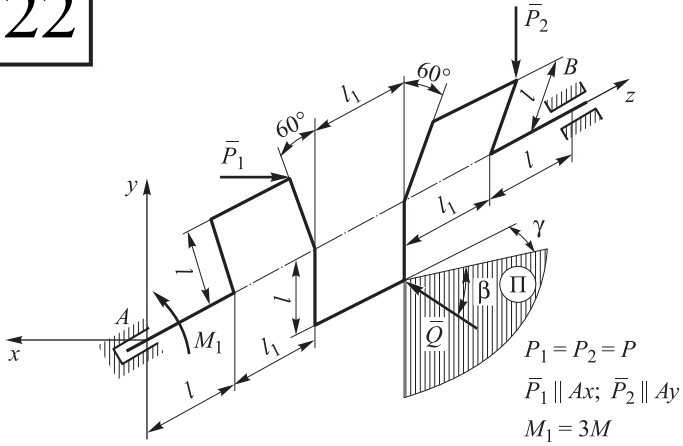
1.21



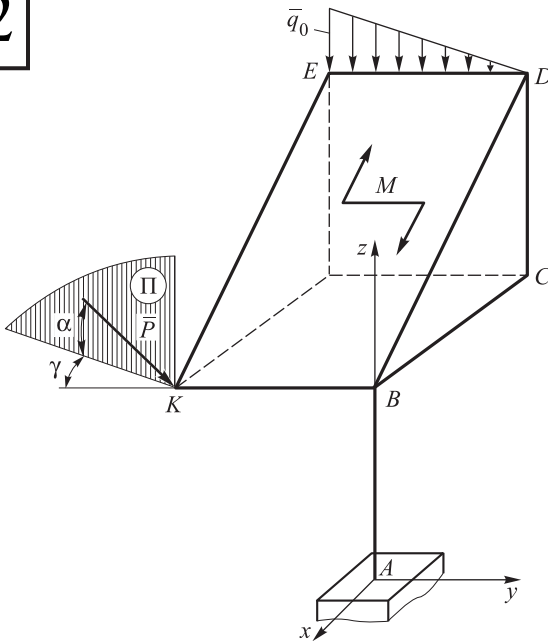
2.21



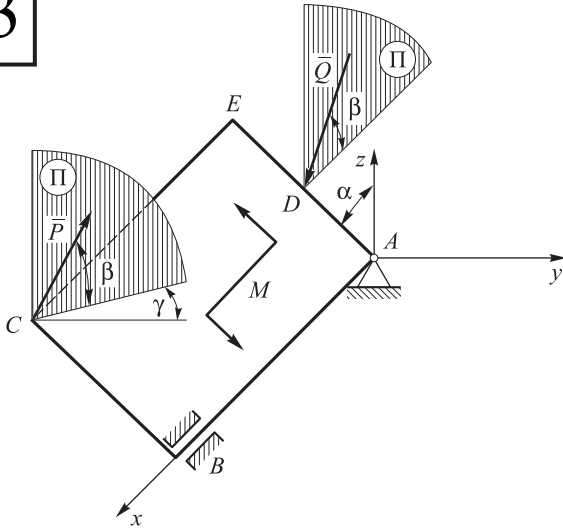
1.22



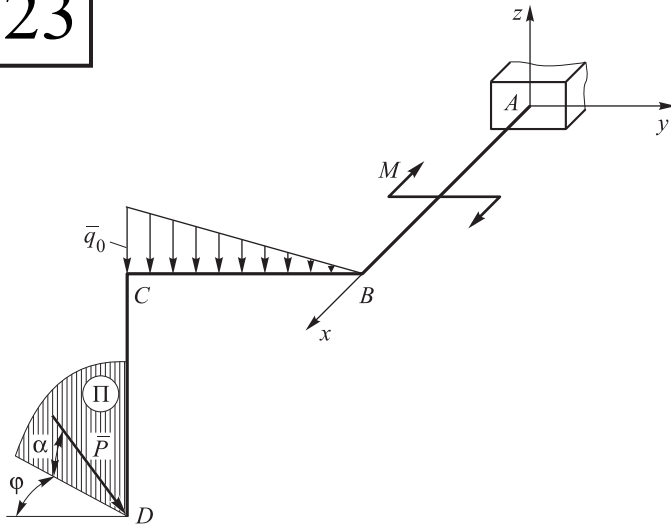
2.22



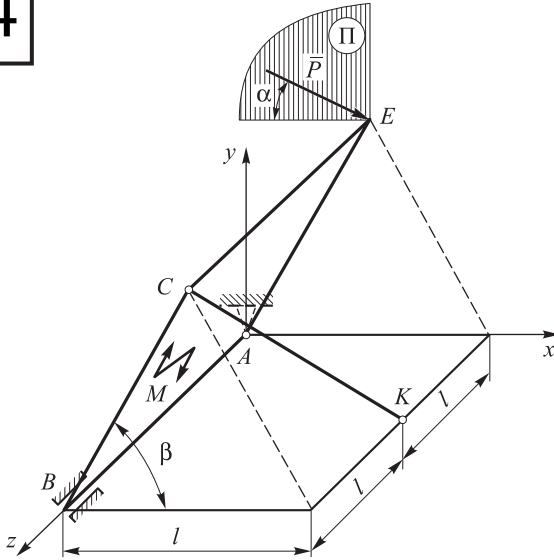
1.23



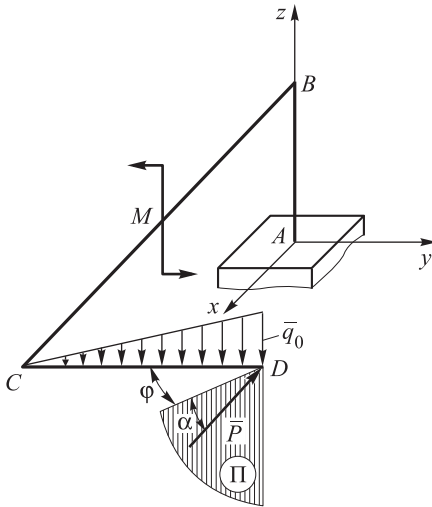
2.23



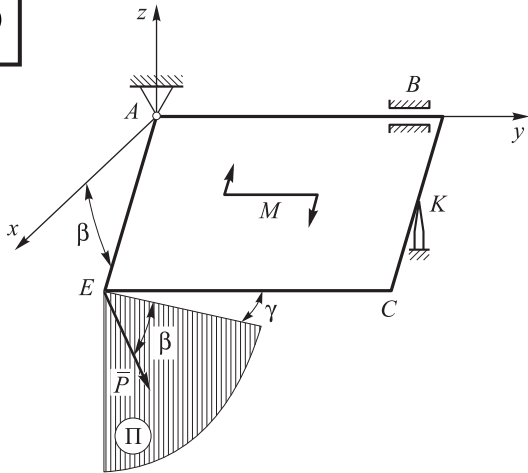
1.24



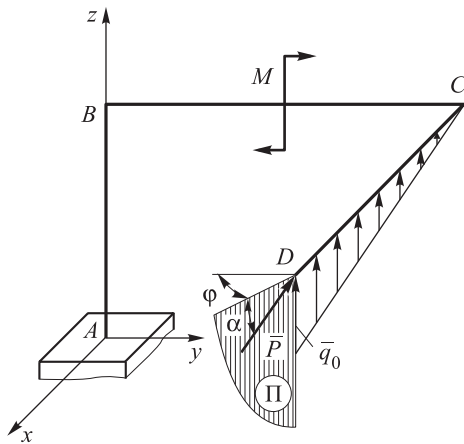
2.24



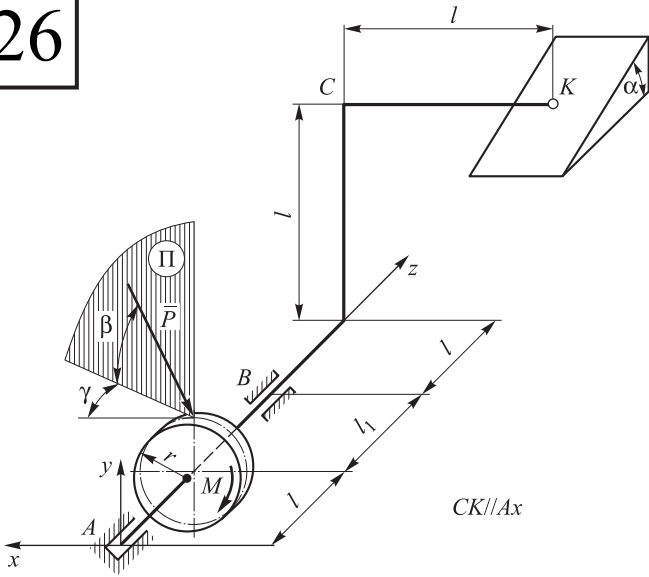
1.25



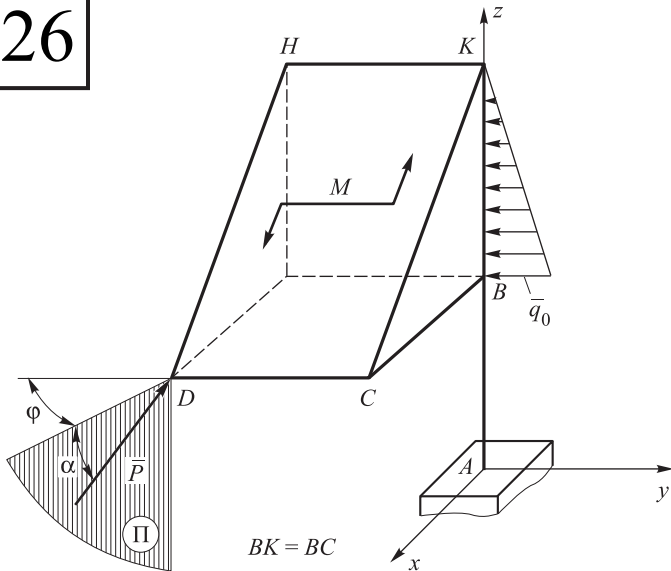
2.25



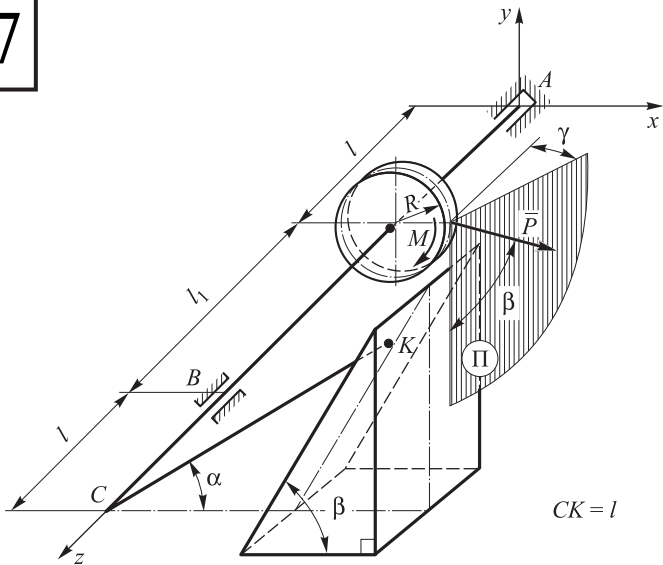
1.26



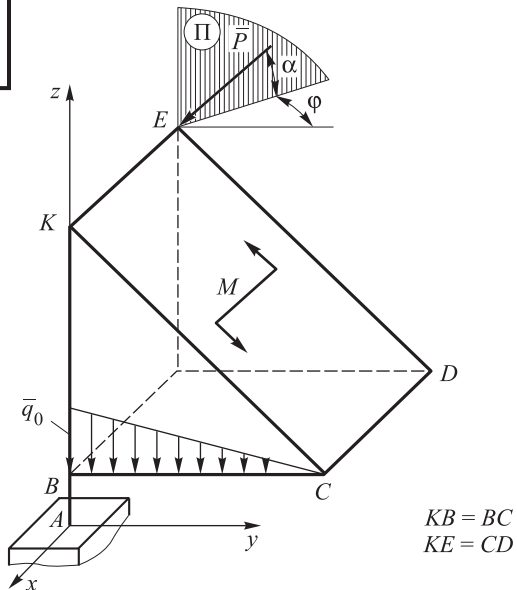
2.26



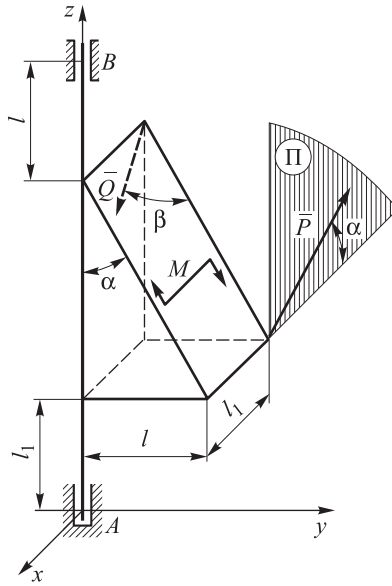
1.27



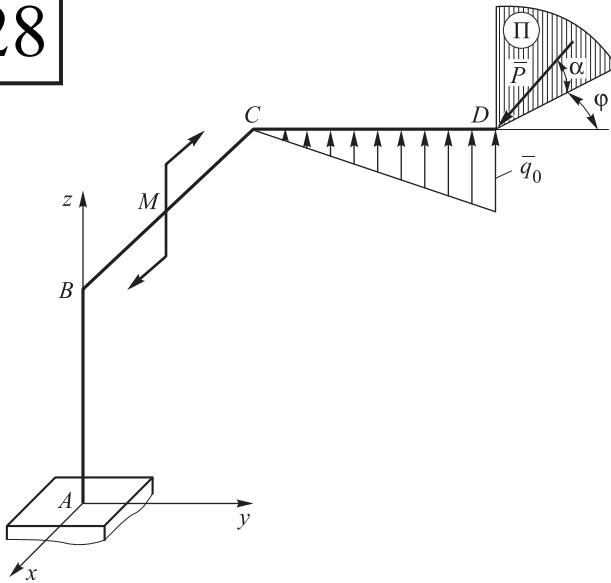
2.27



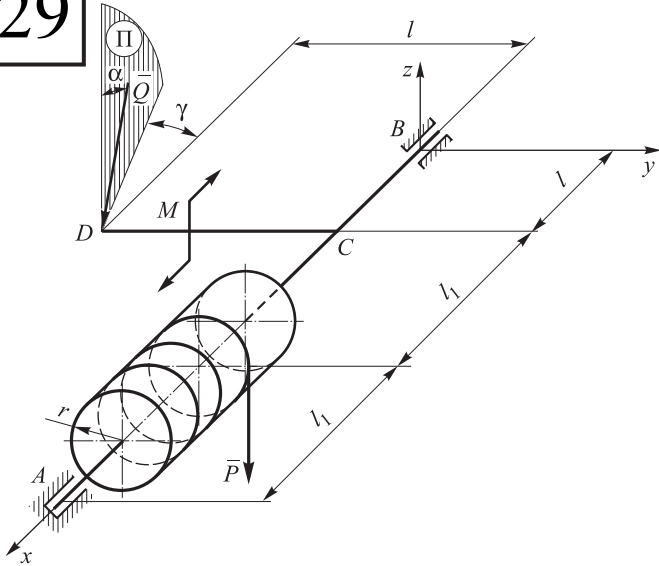
1.28



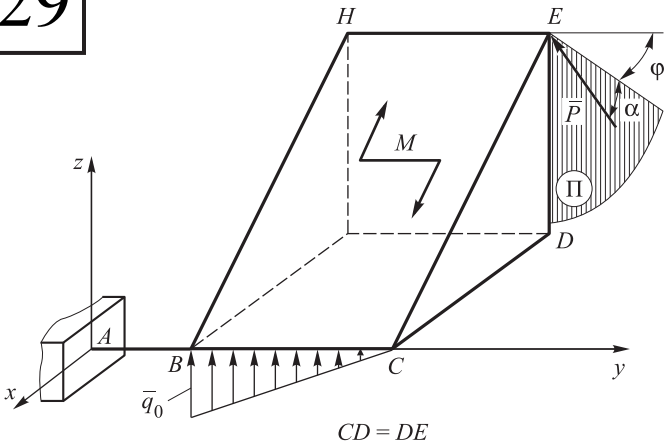
2.28



1.29



2.29



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Решение типовых задач	4
Решение задач пространственной статики с применением ЭВМ	10
Литература.....	14
Приложение.....	15

Учебное издание

Кокушкин Вячеслав Вячеславович
Саяпин Сергей Николаевич
Шкапов Павел Михайлович

Пространственная статика

Редактор *О.М. Королева*
Корректор *О.Ю. Соколова*
Компьютерная верстка *Е.В. Жуковой*

В оформлении использованы шрифты
Студии Артемия Лебедева.

Оригинал-макет подготовлен
в Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Подписано в печать 02.11.2015 г. Формат 60×90/16.
Усл. печ. л. 3,0. Тираж 100 экз. Изд. № 6-2014. Заказ

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
press@bmstu.ru
www.baumanpress.ru

Отпечатано в типографии МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1.
baumanprint@gmail.com