Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Владимирский государственный университет

Т.В. Полякова, В.А. Тимофеева, Т.С. Шуткина

МАТЕМАТИКА

Методические указания и задания к типовым расчетам

Часть 1

Владимир 2010

УДК 51
ББК 22.1

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, профессор
Владимирского государственного университета
В.А. Скляренко

Печатается по решению редакционного совета
Владимирского государственного университета

Полякова Т.В. и др. Математика. Методические указания и задания к типовым расчетам: Практикум. В 2 ч. / Т.В. Полякова, В.А. Тимофеева, Т.С. Шуткина; Владимирский государственный университет. - Владимир: Издательство Владимирского государственного университета, 2010. - 101 с. - ISBN xxx-x-xxxxx-xxx-x

Издание соответствует программе курса "Математика"за I семестр. Содержатся необходимые теоретические сведения и задачи для самостоятельного решения.

Может использоваться студентами всех специальностей первого курса дневной и заочной формы обучения.

Ил. xx. Библиограф.: xx назв.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN xxx-x-xxxxx-xxx-x

Человек должен верить,
что непонятное можно понять.
И. Гёте

Практикум представляет собой сборник кратких теоретических сведений, примеров решения задач и заданий к типовому расчету по дисциплине "Математика".

Сборник составлен в соответствии с программой курса за I семестр.

Глава 1

Матрицы. Системы линейных уравнений

Матрицы. Линейные операции над матрицами.

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Матрицу обозначают прописными буквами латинского алфавита. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы и обозначаются строчными буквами с двойной индексацией a_{ij}, где i-номер строки, j-номер столбца:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

сокращенно $A = (a_{ij})$, i=1,2,...,m, j=1,2,...,n.

Элементы матрицы, находящиеся на пересечении строки и столбца, номера которых совпадают, образуют главную диагональ и называются диагональными элементами.

Рассмотрим основные виды матриц.

1. Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой*, а из одного столбца - *матрицей-столбцом*:

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ - матрица-строка,

$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ - матрица-столбец.

2. Матрица называется *квадратной* n-го порядка, если число ее строк равно числу столбцов и равно n.

3. *Единичной матрицей* E называется матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, а остальные равны нулю:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Матрица любого размера называется *нулевой* или *нуль-матрицей*, если все ее элементы равны нулю:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Перечислим основные операции над матрицами.

1. *Умножение матрицы на число.*

Произведением матрицы A на число λ называется матрица $B = \lambda \cdot A$, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ для i=1,2,...,m, j=1, 2, ..., n.

Пример 1.1. Произвести умножение матрицы A на число λ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2.$$

Решение. При умножении матрицы на число нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

$$\lambda \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

2. *Сложение матриц.*

Складывать можно только матрицы одинаковых размеров, т.е. матрицы с одинаковым числом строк и столбцов.

Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где a_{ij} и b_{ij} - элементы матриц A и B соответственно ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$).

Пример 1.2. Выполнить сложение двух матриц A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. При сложении двух матриц необходимо сложить соответствующие элементы этих матриц.

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$.

3. *Вычитание матриц.*

Разность двух матриц A и B одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A-B=A+(-1)B$.

Пример 1.3. Выполнить вычитание двух матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. При вычитании матрицы B из матрицы A, необходимо из элементов первой матрицы A вычесть соответствующие элементы второй матрицы B.

$$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$.

4. *Умножение матриц.*

Произведение матрицы A на матрицу B определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Произведением матрицы A размерности $m\times k$ на матрицу B размерности $k\times n$ называется матрица C, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj}, \tag{1.1}$$

для $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$. Каждый элемент c_{ij} матрицы C получается перемножением соответствующих элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-ого столбца матрицы B.

В результате умножения получается матрица $C=A\cdot B$, у которой столько же строк, сколько в матрице A, и столько же столбцов, сколько в матрице B. Для удобства запоминания запишем это кратко:

$$\underbrace{A\cdot B=C}_{(m\times k)(k\times n)=m\times n}$$

Пример 1.4. Выполнить умножение двух матриц A и B:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (1.1).

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+3\cdot 1+1\cdot 3 & 1\cdot 1+3\cdot(-1)+1\cdot 2 & 1\cdot 0+3\cdot 2+1\cdot 1 \\ 2\cdot 2+0\cdot 1+4\cdot 3 & 2\cdot 1+0\cdot(-1)+4\cdot 2 & 2\cdot 0+0\cdot 2+4\cdot 1 \\ 1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot(-1)+3\cdot 2 & 1\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Пример 1.5. Выполнить умножение двух матриц A и B:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Матрица A имеет размерность (2×3), а матрица B - (3×2). Значит в результате умножения получим матрицу $C=A\cdot B$ размерности (2×2).

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4\cdot(-1)-5\cdot(-2)+8\cdot 3 & 4\cdot 5-5\cdot(-3)+8\cdot 4 \\ 1\cdot(-1)+3\cdot(-2)-1\cdot 3 & 1\cdot 5+3\cdot(-3)-1\cdot 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$.

5. *Транспонирование матрицы.*

Транспонированием матрицы называют переход от матрицы A к матрице A^T , в которой строки и столбцы меняют местами с сохранением порядка. Матрица A^T называется транспонированной относительно матрицы A. Другими словами, для матрицы A:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

транспонированная матрица A^T выглядит следующим образом

$$\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{mj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{im} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

<u>Пример 1.6.</u> Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Воспользуемся формулой (1.2).

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Для перечисленных выше операций справедливы следующие свойства:

1. $A + B = B + A$ - коммутативность сложения;
2. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$ - ассоциативность сложения;
4. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ - ассоциативность умножения;
5. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ - дистрибутивность умножения относительно сложения;

6. $A \cdot B \neq B \cdot A$ - для двух матриц операция умножения некоммутативна.

Определители.

Определитель - число, характеризующее квадратную матрицу A, обозначается |A| или через $\triangle$.

Замечание. Определитель может быть найден только для квадратной матрицы.

Определителем матрицы n-го порядка называется алгебраическая сумма $n!$ членов, каждый из которых является произведением n элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы со знаком $+$ или $-$.

Для вычисления определителя матрицы n-го порядка используют метод приведения определителя к треугольному виду и теорему Лапласа. Рассмотрим каждый из них подробнее.

Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида.* В этом случае определитель равен произведению элеменов его главной диагонали. Приведение любого определителя матрицы n-го порядка к треугольному виду всегда возможно.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:
$\triangle = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$ (разложение по элементам i-й строки, $i = 1, 2, \ldots, n$),
$\triangle = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{sj}$ (разложение по элементам j-го столбца, $j = 1, 2, \ldots, n$).

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$ называется элемент a_{11}:

$$\triangle_1 = |A| = a_{11}.$$

Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$ называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\triangle_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{1.3}$$

Оно равно разности произведения чисел, стоящих на главной диагонали, и произведения чисел, стоящих на побочной диагонали.

Пример 1.7. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (1.3) для вычисления определителя матрицы второго порядка:

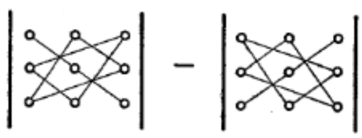
$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Ответ: $|A| = 1$.

Определителем матрицы третьего порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число, которое представляет алгебраическую сумму, состоящую из шести слагаемых. В каждое слагаемое входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в формулу, легко запомнить, пользуясь правилом треугольника (*правилом Саррюса*):



$$\triangle_3 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}. \qquad (1.4)$$

Пример 1.8. Вычислить определитель следующей матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (1.4) для вычисления определителя матрицы третьего порядка:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot9 + 3\cdot4\cdot8 + 2\cdot6\cdot7 - (3\cdot5\cdot7 + 1\cdot6\cdot8 + 2\cdot4\cdot9) = 0$$

Ответ: $|A| = 0$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Пример 1.9. Вычислить минор M_{23} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Используя определение минора, данное выше, получим:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6.$$

Ответ: $M_{23} = -6$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение вычисляется по формуле:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{1.5}$$

Пример 1.10. Вычислить алгебраическое дополнение A_{32} матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для вычисления алгебраического дополнения A_{32}, воспользуемся формулой (1.5):

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(6 - 4\cdot3) = 6.$$

Ответ: $A_{32} = 6$.

Пример 1.11. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Приведем данный определитель к нижнетреугольному виду. Пятый столбец определителя сложим с первым, затем умножим пятый столбец на 3 и сложим его со вторым, умножим на 2 и сложим с третьим, умножим на 8 и сложим с четвертым столбцом. В итоге получим определитель треугольного вида, который равен исходному:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 22 = -5544.$$

Ответ: -5544.

Рассмотрим основные свойства определителей.

1. Если какая-либо строка (столбец) состоит только из нулей, то ее определитель равен 0.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ, то ее определитель умножится на это число λ.

3. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется $|A| = |A^T|$.

4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

5. Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен 0.

6. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен 0.

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна 0, т. е. при $i \neq j \quad \sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{js} = 0$.

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и тоже число.

9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|C| = |A| \cdot |B|$, где A и B - матрицы n-го порядка.

Пример 1.12. Используя свойства определителей, вычислить следующий определитель:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

(Вычитаем из последнего столбца определителя $\triangle$ третий столбец.)

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \text{-3} \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

(Умножим первую строку на 3 и сложим ее со второй строкой. Умножим первую сроку на (-1) и сложим ее сначала третьей строкой, затем с четвертой.)

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 9 & 13 & 17 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

(Разложим полученный в ходе преобразований определитель по последнему столбцу, используя теорему Лапласа.)

$$= 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

(Вынесем из второй строки общий множитель 2.)

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

(Сложим третий столбец определителя сначала с первым столбцом, затем со вторым.)

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 26 & 30 & 17 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

(Разложим полученный определитель, используя теорему Лапласа, по второй строке.)

$$= -2 \cdot (-1)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 26 & 30 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2(-52 - 60) = 224.$$

Ответ: $\triangle = 224$.

Обратная матрица

Матрица A называется *невырожденной (неособой)*, если ее определитель $|A| \neq 0$. Иначе, если $|A| = 0$, матрица A называется *вырожденной (особой)*.

Матрица B называется *обратной* по отношению к матрице A, если произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ равны единичной матрице: $A \cdot B = B \cdot A = E$.

Для матрицы, обратной по отношению к матрице A, принято обозначение A^{-1}.

Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет обратную матрицу.

Для нахождения обратной матрицы пользуются следующей формулой:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

где $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$,

матрица $A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}$ называется *присоединенной* и получается из квадратной матрицы A порядка n заменой каждого элемента на его алгебраическое дополнение с последующим транспонированием .

Пример 1.13. Найти обратную матрицу к матрице:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Проверим, имеет ли данная матрица обратную. Вычислим значение определителя $|A|$:

$$|A| = 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 1 = 10.$$

Итак, $|A| \neq 0$, значит исходная матрица имеет обратную.

Вычислим присоединенную матрицу A^*:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10.$$

Значит,

$$A^* = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Запишем соответствующую обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & -0.2 & 0 \\ 0.8 & -0.4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & -0.2 & 0 \\ 0.8 & -0.4 & -1 \end{pmatrix}.$

Обратную матрицу можно так же найти, используя метод Жордана-Гаусса. Для этого к матрице A приписывается единичная матрица того же порядка $(A|E)$. После умножения обеих частей полученной матрицы на A^{-1} справа, получим:

$$(A|E) = (A \cdot A^{-1}|E \cdot A^{-1}).$$

Левая часть этой матрицы есть матрица E, правая часть - A^{-1}. Следовательно, матрицу $(A|E)$ надо преобразовать так, что бы в левой части получилась матрица E, тогда обратная матрица будет находиться в правой части преобразованной матрицы.

Пример 1.14. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

методом Жордана-Гаусса.

*Решение.*Составим матрицу (A|E) и будем преобразовывать ее так, чтобы в левой части вместо A получить E:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Разделим первую строку матрицы на первый диагональный элемент $a_{11} = 2$. Затем умножим эту строку на 4 и вычтем из нее вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку на 2, а третью строку на 5 и вычтем из второй строки третью. Затем разделим вторую строку на второй диагональный элемент $a_{22} = 5$. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

Умножим первую строку на 10 и вычтем из нее третью строку. Затем разделим третью строку на 5, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 15 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} & -1 \end{array}\right).$$

Умножим вторую строку на 15 и вычтем ее из первой:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} & -1 \end{array}\right).$$

Разделим первую строку на 10. Таким образом, в преобразованной матрице до черты получили матрицу E, а после черты - A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & -0.4 & -1 \end{array}\right).$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & -0.4 & -1 \end{pmatrix}.$

Ранг матрицы

Дана прямоугольная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в этой матрице k произвольных строк и k произвольных столбцов ($k \leq m$, $k \leq n$). Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы A, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется *минором* k-го порядка матрицы A. Матрица A имеет $C_m^k \cdot C_n^k$ миноров k-го порядка.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок минора этой матрицы, отличного от нуля. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг этой матрицы равен нулю.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется *базисным минором* этой матрицы.

Ранг матрицы A обозначается через $r(A)$ или $rangA$. Если $r(A) = r(B)$, то матрицы A и B называются эквивалентными. В этом случае пишут $A \sim B$.

Ранг матрицы не изменится, если к матрице применяют элементарные преобразования. Под элементарными преобразованиями понимают:

1. замену строк столбцами, а столбцов - соответствующими строками;
2. перестановку строк матрицы;
3. вычеркивание строки, все элементы которой равны нулю;
4. умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля;
5. прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

Пример 1.15. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 7 & 10 \\ 3 & 16 & 11 & 10 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим определитель второго порядка на основе данной матрицы, взяв за элементы матрицы, те, которые стоят в левом верхнем углу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5.$$

Полученный определитель отличен от нуля, поэтому переходим к составлению определителей третьего порядка, окаймляя определитель второго порядка, не равный нулю, дополнительными строкой и столбцом до тех пор, пока не получим определитель, отличный от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 16 & 11 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 16 & 10 \end{vmatrix} = -30.$$

Получен определитель третьего порядка, не равный нулю. Переходим к составлению определителей четвертого порядка, дополняя последний определитель, отличный от нуля, оставшимися строкой и столбцом. В данном случае имеем один определитель четвертого порядка - это определитель исходной матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 7 & 10 \\ 3 & 16 & 11 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 16 & 11 & 10 \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку на (-2) и сложим ее с третьей строкой. Заметим, что в результате сложения получились две одинаковые строки, тогда из свойств определителей следует, что оперделитель четвертого порядка равен нулю. Следовательно, для данной матрицы, наибольший порядок минора отличного от нуля, есть третий. Поэтому ранг матрицы равен 3. Этот способ вычисления ранга матрицы называют методом окаймляющих миноров.

Можно вычислить ранг при помощи элементарных преобразований, не изменяющих ранг матрицы. С помощью таких преобразований из исходной матрицы получают единичную. Ранг матрицы равен порядку полученной единичной матрицы.

Найдем ранг матрицы A из предыдущего примера при помощи элементарных преобразований. Получим нули в первом столбце с помощью первой строки. В результате будем иметь две равные строки (вторая и третья). Одну из них можно вычеркнуть. Последнюю строку разделим на 2 и переставим местами второй и третий столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 9 & 7 & 10 \\ 3 & 16 & 11 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

Во втором столбце получим нули с помощью второй строки. Первый столбец умножим на 13 и сложим с третьим; второй умножим на (-5) и сложим с третьим. Последнюю строку разделим на (-3), и с помощью нее получим нули в последнем столбце. В результате будем иметь:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец целиком состоит из нулей. Вычеркнем его. В полученной матрице по главной диагонали стоят три единицы. Следовательно, ранг матрицы равен 3.

Ответ: 3.

Отметим, что при вычислении ранга матрицы при помощи элементарных преобразований не всегда можно сказать, какие именно строки (или столбцы) матрицы линейно-независимы.

Системы линейных уравнениеи.

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1j}x_j & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2j}x_j & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & \ldots & & & & & & \\ a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \ldots & + & a_{ij}x_j & + & \ldots & + & a_{in}x_n & = & b_j \\ & & & & & & \ldots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mj}x_j & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{cases},$$

где a_{ij}, b_{ij}, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$ - произвольные числа, называемые, соответственно, коэффициентами при неизвестных и свободными членами уравнений.

В более краткой записи система имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Решением системы называется такая совокупность n чисел $(x_1 = k_1, x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений. Для совместности системы линейных уравнений необходимо и достаточно чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы (теорема Кронекера - Капелли).

Совместная система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение и *неопределенной*, если она имеет более одного решения. В частности, если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система называется определенной. Если же ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система неопределенная.

Для решения системы линейных уравнений используют различные методы. Рассотрим некоторые из них.

Метод Жордана-Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных).

Прежде всего составляется матрица из коэффициентов при неизвестных и свободных членов уравнений этой системы, называемая расширенной матрицей A системы:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & & \dots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} & b_i \\ & & & \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Над матрицей А производятся следующие элементарные преобразования, в результате которых система уравнений, соответствующая вновь получаемой матрице, остается эквивалентной исходной:

1. перемена местами любых строк матрицы;

2. умножение любой строки матрицы на число, отличное от нуля;

3. прибавление к некоторой строке матрицы другой ее строки, умноженной на любое число;

4. перемена местами любых столбцов (что соответствует перестановке членов, содержащих одноименные неизвестные во всех уравнениях).

В результате этих преобразований получается система, в которой некоторое неизвестное исключено из всех уравнений, кроме одного. К полученной системе снова применяются элементарные преобразования, исключающие другое неизвестное и т.д.

В процессе преобразований могут встретиться несколько случаев.

1. Если на некотором этапе получилась матрица вида

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & d_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_n \end{array} \right), \tag{1.7}$$

то процесс вычислений заканчивается. Исходная система имеет единственное решение. Значения соответствующих неизвестных находятся в правой части матрицы.

2. Если на некотором этапе получилась строка, левая часть которой состоит из нулей, а правая не равна нулю, что соответствует уравнению

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = d_i, \quad (d_i \neq 0),$$

то исходная система не имеет решений, то есть система несовместна.

3. Если на некотором этапе образовалась строка, целиком состоящая из нулей, что отвечает уравнению

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0,$$

то такую строку можно исключить из матрицы, так как написанное уравнение является тождеством. Наличие нулевой строки свидетельствует о том, что в исходной системе имелось, по крайней мере, одно уравнение, являющееся следствием остальных.

4. Если на некотором этапе получилась матрица вида

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_{1k+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_{2k+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{kk+1} & \dots & c_{kn} & d_k \end{array} \right)$$

для $(k < n)$, то процесс вычислений заканчивается. Исходная система имеет бесконечное множество решений. Для получения общего решения оставляется в левой части системы, отвечающей этой матрице, первые k неизвестных, остальные члены уравнений переносятся в правую часть к свободным членам.

Если придать неизвестным в правой части общего решения конкретные значения и подсчитать значения неизвестных левой части, то будем иметь частное решение. Если положить все неизвестные в правой части равными нулю, то соответствующее частное решение будет базисным.

Пример 1.16. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}.$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{array}\right).$$

Будем преобразовывать данную матрицу к нижнетреугольному виду, последовательно применяя к ней равносильные преобразования. Рассмотрим элементы, стоящие на главной диагонали расширенной матрицы. Найдем первый диагональный элемент $a_{11} = 1$. Он не равен нулю. Преобразуем столбец, в котором находится первый диагональный элемент так, чтобы чтобы элементы, находящиеся ниже него стали равными нулю. Для этого умножим ведущую строку (строку, в которой находится диагональный элемент) на $a_{21} = 5$ и после проделаной операции вычтем из нее текущую строку (строку, в которой находится обнуляемый элемент - вторую строку расширенной матрицы). Затем умножим ведущую строку на $a_{31} = 2$ и вычтем из нее, как и в предыдущем шаге, текущую строку (третью). Таким образом получили следующую расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 11 & 0 & 11 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Снова преобразуем полученную матрицу. Найдем второй диагональный элемент $a_{22} = 11$. Он не равен нулю. Добъемся того, чтобы диагональный элемент стал равным 1. Для этого разделим ведущую строку на 11. Далее преобразуем столбец, в котором находится второй диагональный элемент, что бы элемент находящийся ниже него стал равным нулю. Заметим что текущую строку (третью) можно сократить на 3. Вычтем из ведущей строки текущую. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Заметим, что ниже главной диагонали расширенной матрицы стоят нули. Это означает что исходная матрица путем применения равносильных преобразований приведена к нижнетреугольному виду. Выпишем соответствующую ей систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$$

Подставляя $x_3 = 1$ и $x_2 = 1$ в первое уравнение, получим $x_1 = 1$.

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}.$

Пример 1.17. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ x - 3y - 2z = 3 \end{cases}.$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Приведем расширенную матрицу к нижнетреугольному виду, применяя алгоритм, использованный в предыдущем примере. Для удобства вычисления первую строку запишем под третьей:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Найдем первый диагональный элемент и обнулим элементы, стоящие ниже него. Для этого из первой строки вычтем вторую строку. Затем первую строку умножим на 2 и вычтем третью. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -4 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right).$$

Найдем второй диагональный элемент и обнулим элемент, стоящий ниже него. Для этого вычтем из второй строки третью. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right).$$

Выпишем соответствующую ей систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 5y + 5z = -4 \\ 0 = -4 \end{cases}.$$

Обратим внимание на третье уравнение системы. Оно соответствует равенству $0 = -4$. Так как данное равенство ложно, то исходная система будет несовместной.

Ответ: система несовместна.

Пример 1.18. Решить систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ x & - & 4y & + & 9z & = & 15 \\ 3x & + & 2y & + & 7z & = & 19 \end{array}\right. .$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & 9 & 15 \\ 3 & 2 & 7 & 19 \end{array}\right).$$

Приведем систему к нижнетреугольному виду. Рассмотрим первый диагональный элемент. Обнулим элементы, стоящие ниже него. Для этого из первой строки вычтем вторую. Затем первую строку умножим на 3 и вычтем из нее последнюю строку. Тем самым получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -10 & -13 \\ 0 & 7 & -10 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -10 & -13 \end{array}\right).$$

Получили две одинаковые строки. Удалим последнюю строку из рассмотрения, тем самым исходная расширенная матрица преобразована к виду трапеции. Это означает, что исходная система линейных уравнений имеет бесконечное множество решений. Найдем их. Запишем систему линейных уравнения, соответствующую преобразованной расширенной матрице.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ & & 7y & - & 10z & = & -13 \end{array}\right. .$$

Заменим неизвесную z неизвестной $t \epsilon \mathbb{R}$. Выразим из второго уравнения неизвестную y через t:

$$y = \frac{-13+10z}{7} = (z=t) = \frac{10t-13}{7}$$

Выразим из первого уравнения неизвестную x через t, получим:

$$x = 2-3y+z = 3-3\frac{10t-13}{7}+t = \frac{14-30t+39+7t}{7} = \frac{53-23t}{7}.$$

Ответ: $(\frac{53-23t}{7},\frac{10t-13}{7}$,t), где $t \epsilon \mathbb{R}$.

Пример 1.19. Решить систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 5x & - & y & + & 2z & = & 16 \\ 9x & - & y & + & 4z & = & 30 \end{array}\right. .$$

Решение. Выписываем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 16 \\ 9 & -1 & 4 & 30 \end{array}\right).$$

Приведем выписанную матрицу к нижнетреугольному виду. Рассмотрим первый диагональный элемент. Обнулим все элементы первого столбца, стоящие ниже него. Для этого первую строку умножим на 5, а вторую строку на 3 и вычтем из первой строки вторую. Затем умножим первую строку на 3 и вычтем из нее третью строку. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 13 & -11 & -33 \\ 0 & 7 & -7 & -21 \end{array}\right).$$

Сократим третью строку на 7. Рассмотрим второй диагональный элемент и обнулим элемент, стоящий ниже него в столбце. Для этого умножим последнюю строку на 13 и вычтем ее из первой. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 13 & -11 & -33 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 13 & -11 & -33 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Сократив последнюю строку матрицы на 2, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 13 & -11 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Таким образом, исходная матрица приведена к нижнетреугольному виду. Приведем полученную матрицу к верхнетругольному виду (элементы, стоящие выше главной диагонали должны быть равными нулю). Рассмотрим третий диагональный элемент. Обнулим элементы, стоящие выше него. Для этого умножим третью строку на (-11) и вычтем из нее вторую строку. Затем сложим третью строку с первой. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Сократим вторую строку на (-13). Рассмотрим второй диагональный элемент. Обнулим элемент стоящий выше него. Для этого умножим вторую строку на 2 и вычтем из нее первую. Получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Сократим первую строку на (-3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Выпишем систему линейных уравнений, соответствующую преобразованной матрице:

$$\begin{cases} x & & & = & 2 \\ & y & & = & 0 \\ & & z & = & 3 \end{cases}.$$

Ответ: $\begin{cases} x & = & 2 \\ y & = & 0 \\ z & = & 3 \end{cases}.$

Метод Крамера.

Пусть $|A|$ - определитель матрицы системы A, и $|A_j|$ - определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, в зависимости от значения данных определителей, возможно три случая:

1. $|A| = 0$ и хотя бы один из $|A_j| \neq 0$, то система не совместна (нет решений).

2. $|A|$ и все $|A_j| = 0$, то система совместна и неопределена(бесконечно много решений).

3. $|A| \neq 0$ имеет единственное решение, определяемое следующей формулой $x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Пример 1.20. Найти решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 5x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 7x_2 & - & x_3 & = & 8 \end{cases}.$$

Решение. Выпишем матрицу системы, составленную из коэффициентов при неизвестных и столбца свободных членов:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{array}\right).$$

Вычислим определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных системы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33.$$

Последовательно заменив в A первый, второй и третий столбцы свободных членов, получим:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 33, \quad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{33}{33} = 1,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 33, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{33}{33} = 1,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 33, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{33}{33} = 1.$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}.$

Пример 1.21. Найти решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}.$$

Решение. Выпишем матрицу системы, составленную из коэффициентов при неизвестных и столбца свободных членов:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -5 & -8 \\ 0 & 2 & 7 & 17 \end{array}\right).$$

Вычислим определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных системы:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 79.$$

Последовательно заменив в $|A|$ первый, второй и третий столбцы свободных членов, получим:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395, \quad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{395}{79} = 5,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-158}{79} = -2,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237, \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{237}{79} = 3.$$

Ответ: $\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 & = & 5 \\ x_2 & = & -2 \\ x_3 & = & 3 \end{array} \right.$.

Матричные уравнения.

Запишем систему уравнений в матричной форме:

$$AX = B,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & & \dots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

A - матрица системы, X - матрица-столбец неизвестных, B - матрица-столбец свободных членов.

Пусть $|A| \neq 0$. Чтобы решить матричное уравнение $AX = B$, то есть найти неизвестную матрицу X, умножим его на A^{-1} слева: $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$. Так как $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то получаем решение матричного уравнения в виде: $X = A^{-1} \cdot B$.

Таким же образом можно решать любые матричные уравнения, если соответствующие обратные матрицы существуют.

Пример 1.22. Найти решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & -10 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Решение. Запишем данную систему в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение данной системы имеет вид $X = A^{-1} \cdot B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти A^{-1}, проверим невырожденность исходной матрицы:

$$|A| = 30 \neq 0,$$

следовательно матрица A-невырождена.

Найдем присоединенную матрицу A^*:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Итак,

$$A^* = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -7 & -10 & 11 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Запишем соответствующую обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -7 & -10 & 11 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы уравнений:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -7 & -10 & 11 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 &= & 3 \\ x_2 &= & 1 \\ x_3 &= & 5 \end{cases}.$

Пример 1.23. Найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^{-1}, $A \cdot A^{-1}$, $A^{-1} \cdot A$ и $f(A)$, если $f(x) = x^2 + 4x - 7$ для заданных матриц:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Произведение $A \cdot B$ имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Найдем матрицу $C = A \cdot B$, элементы которой $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$. Имеем:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислим

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4+4-9 & 0-2-6 & 1+6-6 \\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2 \\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix},$$

где $|A|=\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=8+4+3+24=39\neq 0,$
то есть матрица A невырожденная. Это означает, что для нее существует обратная матрица. Далее находим присоединенную матрицу A^*:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-8,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=1,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=5,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-11,\quad A_{32}=\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=14,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=8,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=4.$$

Тогда $A^{-1}=\frac{1}{39}\cdot\begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix}.$

4. Вычислим $A\cdot A^{-1}$:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

5. Найдем $A^{-1}A$:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

6. Найдем $f(A)$, если $f(x)=x^2+4x-7$.
Подставим матрицу A в функцию $f(x)$: $f(A)=A^2+4A-7$.
Вычислим A^2, т. е. выполним умножение матрицы A на себя:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ -1 & 7 & 5 \\ -2 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $4A$:

$$4A = 4\cdot\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 8 & -4 & 12 \\ 12 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

Выполняем сложение полученных матриц:

$$A^2 + 4A = \begin{pmatrix} 19 & 2 & -2 \\ -1 & 7 & 5 \\ -2 & 2 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ 8 & -4 & 12 \\ 12 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 17 \\ 10 & 10 & 21 \end{pmatrix}.$$

К полученной сумме прибавим (-7). Это число представимо в следующем виде:

$$-7 = -7\cdot 1 = -7\cdot E = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$f(A) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 7 & -4 & 17 \\ 10 & 10 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 11 & 4 & 23 \\ 10 & 14 & 14 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A\cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$, $B\cdot A = \begin{pmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,
$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & \frac{-11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix}$, $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E$, $f(A) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 11 & 4 & 23 \\ 10 & 14 & 14 \end{pmatrix}$.

Пример 1.24. Для данного определителя $\triangle$ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12} и a_{32}. Вычислить определитель $\triangle$:

a. разложив его по элементам 1-й строки;

b. разложив его по элементам 2-го столбца;

c. получив дополнительно нули в 1-й строке.

$$\triangle = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычислим миноры элементов a_{12} и a_{32}:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 16 + 6 + 12 + 4 - 16 = -18,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 12 - 12 - 8 = -20.$$

Алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{32} соответственно равны:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = 18,$$
$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = 20.$$

a. Используя теорему Лапласа, разложим определитель $\triangle$ по первой строке:

$$\triangle = a_{11}A_{11} + a_{12}A12 + a_{13}A13 + a_{14}A_{14} =$$
$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= -3(8 + 2 + 4 - 4) - 2(-8 - 16 + 6 + 12 + 4 - 16) + 16 - 12 - 4 + 32 = 38.$$

b. Разложим определитель $\triangle$ по элементам 2-го столбца:

$$\triangle = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -2(-8 + 6 - 16 + 12 + 4 - 16) - 2(12 + 6 - 6 - 16) - 6 + 16 - 12 - 4 = 38.$$

c. Вычислим $\triangle$, используя свойства определителей, получив предварительно нули в первой строке. Умножим третий столбец определителя на 3 и прибавим его к первому столбцу. Затем умножим третий столбец определителя на (-2) и прибавим его ко второму столбцу. Тогда в первой строке все элементы кроме третьего будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам первой строки и вычислим его:

$$\triangle = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-56 + 18) = 38.$$

Ответ: $M_{12} = -18$, $M_{32} = -20$, $A_{12} = 18$, $A_{32} = 20$, $\triangle = 38$.

Пример 1.25. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}.$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее:
a. используя формулы Крамера;
b. матричным методом;
c. методом Гаусса.

Решение. Совместность данной системы линейных уравнений проверим, используя теорему Кронекера-Капелли. С помошью элементарных преобразований найдем ранг матрицы, состоящей из коэффициентов при неизвестных данной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

и ранг расширенной матрицы

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right).$$

Для этого умножим первую строку матрицы B на (-2) и сложим со второй строкой, затем умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей. Поменяем местами второй и третий столбцы. Получим:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{array}\right).$$

Следовательно, $rangA = rangB = 3$ (т. е. числу неизвестных). Значит, исходная система совместна и имеет единственное решение.

a. По формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\triangle_1}{\triangle}, \quad x_2 = \frac{\triangle_2}{\triangle}, \quad x_3 = \frac{\triangle_3}{\triangle},$$

где

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16,$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64,$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16,$$

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32.$$

Находим $x_1 = \frac{64}{-16}$, $x_2 = \frac{-16}{-16}$, $x_3 = \frac{32}{-16}$.

b. Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем в матричной форме $A \cdot X = C$. Решение системы в матричной форме имеет вид $X = A^{-1} \cdot C$.

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Проверим необходимое условие ее существования:

$$|A| = 16,$$

следовательно, обратная матрица A^{-1} к матрице A существует.
Найдем присоединенную матрицу A^* к данной матрице A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{vmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{vmatrix}.$$

Найдем решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot C = -\frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-45+32-77}{-16} \\ \\ \frac{-9+7}{-16} \\ \\ \frac{-42+32-42}{-16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = -2$.

c. Решим систему методом Гаусса. Найдем первый диагональный элемент - x_1. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на 2 и вычтем полученное уравнение из второго, затем первое уравнение умножим на 3 и вычтем его из 3-го. В результате получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right).$$

Сократим последнюю строку полученной матрицы на 16:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Запишем по последней матрице полученную путем равносильных преобразований систему линейных уравнений эквивалентную исходной:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ & - & 6x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ & & x_2 & & & = & 1 \end{array} \right. .$$

Очевидно, $x_2 = 1$. Подставим полученное значение во второе уравнение и выразим x_3. Таким образом, получим $x_3 = -2$. Теперь подставим x_2 и x_3 в 1-е уравнение. Получим $x_1 = -4$.

Ответ: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ (эквивалентная запись $(-4, 1, -2)$).

Пример 1.26. Дана система линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{cases}.$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее:
a. используя формулы Крамера;
b. матричным методом;
c. методом Гаусса.

Решение. Проверим, совместна ли система с помощью теоремы Кронекера - Капелли. Рассмотрим расширенную матрицу системы линейных уравнений:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

Поменяем первый и третий столбцы местами. Умножим первую строку на 3 и сложим ее со второй, затем умножим первую строку на 2 и сложим с третьей. Вычтем из второй строки третью, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & -8 & 9 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Заметим, что ранг матрицы, составленой из коэффициентов при неизвестных $rangA = 2$, а ранг расширенной матрицы $rangB = 3$. По теореме Кронекера - Капелли, так как $rangA \neq rangB$, следует несовместность исходной системы.

Ответ: система несовместна.

Задания для самостоятельного выполнения.

Задание 1. Даны матрицы A и B.
a. Найти $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^{-1}, $A \cdot A^{-1}$, $A^{-1} \cdot A$.
b. Вычислить значение функции $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 5x - 9$.

1.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.2 $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1.3 $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

1.4 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

1.5 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.6 $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & 1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.7 $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.8 $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

1.9 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

1.10 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.11 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1.12 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.13 $A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

1.14 $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.15 $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

1.16 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.17 $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.18 $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

1.19 $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1.20 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1.21 $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1.22 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.23 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$.

1.24 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.25 $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

1.26 $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.27 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.28 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.29 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1.30 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 2. Для данного определителя $\triangle$ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2}, a_{3j}. Вычислить определитель $\triangle$:
a. разложив его по элементам i-й строки;
b. разложив его по элементам j-го столбца;
c. получив дополнительно нули в i-й строке.

2.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $i = 3, \quad j = 3.$

2.3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.4. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$, $i = 1, \quad j = 4.$

2.5. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.6. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$, $i = 3, \quad j = 3.$

2.7. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$, $i = 1, \quad j = 4.$

2.9. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.10. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $i = 3, \quad j = 3.$

2.11. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.12 $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i = 1, \quad j = 4.$

2.13. $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.14. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, $i = 3, \quad j = 3.$

2.15. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.16. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $i = 3, \quad j = 3.$

2.17. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.18. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$, $i = 1 \quad j = 4.$

2.19. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.20. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$, $i = 3, \quad j = 3.$

2.21. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.22. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $i = 1, \quad j = 4.$

2.23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.24. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$, $i = 3, \quad j = 3.$

2.25. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$, $i = 4, \quad j = 1.$

2.26. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 1, \quad j = 4.$

2.27. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $i = 4,\quad j = 1.$

2.28. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, $i = 3,\quad j = 3.$

2.29. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix}$, $i = 4,\quad j = 1.$

2.30. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, $i = 1,\quad j = 4.$

Задание 3. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:
a. методом Крамера;
b. с помощью обратной матрицы;
c. методом Гаусса.

3.1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 2x_1 - 1x_2 + 2x_3 = 10 \\ 1x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -3 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -15 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -12 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -7 \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -21 \\ 1x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -12 \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9 \\ 7x_1 - 5x_2 = 2 \\ 4x_1 + 11x_3 = 15 \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -8 \\ 5x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$

3.21. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$

3.22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

3.23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

3.24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$

3.25. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

3.26. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

3.27. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

3.28. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -8 \end{cases}$

3.29. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$

3.30. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$

Задание 4. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:
a. методом Крамера;
b. с помощью обратной матрицы;
c. методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_3 = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 = 5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1 \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 27x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3 \\ x_2 - x_2 + 5x_3 = -1 \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 6 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4 \end{cases}$ 22. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_2 - x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$

Глава 2

Аналитическая геометрия

Вектора. Скалярное произведение векторов.

Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A, а конец - в точке B, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. Если же начало и конец вектора не указываются, то его обозначают строчной буквой латинского алфавита $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,...

Через $\overrightarrow{BA}$ обозначим вектор, направленный противоположно вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор, у которого начало и конец совпадают, называют *нулевым* и обозначают $\vec{0}$. Его направление является неопределенным. Другими словами, такому вектору можно приписать любое направление.

Длиной или *модулем* вектора называется расстояние между его началом и концом. Записи $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\vec{a}|$ обозначают модули векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}$ соответственно. Если известны координаты вектора $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, то модуль вектора вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \tag{2.1}$$

Векторы называют *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине.

К линейным операциям над векторами относятся: умножение вектора на число и сложение векторов.

Произведением вектора $\vec{a}$ и числа α называется вектор, обозначаемый $\alpha\vec{a}$ (или $\vec{a}\alpha$), модуль которого равен $|\alpha||\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\alpha > 0$, и противоположно ему, если $\alpha < 0$.

Суммой векторов $\overrightarrow{a_i}$ $(i = \overline{i, n})$ называется вектор, обозначаемый

$$\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \ldots + \overrightarrow{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{a_i},$$

начало которого находится в начале первого вектора $\overrightarrow{a_1}$, а конец - в конце последнего вектора $\overrightarrow{a_n}$ ломанной линии, составленной из последовательности слагаемых векторов. Это правило называется *правилом замыкания ломаной.* В случае суммы двух векторов оно равносильно *правилу параллелограмма.*

Координатами вектора $\vec{a}$ называются его проекции на оси координат Ox, Oy, Oz. Они обозначаются соответственно буквами x, y, z. Запись $\vec{a} = (x, y, z)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты x, y, z.

Для равенства векторов необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были равны. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и
$M_2(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \qquad (2.2)$$

Линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_i}$ называется вектор $\vec{a}$, определяемый по формуле $\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{a_i}$, где λ_i - некоторые числа.

Линейные операции над векторами удовлетворяют свойствам, по форме аналогичным свойствам умножения и сложения чисел. Например:
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
$\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$,
$1\vec{a} = \vec{a}$,
$0\vec{a} = \vec{0}$ и т.д.

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Связь между координатами делящей точки $M(x, y, z)$, точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и числом λ задается равенствами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \qquad (2.3)$$

Деление отрезка M_1M_2 будет *внутренним*, если $\lambda > 0$, и *внешним*, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 1$ точка M будет серединой отрезка M_1M_2.

Скалярным произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется <u>число</u>, обозначаемое $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ и равное произведению модулей данных векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}),$$

где $(\vec{a} \wedge \vec{b})$ обозначает меньший угол между направлениями векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отметим, что всегда $0 \leq (\vec{a} \wedge \vec{b}) \leq \pi$.
Перечислим основные свойства скалярного произведения векторов:
1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$;
3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;
4. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| pr_{\vec{a}} b = |\vec{b}| pr_{\vec{b}} \vec{a}$;
5. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
6. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Если известны координаты векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то скалярное произведение векторов находится по формуле:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{2.4}$$

Пример 2.1. По координатам точек $A(-5, 1, 6)$, $B(1, 4, 3)$, $C(6, 3, 9)$ найти:
a. модуль вектора $\vec{a} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;
b. скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$;
c. проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$;
d. координаты точки M, делящей отрезок $l = AB$ в отношении 1:3.

Решение.

a. Пользуясь формулой (2.2), последовательно находим:
$\overrightarrow{AB} = (1-(-5), 4-1, 3-6) = (6, 3, -3)$ и $\overrightarrow{BC} = (6-1, 3-4, 9-3) = (5, -1, 6)$.
Затем находим координаты вектора $\vec{a}$:
$\vec{a} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (4 \cdot 6 + 5, 4 \cdot 3 - 1, 3 \cdot (-3) + 6) = (29, 11, -6)$.
Используя формулу (2.1), находим $|\vec{a}| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998}$.

b. Из предыдущего пункта имеем: $\vec{a} = (29, 11, -6)$, $\vec{b} = (5, -1, 6)$. Тогда, пользуясь формулой для расчета скалярного произведения (2.4), находим $\vec{a} \cdot \vec{b} = 29 \cdot 5 + 11 \cdot (-1) + (-6) \cdot 6 = 98$.

c. Проекция вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$ находится по формуле

$$pr_{\vec{d}}\vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|}.$$

Т.к. $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (6, 3, -3)$, то пользуясь формулами (2.1) и (2.4), получаем

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 5 \cdot 6 + (-1)3 + 6(-3) = 30 - 3 - 18 = 9,$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54}.$$

Тогда проекция вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$ равна $pr_{\vec{d}}\vec{c} = 9/\sqrt{54}$.

d. Для того, чтобы найти координаты точки M воспользуемся формулами (2.3), для этого найдем λ. Так как точка M делит отрезок AB в отношении 1:3, то $\lambda = 1/3$. Подставив в формулы (2.3) координаты точек A и B, получим:

$$x_M = \frac{-5 + 1 \cdot 1/3}{1 + 1/3} = -\frac{7}{2}, y_M = \frac{1 + 4 \cdot 1/3}{1 + 1/3} = \frac{7}{4}, z_M = \frac{6 + 3 \cdot 1/3}{1 + 1/3} = \frac{21}{4}.$$

Следовательно координаты точки M равны $M(-7/2, 7/4, 21/4)$.

Ответ: a. 998, b. 98, c. $9/\sqrt{54}$, d. $M(-7/2, 7/4, 21/4)$.

Векторное и смешанное произведения векторов и их приложения.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ с общим началом в точке O называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ наблюдается из конца вектора $\vec{c}$ происходящим против движения часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*.

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется <u>вектор</u> $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:
1. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\vec{a} \wedge \vec{b})$;
2. $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$;
3. тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - правая.

Перечислим основные свойства векторного произведения векторов:
1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;
2. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$;
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;
4. $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$;
5. $|\vec{a} \times \vec{b}| = S$, где S - площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих общее начало в точке O.

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ выражается через координаты данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ следующим образом:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \tag{2.5}$$

Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется <u>число</u>

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Перечислим основные свойства смешанного произведения векторов:
1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, поэтому смешанное произведение можно обозначать проще $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;
2. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = \vec{a}\vec{c}\vec{b}$;
3. геометрический смысл смешанного произведения заключается в следующем: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \pm V$, где V - объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ взятый со знаком "$+$ если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - правая, или со знаком "$-$ если она левая;
4. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны.

Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ выражается через координаты данных векторов следующим образом:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

Пример 2.2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2,3,4)$, $B(4,7,3)$, $C(1,2,2)$ и $D(-2,0,-1)$. Вычислить:

a. площадь грани ABC;

b. площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и вершины пирамиды C и D;

c. объем пирамиды $ABCD$.

Решение.

a. Известно, что $S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Пользуясь формулой (2.2), находим $\overrightarrow{AB} = (2,4,-1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1,-1,-2)$. Вычисляем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, используя формулу (2.5):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}.$$

По формуле (2.1) получим, что площадь грани равна:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{9^2 + 6^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{110}.$$

b. Для того, чтобы найти координаты точки K, которая является серединой ребра AB, нужно воспользоваться формулами (2.3), при $\lambda = 1$:

$$x_K = \frac{2 + 1 \cdot 4}{1 + 1} = 3, y_K = \frac{3 + 1 \cdot 7}{1 + 1} = 5, z_K = \frac{4 + 1 \cdot 3}{1 + 1} = 3.5,$$

т.е. $K(3;5;3,5)$. Исходя из свойств векторного произведения, имеем

$$S_{KCD} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{KC} \times \overrightarrow{KD}|,$$

где $\overrightarrow{KC}$ и $\overrightarrow{KD}$ находятся по формуле (2.2).

$$\overrightarrow{KC} = (1 - 3, 2 - 5, 2 - 3.5) = (-2, -3, -1.5),$$

$$\overrightarrow{KD} = (-2 - 3, 0 - 5, -1 - 3.5) = (-5, -5, -4.5),$$

тогда

$$\overrightarrow{KC} \times \overrightarrow{KD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & -1.5 \\ -5 & -5 & -4.5 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 1.5\vec{j} + 5\vec{k},$$

$$S_{KCD} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + (-1.5)^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 2.25 + 25} = \frac{1}{2}\sqrt{63,25}.$$

c. Исходя из свойств смешанного произведения, объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|.$$

Воспользовавшись формулой (2.2), найдем $\overrightarrow{AD} = (-4, -3, -5)$. Тогда, согласно формуле (2.6), смешанное произведение равно

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 11.$$

Следовательно, объем пирамиды равен $V = 11/6$.

Ответ: a. $\frac{1}{2}\sqrt{110}$, b. $\frac{1}{2}\sqrt{63,25}$, c. $11/6$.

Плоскость.

В декартовых прямоугольных координатах уравнение любой плоскости приводится к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2.7}$$

где A, B, C, D - заданные числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Верно и обратное, уравнение (2.7) всегда является уравнением некоторой плоскости.

Уравнение (2.7) называется *общим уравнением плоскости.* Коэффициенты A, B, C являются координатами вектора $\vec{n}$, перпендикулярного к плоскости, заданной уравнением (2.7). Он называется вектором нормали этой плоскости и определяет ориентацию плоскости в пространстве относительно системы координат.

Существуют различные способы задания плоскости и соответствующие им виды ее решения.

1. *Уравнение плоскости по точке и вектору нормали.* Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна к вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, то ее уравнение записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{2.8}$$

2. *Уравнение плоскости в "отрезках".* Если плоскость пересекает оси координат Ox, Oy, Oz в точках $M_1(a, 0, 0), M_2(0, b, 0), M_3(0, 0, c)$ соответственно, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{2.9}$$

где $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$.

3. *Уравнение плоскости по трем точкам.* Если плоскость проходит через точки $M_i(x_i, y_i, z_i)(i = 1, 2, 3)$, не лежащие на одной прямой, то ее уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.10)$$

Раскрыв данный определитель по элементам первой строки, придем к уравнению вида (2.7).

Уравнения (2.8)-(2.10) всегда можно привести к виду (2.7). Величина угла φ между плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

вычисляется на основании формулы:

$$\cos\varphi = \cos(n_1 \wedge n_2) = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \qquad (2.11)$$

где $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ - нормальные векторы данных плоскостей. С помощью формулы (2.11) можно получить условие перпендикулярности данных плоскостей:

$$n_1 \cdot n_2 = 0 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие параллельности рассматриваемых плоскостей имеет вид:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \qquad (2.12)$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением (2.7), вычисляется по формуле:

$$d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (2.13)$$

Пример 2.3. Заданы плоскость $\pi : 2x + 3y + 4z + 5 = 0$ и точка $M(-1, -1, 1)$. Написать уравнение плоскости τ, проходящей через точку M параллельно плоскости π. Найти расстояние между плоскостями.

Решение. Согласно формуле (2.12), для того, чтобы плоскости были параллельны, координаты нормальных векторов $\vec{n} = (A, B, C)$ должны совпадать. Таким образом, для построение плоскости τ нужно воспользоваться формулой (2.8):

$$\tau : 2(x - (-1)) + 3(y - (-1)) + 4(z - 1) = 0,$$

$$\tau : 2x + 3y + 4z + 1 = 0.$$

Для того, чтобы найти расстояние между параллельными плоскостями π и τ, достаточно найти расстояние от точки M до плоскости π по формуле (2.13):

$$d = \frac{2(-1)+3(-1)+4\cdot 1+5}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}}.$$

Ответ: уравнение плоскости $\tau : 2x+3y+4z+1=0$, $d=\frac{4}{\sqrt{29}}$.

Пример 2.4. Написать уравнение плоскости τ, проходящей через точки $M_1(1,0,2)$ и $M_2(3,-1,4)$ перпендикулярно заданной плоскости $\pi : 7x-2y+3z=0$.

Решение. Имеем вектор нормали перпендикулярный данной плоскости $\pi \perp \vec{n_\pi} = (7,-2,3)$ и искомую плоскость $\tau \perp \pi$, следовательно $\tau \parallel \pi$. Точки M_1 и M_2 принадлежат плоскости τ (по условию), значит вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ также коллинеарен искомой плоскости τ. Тогда, из определения векторного произведения, вектор

$$\vec{n_\tau} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n_\pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} + 11\vec{j} + 3\vec{k}$$

перпендикулярен τ. Тогда задача сводится к стандартной: найти уравнение плоскости τ, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной вектору $\vec{n_\tau} = (1,11,3)$. Воспользуемся формулой (2.8):

$$\tau : 1(x-1)+11(y-0)+3(z-2)=0.$$

Ответ: уравнение плоскости $\tau : 1(x-1)+11(y-0)+3(z-2)=0$.

Прямая в пространстве. Прямая и плоскость.

В зависимости от способа задания прямой в пространстве можно рассматривать различные ее уравнения.

1. *Векторно-параметрическое уравнение прямой.* Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно вектору $s=(m,n,p)$, а $M(x,y,z)$ - любая точка этой прямой. Если r_0 и r - радиус векторы точек M_0 и M, то справедливо векторное равенство

$$r = r_0 + ts(-\infty < t < +\infty), \tag{2.14}$$

которое получается по правилу сложения векторов. Уравнение (2.14) называется векторно-параметрическим уравнением прямой, s - направляющим вектором прямой (2.14), t - параметром.

2. *Параметрические уравнения прямой.* Из уравнения (2.14) получаем три скалярных уравнения:

$$\begin{cases} x = & x_0 + mt \\ y = & y_0 + nt, \\ z = & z_0 + pt \end{cases} \tag{2.15}$$

которые называются параметрическими уравнениями прямой.

3. *Канонические уравнения прямой.* Разрешая уравнения в системе (2.15) относительно t и приравнивая полученные отношения, приходим к каноническим уравнениям прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{2.16}$$

Отметим, что зная одно из уравнений (2.14)-(2.16), легко получить другие уравнения.

4. *Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки.* Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то ее уравнения можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{2.17}$$

5. *Общие уравнения прямой в пространстве.* Две пересекающиеся плоскости

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & n_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, & n_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{cases}, \tag{2.18}$$

где $n_1 \nparallel n_2$, определяют прямую. Уравнения (2.18) называются общими уравнениями прямой в пространстве.

Направляющий вектор s прямой, заданной уравнениями (2.18) определяется по формуле

$$s = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \tag{2.19}$$

а координаты какой-либо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой прямой, можно найти как решение системы (2.18). Тогда уравнение данной прямой можно записать в канонической форме (2.16).

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве. Две прямые в пространстве или скрещиваются, или пересекаются, или параллельны, или совпадают. В любом случае они образуют некоторый угол (между их направляющими векторами $\vec{s_1}$ и $\vec{s_2}$). Если

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}, \tag{2.20}$$

то величина угла φ между ними определяется из формулы

$$\cos\varphi = \cos(s_1 \wedge s_2) = \frac{s_1\ cdots_2}{|s_1||s_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (2.21)$$

Теперь можно записать условие перпендикулярности прямых:

$$s_1 \cdot s_2 = 0 \quad \text{или} \quad m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Условие параллельности прямых (2.20) имеет вид $s_1 \parallel s_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$, а условие их совпадения - $s_1 \parallel s_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, где точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ принадлежат прямым (2.20).

Запишем необходимое и достаточное условие пересечения непараллельных прямых ($s_1 \nparallel s_2$), заданных уравнениями (2.20):

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.22)$$

Если условие (2.22) не выполняется, то прямые (2.20) - скрещивающиеся.

Расстояние h от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой (2.16), проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\vec{s} = (m, n, p)$, вычисляется по формуле

$$h = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{s}|}. \qquad (2.23)$$

Пример 2.5. Даны уравнения прямых

$$l_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{5}, l_2 : \frac{x+1}{4} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-8}{3}.$$

a. Убедиться в том, что прямые l_1 и l_2 скрещиваются.
b. Составить каноническое уравнение общего перпендикуляра h прямых l_1 и l_2.
c.Найти расстояние между прямыми l_1 и l_2.

Решение.

a. Согласно условию параллельности прямых векторы $s_1 = (3, 0, 5)$ и $s_2 = (4, 1, 3)$ должны быть параллельны, что не верно, следовательно прямые либо пересекаются, либо скрещиваются. Проверим условие пересечения прямых (2.22). Из канонической записи уравнения прямых получаем, что $M_1(1, -2, 0)$ и $M_2(-1, 9, 8)$. Тогда по формуле (2.22) получаем

$$\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{s_1} \cdot \vec{s_2} = \begin{vmatrix} -2 & 11 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 155 \neq 0.$$

Следовательно, условие пересечения прямых не выполняется, а значит они скрещиваются.

b. Общий вид точки, принадлежащей прямой l_1, - $A(3t+1, 0t-2, 5t+0)$, а прямой l_2 - $B(4u-1, u+9, 3u+8)$. Здесь t, u - вещественные параметры. Находим параметры t и u так, чтобы вектор $\overrightarrow{AB}$ был перпендикулярен l_1 и l_2 одновременно. Т.к. по формуле (2.2)

$$\overrightarrow{AB} = (4u-3t-2, u+11, 3u-5t+8)$$

и $s_1 = (3,0,5)$, $s_2 = (4,1,3)$ - направляющие векторы прямых l_1 и l_2 соответственно, то, согласно условию перпендикулярности прямых, для t и u получаем систему двух линейных уравнений $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{s_1} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{s_2} = 0$ или

$$(4u-3t-2)\cdot 3 + (3u-5t+8)\cdot 5 = 0,$$

$$(4u-3t-2)\cdot 4 + (u+11)\cdot 1 + (3u-5t+8)\cdot 3 = 0,$$

откуда находим $u = 0$, $t = 1$. Подставив эти значения в координаты точек A и B, найдем $A(4,-2,5)$, $B(-1,9,8)$. Тогда $\overrightarrow{AB} = (-5,11,3)$. Зная координаты точки A и направляющего вектора $\overrightarrow{AB}$ и подставив их в формулу (2.16), получим уравнение общего перпендикуляра скрещивающихся прямых l_1 и l_2.

$$l : \frac{x-4}{-5} = \frac{y+2}{11} = \frac{z-5}{3}.$$

c. Расстояние между прямыми l_1 и l_2 равно длине их общего перпендикуляра, т.е. модулю вектора $\overrightarrow{AB}$. Воспользуемся формулой (2.1):

$$\rho(l_1, l_2) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 11^2 + 5^2} = \sqrt{155} = 12.45.$$

Ответ: a. прямые скрещиваются, b. $l : \frac{x-4}{-5} = \frac{y+2}{11} = \frac{z-5}{3}$, c. $\rho(l_1, l_2) = 12.45$.

Рассмотрим случаи взаимного расположения прямой и плоскости. Прямая (2.16) и плоскость $Ax + By + Cz + d = 0$ могут пересекаться, быть параллельными, либо прямая может лежать в плоскости.

Перейдем от канонических уравнений (2.16) к параметрическим (2.15) и подставим значения x, y, z из уравнений (2.15) в уравнение плоскости. Получим уравнение относительно неизвестного параметра t:

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \tag{2.24}$$

Возможны три случая:

1. При $Am + Bn + Cp \neq 0$ уравнение (2.24) имеет единственное решение $t = -(Ax_0+By_0+Cz_0+D)/(Am+Bn+Cp)$. Подставив это значение t в параметрические уравнения прямой (2.15), найдем координаты точки пересечения M.

2. При

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By0 + Cz_0 + D \neq 0 \tag{2.25}$$

уравнение (2.24) не имеет решения и прямая не имеет общих точек с плоскостью. Формулы (2.25) являются *условиями параллельности прямой и плоскости.*

3. При

$$Am + Bn + Cp = 0, Ax_0 + By0 + Cz_0 + D = 0 \tag{2.26}$$

любое значение t является решением уравнения (2.24), т.е любая точка прямой принадлежит плоскости. Равенства (2.26) называются *условиями принадлежности прямой плоскости.*

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость. Величина угла φ между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$|\cos(\vec{n} \wedge \vec{s})| = \sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{2.27}$$

Пример 2.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(4, 3, 1)$ и $N(-2, 0, -1)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(1, 1, -1)$ и $B(-3, 1, 0)$.

Решение. Согласно формуле (2.17), уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1}.$$

Если плоскость проходит через точку $M(4, 3, 1)$, то ее уравнение можно записать в виде $A(x-4) + B(y-3) + C(z-1) = 0$. Так как эта плоскость проходит и через точку $N(-2, 0, -1)$, то выполняется условие

$$A(-2-4) + B(0-3) + C(-1-1) = 0,$$

$$6A + 3B + 2C = 0.$$

Поскольку искомая плоскость параллельна найденной прямой AB, то, с учетом условия параллельности (2.25), имеем:

$$-4A + 0B + 1C = 0.$$

Решая систему

$$\begin{cases} 6A + 3B + 2C & = 0 \\ -4A + 0B + 1C & = 0 \end{cases},$$

находим, что $C = 4A$, $B = -\frac{14}{3}A$. Подставив полученные значения C и B в уравнение плоскости, получаем

$$A(x-4) - \frac{14}{3}A(y-3) + 4A(z-1) = 0.$$

Так как $A \neq 0$, то полученное уравнение эквивалентно уравнению

$$3(x-4) - 14(y-3) + 12(z-1) = 0.$$

Ответ: $3(x-4) - 14(y-3) + 12(z-1) = 0$.

Задания для самостоятельного выполнения.

Задание 1. По координатам точек A, B, C найти:
a. модуль вектора $\vec{a}$;
b. скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
c. проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$;
d. координаты точки M делящей отрезок l в отношении α:β.

1.1 $A(4,6,7)$, $B(2,-4,1)$, $C(-3,-4,2)$, $\vec{a} = 5\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = AB$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$

1.2 $A(-3,-5,6)$, $B(3,5,-4)$, $C(2,6,4)$, $\vec{a} = 4\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 4$, $\beta = 2$

1.3 $A(6,4,5)$, $B(-7,1,8)$, $C(2,-2,-7)$, $\vec{a} = 5\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$

1.4 $A(4,3,2)$, $B(-4,-3,5)$, $C(6,4,-3)$, $\vec{a} = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$

1.5 $A(-5,-2,-6)$, $B(3,4,5)$, $C(2,-5,4)$, $\vec{a} = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$

1.6 $A(5,4,4)$, $B(-5,2,3)$, $C(4,2,-5)$, $\vec{a} = 11\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$

1.7 $A(2,4,6)$, $B(-3,5,1)$, $C(4,-5,-4)$, $\vec{a} = -6\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BA}$, $l = BC$, $\alpha = 5$, $\beta = 3$

1.8 $A(3,2,4)$, $B(-2,1,3)$, $C(2,-2,-1)$, $\vec{a} = 4\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$

1.9 $A(-2,-3,-2)$, $B(1,4,2)$, $C(1,-3,3)$, $\vec{a} = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$

1.10 $A(3,4,-4)$, $B(-2,1,2)$, $C(2,-3,1)$, $\vec{a} = 5\overrightarrow{CB} + 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$

1.11 $A(-1,-2,4)$, $B(-1,3,5)$, $C(1,4,2)$, $\vec{a} = 3\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AC$, $\alpha = 1$, $\beta = 7$

1.12 $A(-2,-2,4)$, $B(1,3,-2)$, $C(1,4,2)$, $\vec{a} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$

1.13 $A(4,6,3)$, $B(-5,2,6)$, $C(4,-4,-3)$, $\vec{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 5$, $\beta = 4$

1.14 $A(4,3,-2)$, $B(-3,-1,4)$, $C(2,2,1)$, $\vec{a} = -5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CB}$,

$l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$

1.15 $A(2,4,5)$, $B(1,-2,3)$, $C(-1,-2,4)$, $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$

1.16 $A(0,2,5)$, $B(2,-3,4)$, $C(3,2,-5)$, $\vec{a} = -3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = AC$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$

1.17 $A(5,6,1)$, $B(-2,4,-1)$, $C(3,-3,3)$, $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$

1.18 $A(3,5,4)$, $B(4,2,-3)$, $C(-2,4,7)$, $\vec{a} = 3\overrightarrow{BA} - 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$

1.19 $A(3,4,6)$, $B(-4,6,4)$, $C(5,-2,-3)$, $\vec{a} = -7\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = BC$, $\alpha = 5$, $\beta = 3$

1.20 $A(-2,3,-4)$, $B(3,-1,2)$, $C(4,2,4)$, $\vec{a} = 7\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CB}$, $l = AB$, $\alpha = 3$, $\beta = 5$

1.21 $A(-2,-3,-4)$, $B(2,-4,0)$, $C(1,4,5)$, $\vec{a} = 4\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = AB$, $\alpha = 4$, $\beta = 2$

1.22 $A(2,-4,3)$, $B(-3,-2,4)$, $C(0,0,-2)$, $\vec{a} = 3\overrightarrow{ac} - 4\overrightarrow{Cb}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AC$, $\alpha = 1$, $\beta = 7$

1.23 $A(2,4,3)$, $B(3,1,-4)$, $C(-1,2,2)$, $\vec{a} = 2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{AC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 1$, $\beta = 4$

1.24 $A(1,3,2)$, $B(-2,4,-1)$, $C(1,3,-2)$, $\vec{a} = 2\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$

1.25 $A(6,5,-4)$, $B(-5,-2,2)$, $C(3,3,2)$, $\vec{a} = 6\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{CB}$, $l = BC$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$

1.26 $A(3,4,1)$, $B(5,-2,6)$, $C(4,2,-7)$, $\vec{a} = -7\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$

1.27 $A(-4,-2,-5)$, $B(3,7,2)$, $C(4,6,-3)$, $\vec{a} = 9\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = BA$, $\alpha = 4$, $\beta = 3$

1.28 $A(10,6,3)$, $B(-2,4,5)$, $C(3,-4,-6)$, $\vec{a} = 5\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = CB$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$

1.29 $A(-5,4,3)$, $B(4,5,2)$, $C(2,7,-4)$, $\vec{a} = 3\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$

1.30 $A(4,5,3)$, $B(-4,2,3)$, $C(5,-6,-2)$, $\vec{a} = 9\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 5$, $\beta = 1$

Задание 2. Вершины пирамиды находятся в точках A, B, C и D. Вычислить:
a. площадь указанной грани;
b. площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды;
c. объем пирамиды $ABCD$.

2.1 $A(5,2,7)$, $B(7,-6,-9)$, $C(-7,-6,3)$, $D(1,-5,2)$; **a.** ABD;
b. $l = AB$, C и D

2.2 $A(5,2,4)$, $B(-3,5,-7)$, $C(1,-5,8)$, $D(9,-3,5)$; **a.** ABD;
b. $l = BD$, A и C

2.3 $A(-4,-2,-3)$, $B(2,5,7)$, $C(6,3,-1)$, $D(6,-4,1)$; **a.** ACD;
b. $l = BC$, A и D

2.4 $A(-9,-7,4)$, $B(-4,3,-1)$, $C(5,-4,2)$, $D(3,4,4)$; **a.** BCD;
b. $l = BC$, A и B

2.5 $A(-6,-3,-5)$, $B(5,1,7)$, $C(3,5,-1)$, $D(4,-2,9)$; **a.** ACD;
b. $l = BC$, A и D

2.6 $A(3,-2,6)$, $B(-6,-2,3)$, $C(1,1,-4)$, $D(4,6,-7)$; **a.** ABD;
b. $l = BD$, A и C

2.7 $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,4,-4)$; **a.** ACD;
b. $l = BC$, A и D

2.8 $A(5,3,6)$, $B(-3,-4,4)$, $C(5,-6,8)$, $D(4,0,-3)$; **a.** BCD;
b. $l = BC$, A и D

2.9 $A(7,4,9)$, $B(1,-2,-3)$, $C(-5,-3,0)$, $D(1,-3,4)$; **a.** ABD;
b. $l = AB$, C и D

2.10 $A(-8,2,7)$, $B(3,-5,9)$, $C(2,4,-6)$, $D(4,6,-5)$; **a.** ACD;
b. $l = AD$, B и C

2.11 $A(4,2,3)$, $B(-5,-4,2)$, $C(5,7,-4)$, $D(6,4,-7)$; **a.** ABD;
b. $l = AD$, B и C

2.12 $A(-2,-5,-1)$, $B(-6,-7,9)$, $C(4,-5,1)$, $D(2,1,4)$; **a.** BCD;
b. $l = BC$, A и D

2.13 $A(-5,-3,-4)$, $B(1,4,6)$, $C(3,2,-2)$, $D(8,-2,4)$; **a.** ACD;
b. $l = BC$, A и D

2.14 $A(-7,-6,-5)$, $B(5,1,-3)$, $C(8,-4,0)$, $D(3,4,-7)$; **a.** BCD;
b. $l = AD$, B и C

2.15 $A(3,5,3)$, $B(-3,2,8)$, $C(-3,-2,6)$, $D(7,8,-2)$; **a.** ACD;
b. $l = BD$, A и C

2.16 $A(7,4,2)$, $B(-5,3,-9)$, $C(1,-5,3)$, $D(7,-9,1)$; **a.** ABD;
b. $l = BD$, A и C

2.17 $A(4,3,1)$, $B(2,7,5)$, $C(-4,-2,4)$, $D(2,-3,-5)$; **a.** ACD;
b. $l = AB$, C и D

2.18 $A(3,4,5)$, $B(1,2,1)$, $C(-2,-3,6)$, $D(3,-6,3)$; **a.** ACD;
b. $l = AB$, C и D

2.19 $A(-6,4,5)$, $B(5,-7,3)$, $C(4,2,-8)$, $D(2,8,-3)$; **a.** ACD;
b. $l = AD$, B и C

2.20 $A(7,5,8)$, $B(-4,-5,3)$, $C(2,-3,5)$, $D(5,1,-4)$; **a.** BCD;
b. $l = BC$, A и D

2.21 $A(-4,-5,-3)$, $B(3,1,2)$, $C(5,7,-6)$, $D(6,-1,5)$; **a.** ACD;
b. $l = BC$, A и D

2.22 $A(-5,-4,-3)$, $B(7,3,-1)$, $C(6,-2,0)$, $D(3,2,-7)$; **a.** BCD;
b. $l = AD$, B и C

2.23 $A(-7,-5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$; **a.** BCD;
b. $l = CD$, A и B

2.24 $A(3,-5,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,7)$, $D(-2,-4,5)$; **a.** ACD;
b. $l = BD$, A и C

2.25 $A(2,4,1)$, $B(-3,-2,4)$, $C(3,5,-2)$, $D(4,2,-3)$; **a.** ABD;
b. $l = AC$, B и D

2.26 $A(-4,6,3)$, $B(3,-5,1)$, $C(2,6,-4)$, $D(2,4,-5)$; **a.** ACD;
b. $l = AD$, B и C

2.27 $A(7,-1,-2)$, $B(1,7,8)$, $C(3,7,9)$, $D(-3,-5,2)$; **a.** ACD;
b. $l = BD$, A и C

2.28 $A(-4,-7,-3)$, $B(-4,-5,7)$, $C(2,-3,3)$, $D(3,2,1)$; **a.** BCD;
b. $l = BC$, A и D

2.29 $A(3,4,2)$, $B(-2,3,-5)$, $C(4,-3,6)$, $D(6,-5,3)$; **a.** ABD;
b. $l = BD$, A и C

2.30 $A(5,-4,4)$, $B(-4,-6,5)$, $C(3,2,-7)$, $D(6,2,-9)$; **a.** ABD;
b. $l = BD$, A и C

Задание 3. Заданы плоскость π и точка M. Написать уравнение плоскости τ, проходящей через точку M параллельно плоскости π. Найти расстояние между плоскостями.

3.1 $\pi: 18x - y - 6z - 26 = 0,\ M(-1, 1, 3)$

3.2 $\pi: -3x - 4y - 12z + 12 = 0,\ M(2, 1, -2)$

3.3 $\pi: 20x + 21y + 10 = 0,\ M(2, 2, -1)$

3.4 $\pi: -4x - 8y + z + 6 = 0,\ M(-1, -1, 0)$

3.5 $\pi: x + 4y + 8z + 26 = 0,\ M(1, 0, 0)$

3.6 $\pi: -10x - 25y + 2z + 3 = 0,\ M(-2, 0, 2)$

3.7 $\pi: 6x - 22y - 3z - 14 = 0,\ M(-1, 0, 1)$

3.8 $\pi: 16x + 12y - 21z - 13 = 0,\ M(-1, 0, 0)$

3.9 $\pi: 11x - 16y - 8z - 16 = 0,\ M(1, 1, 0)$

3.10 $\pi: 19x - 4y + 8z + 20 = 0,\ M(2, 2, -1)$

3.11 $\pi: 11x + 16y - 8z + 20 = 0,\ M(2, 0, 0)$

3.12 $\pi: -8x - 12y + 9z + 9 = 0,\ M(-1, 0, 0)$

3.13 $\pi: -18x - 3y - 14z + 24 = 0,\ M(0, 2, -2)$

3.14 $\pi: 3x + 4y + 3 = 0,\ M(1, -1, 1)$

3.15 $\pi: 4x + 20y + 5z + 10 = 0,\ M(1, -2, 1)$

3.16 $\pi: 15x + 12y - 16z - 23 = 0,\ M(-1, 1, 0)$

3.17 $\pi: 12x - 21y + 16z + 9 = 0,\ M(-1, 0, 2)$

3.18 $\pi: -3x - 6y + 2z - 1 = 0,\ M(2, 2, -1)$

3.19 $\pi: x + 4y + 8z + 19 = 0,\ M(0, 2, 0)$

3.20 $\pi: -13x - 16y + 4z - 24 = 0,\ M(2, 0, 2)$

3.21 $\pi: 9x - 2y - 6z + 6 = 0,\ M(2, 1, 0)$

3.22 $\pi: 20x + 9y - 12z + 9 = 0,\ M(2, 0, 2)$

3.23 $\pi: -6x - 13y - 18z + 22 = 0,\ M(-1, 0, -1)$

3.24 $\pi: -3x + 14y - 18z - 19 = 0,\ M(-2, -2, -1)$

3.25 $\pi: -9x + 8y - 12z + 11 = 0,\ M(-2, 0, 1)$

3.26 $\pi: -7x - 4y + 4z + 17 = 0,\ M(-2,-1,-2)$

3.27 $\pi: -x - 4y + 8z + 18 = 0,\ M(-1,-2,0)$

3.28 $\pi: -6x - 17y + 6z - 5 = 0,\ M(-2,0,2)$

3.29 $\pi: 13x - 4y - 16z - 5 = 0,\ M(2,0,2)$

3.30 $\pi: -12x + 14y - 21z - 3 = 0,\ M(0,-2,0)$

Задание 4. Написать уравнение плоскости τ, проходящей через точки M_1 и M_2 перпендикулярно заданной плоскости π.

4.1 $\pi: 14x - 23y - 2z + 27 = 0,\ M_1(1,-1,-2),\ M_2(6,-3,28)$

4.2 $\pi: 10x + 2y - 25z + 27 = 0,\ M_1(0,2,1),\ M_2(10,-23,3)$

4.3 $\pi: 9x - 12y - 20z + 6 = 0,\ M_1(-2,0,1),\ M_2(22,3,-15)$

4.4 $\pi: 10x - 11y + 2z + 1 = 0,\ M_1(0,1,-1),\ M_2(2,0,-3)$

4.5 $\pi: 6x + 6y + 17z - 17 = 0,\ M_1(0,-2,-2),\ M_2(1,-20,4)$

4.6 $\pi: 2x + 3y - 6z - 17 = 0,\ M_1(2,1,-2),\ M_2(-4,-1,-5)$

4.7 $\pi: 9x - 20y + 12z + 6 = 0,\ M_1(-2,1,-1),\ M_2(-6,13,-4)$

4.8 $\pi: 6x - 6y + 17z + 16 = 0,\ M_1(-1,1,0),\ M_2(-2,-17,-6)$

4.9 $\pi: 12x - 15y - 16z - 8 = 0,\ M_1(0,-1,1),\ M_2(-1,11,-11)$

4.10 $\pi: 2x - 2y - z - 25 = 0,\ M_1(-1,0,-1),\ M_2(1,1,1)$

4.11 $\pi: 2x - y - 2z + 27 = 0,\ M_1(-1,0,-2),\ M_2(-2,2,-4)$

4.12 $\pi: -12x - 16y - 15z + 22 = 0,\ M_1(0,2,1),\ M_2(-11,-22,-11)$

4.13 $\pi: -20x - 9y + 12z - 24 = 0,\ M_1(2,2,0),\ M_2(14,1,12)$

4.14 $\pi: -11x - 2y + 10z - 14 = 0,\ M_1(2,1,0),\ M_2(0,2,-2)$

4.15 $\pi: -24x - 3y - 16z - 25 = 0,\ M_1(-2,0,-2),\ M_2(-1,12,-14)$

4.16 $\pi: 11x + 12y - 24z + 3 = 0,\ M_1(1,-1,-1),\ M_2(2,-13,-13)$

4.17 $\pi: x + 2y + 2z + 19 = 0,\ M_1(1,1,1),\ M_2(-1,0,3)$

4.18 $\pi: 11x + 24y - 12z - 8 = 0,\ M_1(-1,-2,1),\ M_2(-25,1,-15)$

4.19 $\pi: 16x + 12y - 15z - 14 = 0,\ M_1(1,0,1),\ M_2(13,-1,13)$

4.20 $\pi: -2x - 10y - 10z + 9 = 0,\ M_1(1,0,-2),\ M_2(2,2,-4)$

4.21 $\pi: 4x + 3y - 12z - 6 = 0,\ M_1(-2, 2, 2),\ M_2(-5, -14, 26)$

4.22 $\pi: -10x - 11y - 2z + 7 = 0,\ M_1(-2, 1, 0),\ M_2(3, -1, -14)$

4.23 $\pi: 18x + y + 6z - 8 = 0,\ M_1(-1, 2, 0),\ M_2(-2, -16, 6)$

4.24 $\pi: 16x - 12y + 15z - 4 = 0,\ M_1(0, -1, -1),\ M_2(3, -17, -25)$

4.25 $\pi: 24x + 11y - 12z + 24 = 0,\ M_1(0, -2, 1),\ M_2(-12, -5, -5)$

4.26 $\pi: 15x - 12y - 16z + 23 = 0,\ M_1(2, 0, -1),\ M_2(5, -12, -5)$

4.27 $\pi: 6x - 6y - 7z - 8 = 0,\ M_1(0, -2, 1),\ M_2(2, 7, -5)$

4.28 $\pi: 7x + 22y + 14z + 10 = 0,\ M_1(1, 1, -2),\ M_2(3, 15, -25)$

4.29 $\pi: 15x - 12y - 16z - 8 = 0,\ M_1(0, -1, 1),\ M_2(12, 2, 5)$

4.30 $\pi: 3x_1 2y + 4z + 10 = 0,\ M_1(0, 1, 1),\ M_2(3, -11, 5)$

Задание 5. Даны уравнения прямых l_1 и l_2.
a. Убедиться в том, что прямые l_1 и l_2 скрещиваются.
b. Составить каноническое уравнение общего перпендикуляра h прямых l_1 и l_2.
c. Найти расстояние между прямыми l_1 и l_2.

5.1 $l_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{4};\ l_2: \frac{x-1}{-4} = \frac{y+9}{-1} = \frac{z-14}{8}$

5.2 $l_1: \frac{x-1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-8};\ l_2: \frac{x-3}{8} = \frac{y-4}{9} = \frac{z-14}{4}$

5.3 $l_1: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{12};\ l_2: \frac{x-17}{3} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z}{-12}$

5.4 $l_1: \frac{x+2}{-12} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{12};\ l_2: \frac{x-3}{9} = \frac{y-1}{-12} = \frac{z-29}{8}$

5.5 $l_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{1};\ l_2: \frac{x-1}{-4} = \frac{y-13}{-1} = \frac{z-11}{8}$

5.6 $l_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2};\ l_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{-1}$

5.7 $l_1: \frac{x+2}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-8};\ l_2: \frac{x+1}{-7} = \frac{y-11}{4} = \frac{z+9}{-4}$

5.8 $l_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-12} = \frac{z}{3};\ l_2: \frac{x-18}{-9} = \frac{y}{12} = \frac{z+7}{-8}$

5.9 $l_1: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2};\ l_2: \frac{x-15}{10} = \frac{y+12}{2} = \frac{z-11}{11}$

5.10 $l_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-8};\ l_2: \frac{x-9}{4} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-13}{1}$

5.11 $l_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{8};\ l_2: \frac{x-4}{4} = \frac{y-9}{8} = \frac{z-13}{1}$

5.12 $l_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{2};\ l_2: \frac{x-10}{2} = \frac{y+11}{-5} = \frac{z-10}{14}$

5.13 $l_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-1};\ l_2: \frac{x+7}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+17}{-2}$

5.14 $l_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{14} = \frac{z+2}{5}$; $l_2 : \frac{x-15}{-5} = \frac{y+5}{-14} = \frac{z-5}{-2}$

5.15 $l_1 : \frac{x-1}{-8} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{4}$; $l_2 : \frac{x-12}{1} = \frac{y+9}{8} = \frac{z+11}{4}$

5.16 $l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{12} = \frac{z+1}{12}$; $l_2 : \frac{x-1}{11} = \frac{y+39}{-24} = \frac{z-2}{12}$

5.17 $l_1 : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{-6}$; $l_2 : \frac{x-9}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+6}{-2}$

5.18 $l_1 : \frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z+1}{-2}$; $l_2 : \frac{x+18}{7} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z}{6}$

5.19 $l_1 : \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-2}{2}$; $l_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+3}{-2}$

5.20 $l_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-8}$; $l_2 : \frac{x-2}{7} = \frac{y+10}{4} = \frac{z+11}{4}$

5.21 $l_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}$; $l_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+8}{2}$

5.22 $l_1 : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{6}$; $l_2 : \frac{x+13}{2} = \frac{y-12}{6} = \frac{z+3}{-3}$

5.23 $l_1 : \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{9} = \frac{z}{-2}$; $l_2 : \frac{x-8}{6} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+17}{9}$

5.24 $l_1 : \frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-2}{-12}$; $l_2 : \frac{x+3}{12} = \frac{y-28}{-8} = \frac{z-7}{-9}$

5.25 $l_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{-12}$; $l_2 : \frac{x-25}{8} = \frac{y}{-9} = \frac{z-2}{12}$

5.26 $l_1 : \frac{x}{10} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{25}$; $l_2 : \frac{x-23}{10} = \frac{y-38}{-25} = \frac{z-15}{-2}$

5.27 $l_1 : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$; $l_2 : \frac{x-14}{14} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-5}$

5.28 $l_1 : \frac{x-1}{-9} = \frac{y-2}{12} = \frac{z}{-20}$; $l_2 : \frac{x+6}{12} = \frac{y-3}{-16} = \frac{z+1}{21}$

5.29 $l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$; $l_2 : \frac{x+16}{-14} = \frac{y-13}{2} = \frac{z-7}{15}$

5.30 $l_1 : \frac{x-0}{-2} = \frac{y-2}{14} = \frac{z-1}{-5}$; $l_2 : \frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{-14} = \frac{z-8}{2}$

Задание 6. Решить следующие задачи.

6.1 Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z = 0$.

6.2 Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1, 5, 6)$, $M_2(-1, 7, 10)$.

6.3 Найти расстояние от точки $M(2, 0, -0.5)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

6.4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, -3, 5)$ параллельно плоскости Oxy.

6.5 Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2, 5, -1)$.

6.6 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 5, -1)$, $B(-3, 1, 3)$ параллельно оси Oy.

6.7 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3,4,0)$ и прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

6.8 Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$.

6.9 Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3,2,-5)$.

6.10 Составить уравнение плоскости в "отрезках если она проходит через точку $M(6,-10,1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a = -3$, а на оси Oz - отрезок $c = 2$.

6.11 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,3,-4)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = (4,1,-1)$ и $\vec{b} = (2,-1,2)$.

6.12 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,1,0)$, $B(2,-1,-1)$ перпендикулярно к плоскости $5x + 2y + 3z - 7 = 0$.

6.13 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 3 = 0$.

6.14 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3,-1,2)$, $B(2,1,4)$ параллельно вектору $\vec{a} = (5,-2,-1)$.

6.15 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{AB}$, если $A(5,-2,3)$, $B(1,-3,5)$.

6.16 Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2,-3,3)$ параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$.

6.17 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,-1,2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2, если $M_1(2,3,-4)$, $M_2(-1,2,-3)$.

6.18 Показать что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x+3y-2z-1 = 0$, а прямая $x = t+7$, $y = t-2$, $z = 2t+1$ лежит в этой плоскости.

6.19 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3,-4,1)$ параллельно координатной плоскости Oxy.

6.20 Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3,-5,2)$.

6.21 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1,2,3)$ и $N(-3,4,-5)$ параллельно оси Oz.

6.22 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,3,-1)$ и прямую $x = t-3$, $y = 2t+5$, $z = -3t+1$.

6.23 Найти проекцию точки $M(4,-3,1)$ на плоскость $x - 2y - z - 15 = 0$.

6.24 Определить, при каком значении B плоскости $x - 4y + z - 1 = 0$ и $2x + By +$

$10z - 3 = 0$ будут перпендикулярны.

6.25 Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2, -3, -4)$ и отсекает на осях координат отличные от нуля отрезки одинаковой величины.

6.26 При каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{т} = \frac{z+5}{6}$ перпендикулярно к плоскости $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$.

6.27 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 3, -1)$, $B(1, 1, 4)$ перпендикулярно к плоскости $x - 4y + 3z + 2 = 0$.

6.28 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x + 5y - z + 7 = 0$ и $3x - y + 2z - 3 = 0$.

6.29 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2, 3, -5)$ и $N(-1, 1, -6)$ параллельно вектору $\vec{a} = (4, 4, 3)$.

6.30 Определить, при каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x - 3y + 2z + 5 = 0$ будут перпендикулярны.

Глава 3

Введение в анализ

График функции. Простейшие преобразования графика.

Графиком функции $y = f(x)$ называется совокупность точек $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют данной функциональной зависимости.

Построение графика функции упрощается, если она является четной, нечетной или периодической. График четной функции симметричен относительно оси Oy; график нечетной функции симметричен относительно начала координат; график периодической функции получается путем повторения части ее графика, соответствующей одному периоду.

Графики суммы (разности), произведения и частного

$$F(x) = f_1(x) \pm f_2(x),$$

$$G(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

$$H(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

получаются из графиков $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ соответственно путем сложения (вычитания), умножения и деления значений данных функций при данных значениях аргумента.

Предположим, что график функции $y = f(x)$ известен.

1. График функции

$$y = f(x - a)$$

представляет собой график функции $y = f(x)$, сдвинутый вдоль оси Ox на $|a|$ масштабных единиц вправо, если $a > 0$, и влево, если $a < 0$ (см. рис.1).

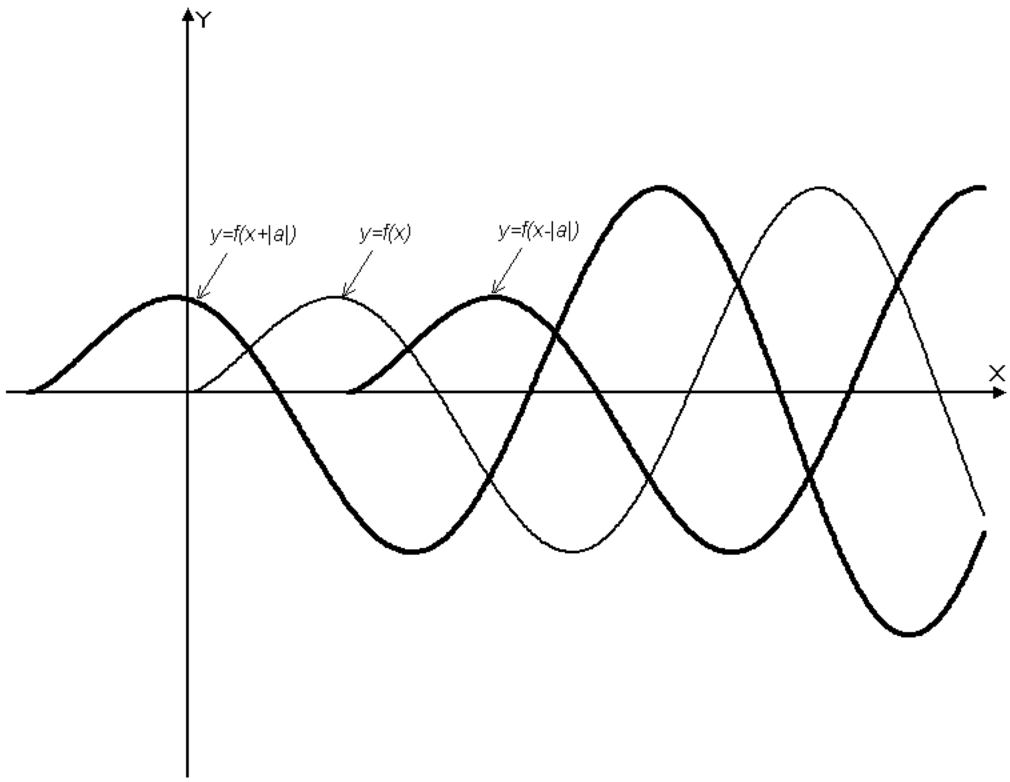


Рис.1

2. График функции

$$y = f(x) + b$$

получается из графика $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|b|$ единиц вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$ (см. рис.2).

3. График функции

$$y = f(k \cdot x)$$

получается из исходного графика увеличением в $\frac{1}{k}$ раз абсцисс его точек при $0 < k < 1$ и их уменьшением в k раз при $k > 1$ с сохранением их ординат (см. рис.3). Если $k < 0$, то график функции $y = f(k \cdot x)$ представляет собой зеркальное отображение графика $y = f(-k \cdot x)$ относительно оси Oy (см. рис.3а).

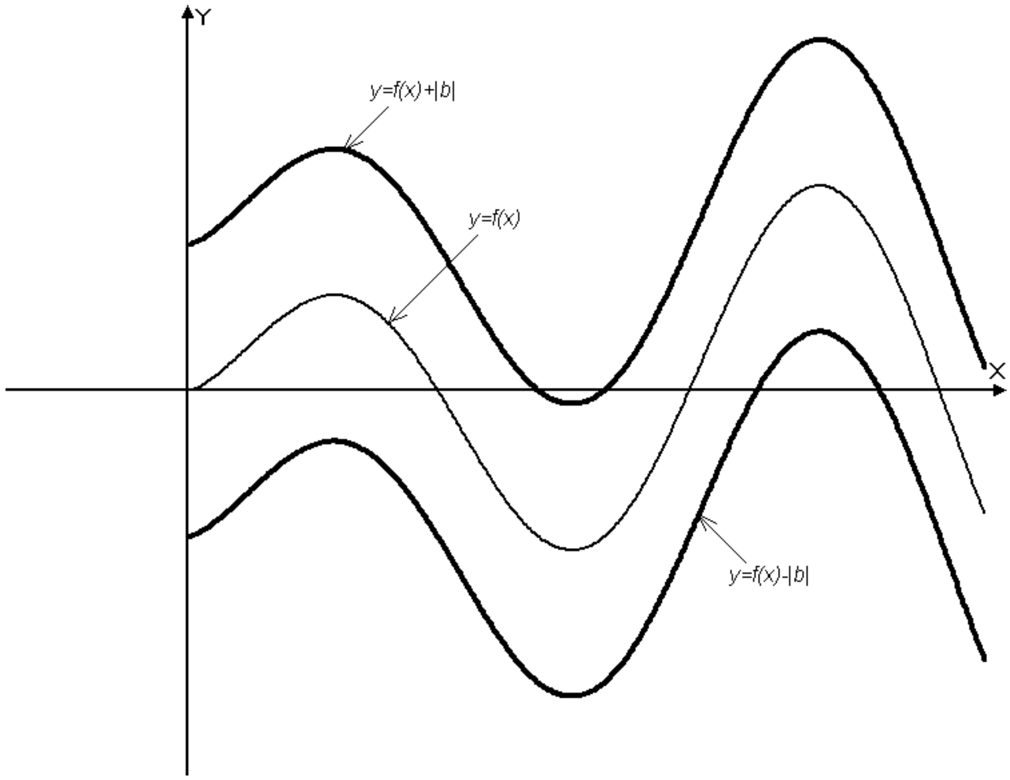


Рис.2

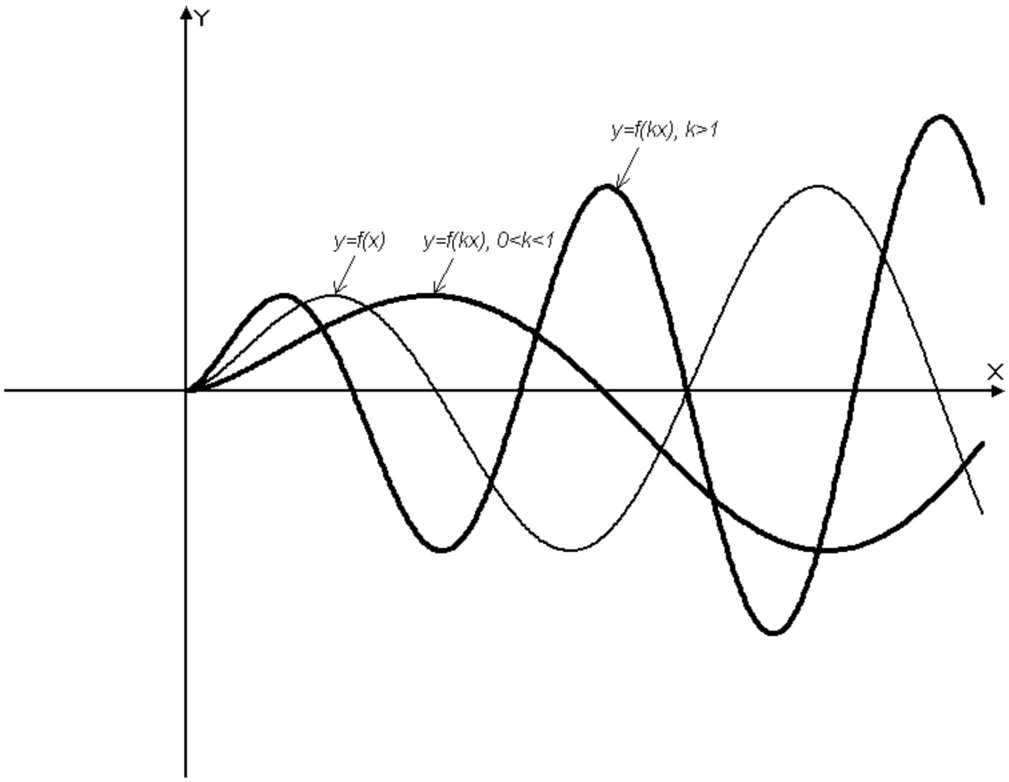


Рис.3

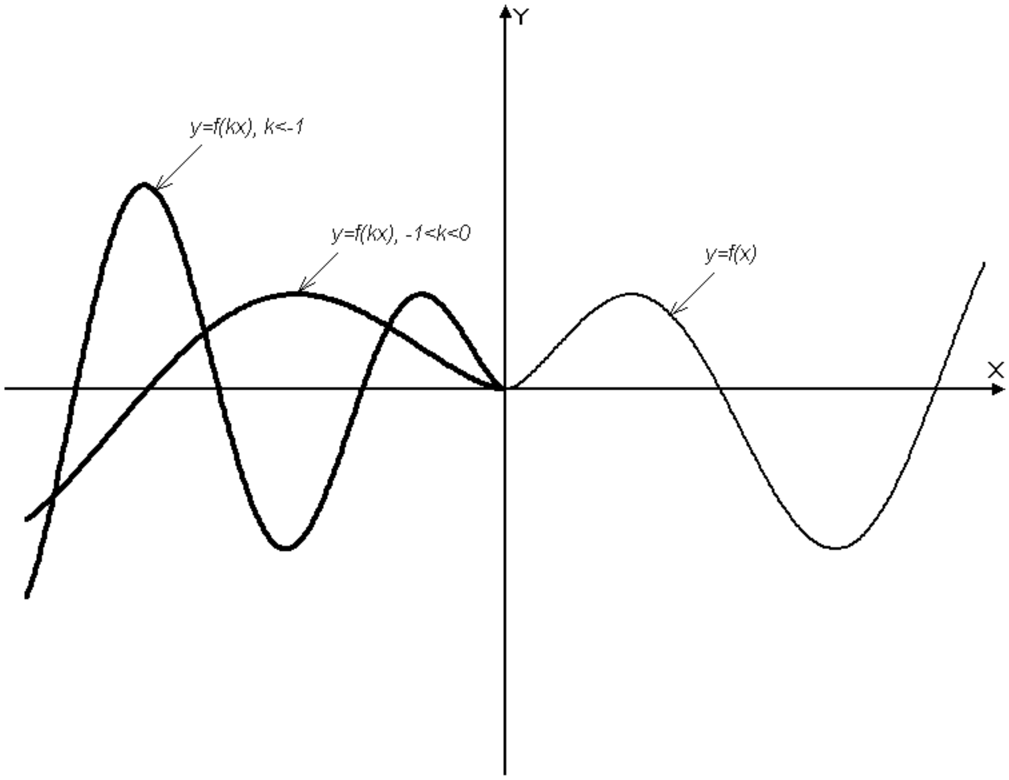


Рис.3а

4. График функции

$$y = c \cdot f(x)$$

получается из исходного графика путем умножения его ординат на коэффициент c, причем ординаты увеличиваются в c раз при $c > 1$ и уменьшаются в $\frac{1}{c}$ раз при $0 < c < 1$, а соответствующие абсциссы остаются прежними (см. рис.4). График функции $y = -c \cdot f(x)$ является зеркальным отображением графика $y = c \cdot f(x)$ относительно оси Ox (см. рис.4а).

5. График функции

$$y = f(|x|)$$

получается из исходного графика следующим образом: часть графика при $x \geq 0$ остаётся без изменений, а его часть для области $x < 0$ заменяется симметричным отображением относительно оси Oy части графика для $x \geq 0$ (см. рис.5).

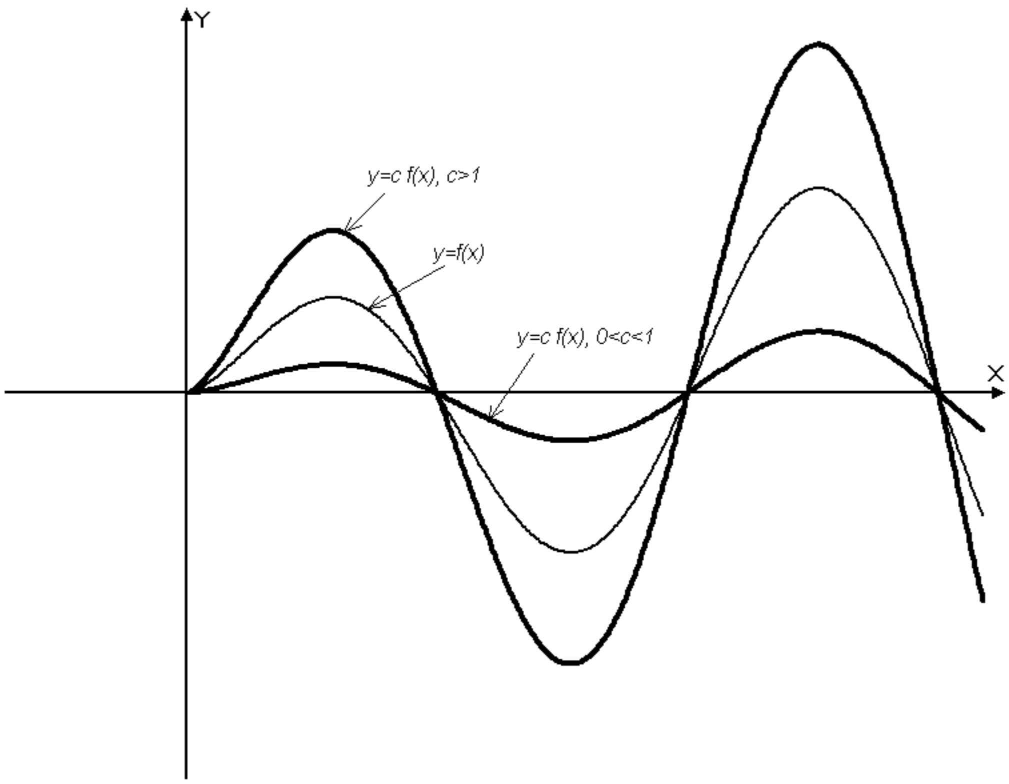


Рис.4

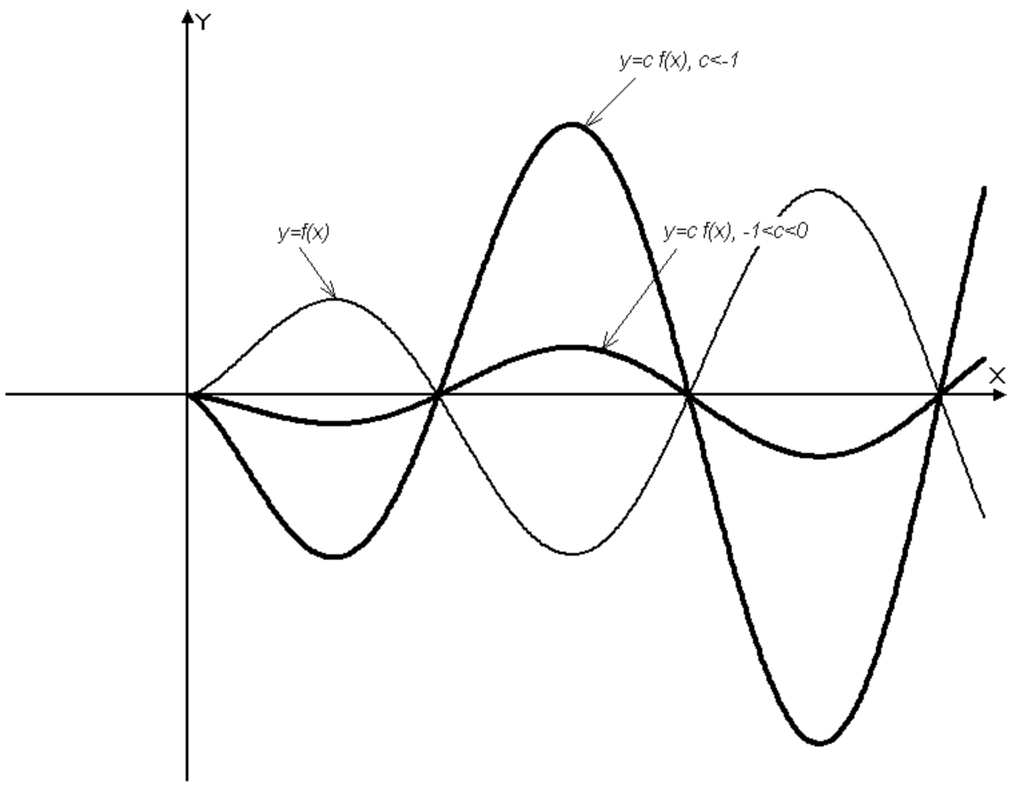


Рис.4a

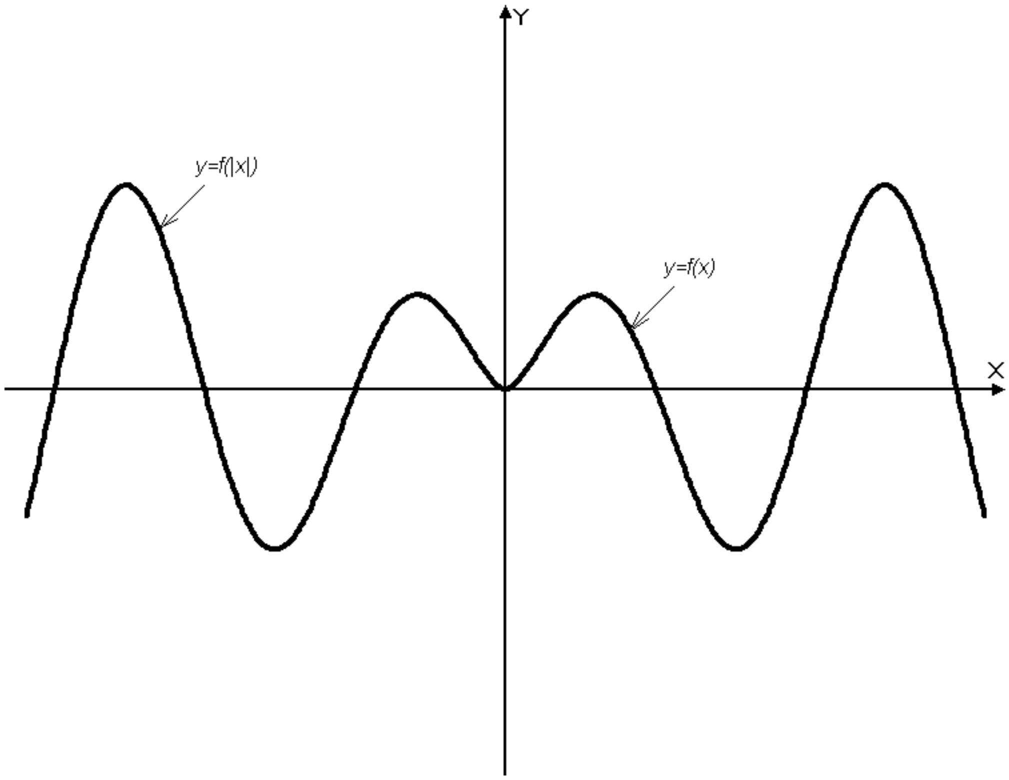


Рис.5

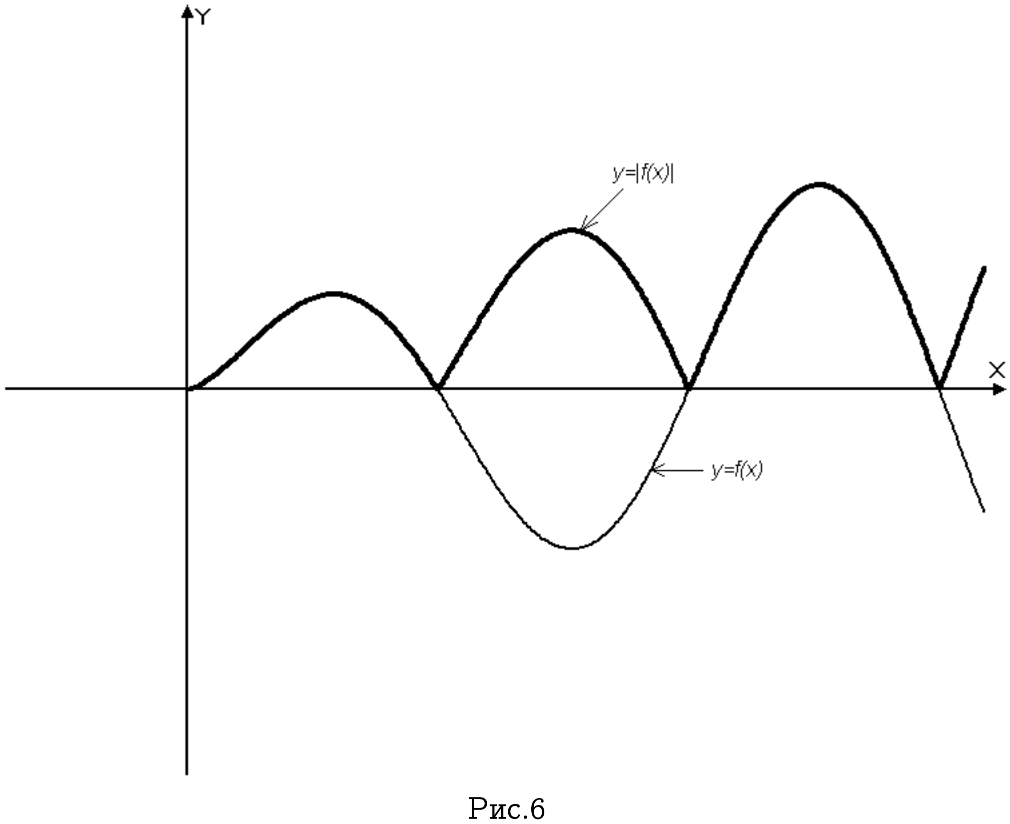


Рис.6

6. График функции

$$y = |f(x)|$$

получается из исходного графика следующим образом: часть графика при $f(x) > 0$ остаётся без изменений, а часть графика при $f(x) < 0$ зеркально отображается относительно оси Ox (см. рис.6).

Пример 3.1. С помощью преобразований графиков элементарных функций построить график функции $f(x) = 2\sqrt{-3(x+2)} - 3$.

Решение. Строим график функции $f(x) = \sqrt{x}$.
Уменьшая в 3 раза абсциссы точек графика функции $f(x) = \sqrt{x}$ и сохраняя неизменными их ординаты, строим график функции $f(x) = \sqrt{3x}$.

Меняя знаки у абсцисс точек графика функции $f(x) = \sqrt{3x}$ и сохраняя их ординаты, строим график функции $f(x) = \sqrt{-3x}$ (графики функций $f(x) = \sqrt{3x}$ и $f(x) = \sqrt{-3x}$ симметричны относительно оси Oy). (См. рис.7.)

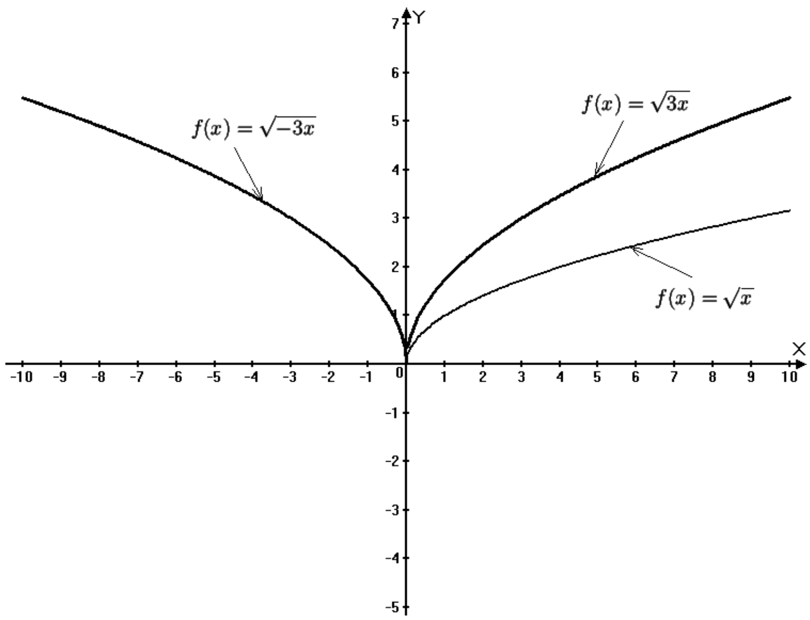


Рис.7

Перенося точки графика функции $f(x) = \sqrt{-3x}$ в направлении оси абсцисс на 2 единицы масштаба этой оси влево, строим график функции $f(x) = \sqrt{-3(x+2)}$. (См. рис.8.)

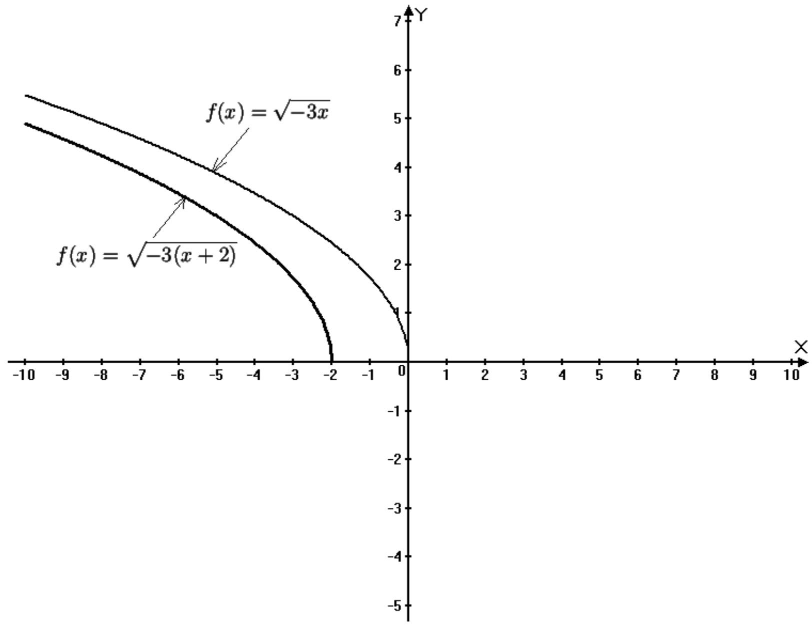


Рис.8

Увеличивая в 2 раза ординаты точек графика функции $f(x) = \sqrt{-3(x+2)}$ и сохраняя неизменными их абсциссы, строим график функции $f(x) = 2\sqrt{-3(x+2)}$. (См. рис.9.)

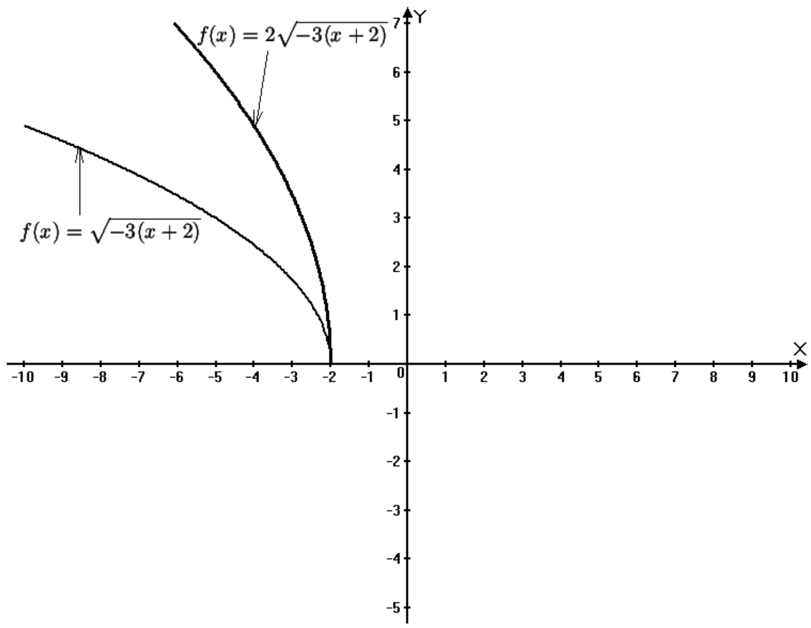


Рис.9

Перенося точки графика функции $f(x) = 2\sqrt{-3(x+2)}$ в направлении оси ординат на 3 единицы масштаба этой оси вниз, строим искомый график функции $f(x) = 2\sqrt{-3(x+2)} - 3$. (См. рис.10.)

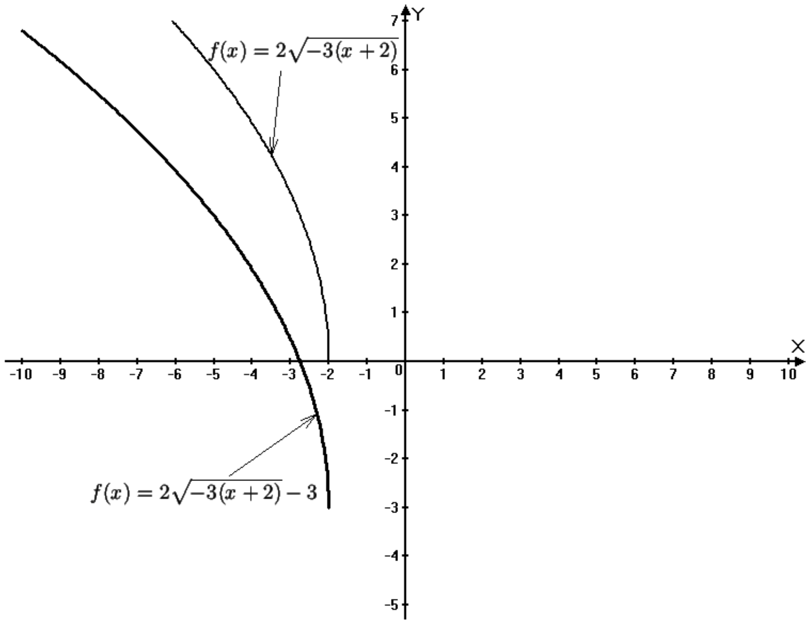


Рис.10

Предел числовой последовательности.

Пусть переменная x принимает последовательно значения

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

Такое перенумерованное множество чисел называется *последовательностью* $\{x_n\}$. Последовательность задана, если известна формула для n-го члена.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Обозначение предела последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Пример 3.2. Показать, что последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ имеет пределом нуль. Начиная с какого номера ее значения становятся и остаются меньше 0,001?

Решение. Последовательность $x_n = \frac{1}{n}$ (где $n = 1, 2, 3, \ldots$) принимает значения

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Покажем, что начиная с некоторого значения n, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. В данном случае $x_n = \frac{1}{n}$ и $a = 0$. Неравенство $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$ или $\frac{1}{n} < \varepsilon$ будет выполняться, когда $n > \frac{1}{\varepsilon}$. В качестве N можно

взять меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено $\frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Это означает, что x_n имеет пределом нуль, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Пусть $\varepsilon = 0,001$. Неравенство $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$ будет иметь место, когда $n > 1000$. Следовательно, $N = 1000$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $N = 1000$.

<u>Пример 3.3.</u> Доказать, что предел последовательности z_n равен (-3), где

$$z_n = -3 + \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Решение. Данная последовательность принимает значения

$$-4, -2\frac{3}{4}, -3\frac{1}{9}, -2\frac{15}{16}, \ldots$$

Пусть дано любое число $\varepsilon > 0$. Рассмотрим разность

$$z_n - (-3) = \Big[-3 + \frac{(-1)^n}{n^2} \Big] - (-3) = \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Эта разность будет по абсолютной величине меньше ε:

$$|z_n - (-3)| < \varepsilon, \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| < \varepsilon, \frac{1}{n^2} < \varepsilon,$$

когда $\frac{1}{\varepsilon} < n^2$, т.е. $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$. В качестве N можно выбрать меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено число $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда при всех $n > N$ $|z_n - (-3)| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -3$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -3$.

Предел функции.

Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to a$ (в точке a), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - b| < \varepsilon$, когда $0 < |x - a| < \delta$.
Обозначение предела функции: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (x стремится к a произвольным образом).
Обозначения односторонних пределов функции:
$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$ (x стремится к a слева, оставаясь меньше a),
$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$ (x стремится к a справа, оставаясь больше a).

Если односторонние пределы совпадают, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) =$
$= \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Если односторонние пределы различны, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, или хотя бы один из них не существует, то не существует и предел функции при $x \to a$.

Если переменные величины $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$, то:

1) $\lim\limits_{x\to a} \Big[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\Big] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + \lim\limits_{x\to a} f_2(x) - \lim\limits_{x\to a} f_3(x)$;
2) $\lim\limits_{x\to a} \Big[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x)\Big] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_3(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to a} \Big[c \cdot f_1(x)\Big] = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f_1(x)$;
4) $\lim\limits_{x\to a} \Big[f(x)\Big]^n = \Big[\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big]^n$, $\quad$ (n-целое число, $n > 0$);
5) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$, $\quad \Big(\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0\Big)$;
6) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$;
7) $\lim\limits_{x\to a} c = c$, $\quad (c = const)$.

Если c - постоянная величина, причем $c > 0$, то:

8) $\lim\limits_{x\to\infty} cx = \infty$;
9) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{c} = \infty$;
10) $\lim\limits_{x\to -0} \frac{c}{x} = -\infty$;
11) $\lim\limits_{x\to +0} \frac{c}{x} = +\infty$;
12) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{c}{x} = \infty$;
13) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{c}{x} = 0$;
14) $\lim\limits_{x\to+\infty} c^x = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0<c<1 \\ +\infty, & \text{если} \quad c>1 \end{cases}$;
15) $\lim\limits_{x\to-\infty} c^x = \begin{cases} +\infty, & \text{если} \quad 0<c<1 \\ 0, & \text{если} \quad c>1 \end{cases}$.

Бесконечно малые и бесконечно большие величины.

Переменная величина $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое $\delta > 0$, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$, когда $|x - a| < \delta$.

Предел бесконечно малой величины $\alpha(x)$ равен нулю, т.е.

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0.$$

Разность между переменной величиной x и ее пределом a есть величина бесконечно малая, т.е. $x - a = \alpha$, откуда $x = a + \alpha$.

Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин и их произведение есть величина бесконечно малая. Произведение постоянной и ограниченной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая. (Величина x называется *ограниченной*, если существует число $c > 0$ такое, что для всех значений x выполняется неравенство $|x| < c$.)

Переменная величина x называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого положительного числа N можно указать такой момент в изменении этой величины, начиная с которого $|x| > N$.

Бесконечно большая величина предела не имеет, но условно говорят, что предел ее есть бесконечность (∞), причем если она, начиная с некоторого момента, принимает только положительные значения, то предел ее есть $+\infty$, если отрицательные, то $-\infty$.

Если x - бесконечно большая, то обратная ей величина $\frac{1}{x}$ - бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Если α - бесконечно малая, то $\frac{1}{\alpha}$ - бесконечно большая величина, т.е. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} = \infty$.

Пример 3.4. Найти односторонние пределы функции $f(x) = \frac{6}{x-3}$ при $x \to 3$ слева и справа.

Решение. Задача сводится к нахождению двух пределов

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{6}{x-3} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 3+0} \frac{6}{x-3}.$$

Если $x \to 3-0$, т.е. x стремится к 3, оставаясь меньше 3, то величина $x-3$ является бесконечно малой, принимающей отрицательные значения. Обратная ей величина будет бесконечно большой, принимающей также отрицательные значения, тем же свойством обладает и величина $y = \frac{6}{x-3}$, поэтому $\lim\limits_{x\to 3-0} \frac{6}{x-3} = -\infty$.

Если $x \to 3+0$, т.е. x стремится к 3, оставаясь больше 3, то величина $x-3$ является положительной бесконечно малой. Обратная ей величина $\frac{1}{x-3}$ будет бесконечно большой, принимающей положительные значения. Этим свойством обладает и величина $y = \frac{6}{x-3}$, поэтому $\lim\limits_{x\to 3+0} \frac{6}{x-3} = +\infty$. График функции $f(x) = \frac{6}{x-3}$ изображен на рис.11.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3-0} \frac{6}{x-3} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+0} \frac{6}{x-3} = +\infty$.

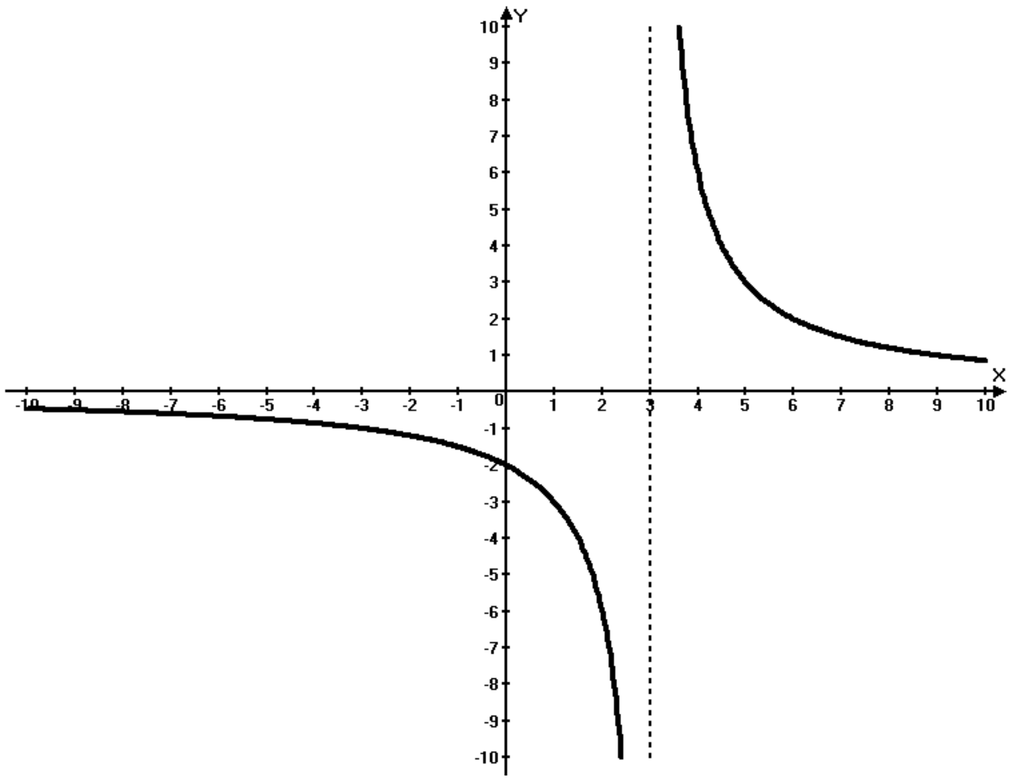


Рис.11

Сравнение бесконечно малых величин.

Две бесконечно малые величины α и β называются бесконечно малыми одного порядка, если предел их отношения отличен от нуля и от бесконечности, т.е. $\lim \frac{\alpha}{\beta} = a$, $(a \neq 0, a \neq \infty)$.

Величина α называется бесконечно малой величиной высшего порядка по сравнению с β, если предел отношения α к β равен нулю, т.е. $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$.

Величина α называется бесконечно малой величиной низшего порядка по сравнению с β, если предел отношения α к β является бесконечно большой величиной, т.е. $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$.

Бесконечно малые величины α и β называются эквивалентными, если предел их отношения равен единице, т.е. $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$.
Обозначение эквивалентных бесконечно малых величин α и β: $\alpha \sim \beta$.

Эквивалентные бесконечно малые величины обладают следующими свойствами:
1) разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них;
2) при нахождении предела отношения двух бесконечно малых можно каждую из них (или только одну) заменить эквивалентной ей бесконечно малой, т.е. если

$\alpha \sim \alpha_1$ и $\beta \sim \beta_1$, то

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Замечание 1. Произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с каждой из них.

Замечание 2. Чтобы сравнить между собой бесконечно малые величины, находят предел их отношения. Если это отношение предела не имеет, то величины несравнимы.

Таблица эквивалентности бесконечно малых величин

При $\alpha \to 0$	
$\sin \alpha \sim \alpha$	$e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$	$z^{\alpha} - 1 \sim \alpha \cdot \ln z$
$\arcsin \alpha \sim \alpha$	$1 - \cos \alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$
$\operatorname{arctg} \alpha \sim \alpha$	$(1+\alpha)^{\mu} - 1 \sim \mu\alpha$
$\ln(\alpha + 1) \sim \alpha$	$\log_z (\alpha + 1) \sim \frac{\alpha}{\ln z}$

Замечательные пределы.

I замечательный предел: $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1.$

II замечательный предел: $\lim\limits_{\alpha \to 0} \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = \left(1^{\infty}\right) = e.$

Для вычисления пределов функций, представляющих степень, основание которой стремится к единице, а показатель к бесконечности, при $x \to a$ или $x \to \infty$, удобно использовать формулу, вытекающую из II замечательного предела:

$$\lim_{x \to a} u(x)^{v(x)} = \left(1^{\infty}\right) = e^{\lim\limits_{x \to a} v(x)(u(x)-1)}.$$

Вычисление пределов.

А) Если функция является элементарной и если предельное значение аргумента принадлежит области определения, то вычисление предела функции сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Пример 3.5. Найти предел функции $f(x) = x^5 - 5^{x+1} + 3$ при $x \to -1$.

Решение. $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1) = (-1)^5 - 5^{-1+1} + 3 = 1.$

Ответ: $\lim\limits_{x \to -1}(x^5 - 5^{x+1} + 3) = 1.$

Б) Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

I. Случай, когда при $x \to a$ или $x \to \infty$ функция $f(x)$ представляет отношение двух бесконечно малых величин (случай неопределенности $\frac{0}{0}$).

Пример 3.6. Найти предел $\lim\limits_{x \to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$.

Решение. Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители, как квадратные трехчлены, по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 - корни трехчлена, затем сокращаем дробь на $(x - 5)$:

$$\lim_{x \to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 5} \frac{2\Big(x - 5\Big)\Big(x - \frac{1}{2}\Big)}{3\Big(x - 5\Big)\Big(x + \frac{1}{3}\Big)} = \lim_{x \to 5} \frac{2x - 1}{3x + 1} = \frac{9}{16}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x \to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5} = \frac{9}{16}$.

Пример 3.7. Найти предел $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^5 + 2x^4 + x^2 - 3x - 10}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 2}$.

Решение. Сократим дробь, разделив на $(x + 2)$ числитель и знаменатель в отдельности:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 2x^4 + x^2 - 3x - 10}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to -2} \frac{x^4 + x - 5}{x^3 + 3x - 1} = -\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^5 + 2x^4 + x^2 - 3x - 10}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 2} = -\frac{3}{5}$.

Если ищется предел дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль в предельной точке $x = a$, то, согласно теореме Безу, оба многочлена разделятся без остатка на $(x - a)$, т.е. такую дробь всегда можно сократить на $(x - a)$.

Пример 3.8. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$.

Решение. Уничтожаем иррациональность в числителе путем умножения числителя и знаменателя на $(1+\sqrt{x+1})$, затем сокращаем дробь на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=-\frac{1}{2}$.

Пример 3.9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Умножаем числитель и знаменатель на произведение $(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$, затем сокращаем дробь на $(1-x)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 1}\frac{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}$.

Пример 3.10. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Решение. Преобразуем формулу так, чтобы использовать I замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3\cdot x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=3$.

Пример 3.11. Найти предел $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

Решение. Производим замену $\operatorname{arctg}(x+2)=v$, отсюда $x+2=\operatorname{tg}v$, а $v\to 0$ при $x\to -2$, затем используем I замечательный предел:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{v\to 0}\frac{(\operatorname{tg}v-2)^2-4}{v}=\lim_{v\to 0}\frac{(\operatorname{tg}v-4)\cdot\operatorname{tg}v}{v}=$$

$$= \lim_{v\to 0}\frac{(\operatorname{tg} v-4)}{\cos v}\cdot\lim_{v\to 0}\frac{\sin v}{v} = -4\cdot 1 = -4.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)} = -4.$

Пример 3.12. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 6x}{(\operatorname{arctg} 2x)^2}$.

Решение. Используя эквивалентность бесконечно малых величин, заменяем $\sin 6x$ на $6x$, а $\operatorname{arctg} 2x$ на $2x$. Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 6x}{(\operatorname{arctg} 2x)^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 6x}{(2x)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 6x}{(\operatorname{arctg} 2x)^2} = \frac{3}{2}.$

Пример 3.13. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x\left(\sqrt[4]{1-2x^2}-1\right)}$.

Решение. Преобразуем выражение так, чтобы использовать I замечательный предел и эквивалентность бесконечно малых величин:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x\left(\sqrt[4]{1-2x^2}-1\right)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x\left(\sqrt[4]{1-2x^2}-1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)}{\left(\sqrt[4]{1-2x^2}-1\right)} = 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\left(\sqrt[4]{1-2x^2}-1\right)} =$$

$$= 1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{1}{4}(-2x^2)} = -1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x\left(\sqrt[4]{1-2x^2}-1\right)} = -1.$

II. Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет отношение двух бесконечно больших величин (случай неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$).

Пример 3.14. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}$.

Решение. Делим числитель и знаменатель дроби на x^2 (наивысшая степень x в данном примере), получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{5+\frac{2}{x}}=\frac{3}{5},$$

так как при $x\to\infty$ величины $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x}$ являются бесконечно малыми.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\frac{3}{5}$.

Предельный переход при $x\to\infty$ всегда может быть заменен предельным переходом при $\alpha\to 0$, если за новую независимую переменную принять величину, обратной первоначальной переменной, т.е. $\alpha=\frac{1}{x}$.

Пример 3.15. Найти предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+7^{n+2}}{3-7^n}$.

Решение. Делим числитель и знаменатель дроби на 7^n, получаем

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+7^{n+2}}{3-7^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{7^n}+7^2}{\frac{3}{7^n}-1}=-49,$$

так как $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{7^n}=0$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+7^{n+2}}{3-7^n}=-49$.

Пример 3.16. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$.

Решение. Тождественно преобразуем дробь так, чтобы затем сократить ее на множитель, стремящийся к нулю:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}=\frac{1}{1}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{2}$.

III. Случай, когда при $x \to a$ или $x \to \infty$ функция $f(x)$ представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую (случай неопределенности $0 \cdot \infty$).

Этот случай нахождения предела функции приводится путем преобразования функции к одному из двух ранее рассмотренных случаев, т.е. к случаю $\frac{0}{0}$ или к случаю $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 3.17. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right]$.

Решение. Используем формулы тригонометрических подстановок и таблицу эквивалентности бесконечно малых величин.

$$\lim_{x\to 1}\left[(1-x)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right] = \Big(0\cdot\infty\Big) = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\cdot\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}} = 1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot(1-x)}{\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}(1-x)} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}\cdot(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)} = \frac{2}{\pi}\cdot 1 = \frac{2}{\pi}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right] = \frac{2}{\pi}$.

Пример 3.18. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x \operatorname{arctg} x$.

Решение. Производим замену $\operatorname{arctg} x = \alpha$, отсюда $x = \operatorname{ctg}\alpha$, получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{arctg} x = \Big(\infty\cdot 0\Big) = \lim_{\alpha\to+0}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = \lim_{\alpha\to+0}\frac{\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0}\cos\alpha\cdot\lim_{\alpha\to+0}\frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\operatorname{arctg} x = 1$.

IV. Случай, когда при $x \to a$ или $x \to \infty$ функция $f(x)$ представляет разность двух положительных бесконечно больших величин (случай неопределенности $\infty - \infty$).

Этот случай нахождения предела функции можно привести к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем преобразования функции к виду дроби.

Пример 3.19. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$.

Решение. Производим вычитание дробей и полученную в результате дробь сокращаем на $(x-2)$:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\Big(\infty-\infty\Big)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\frac{1}{4}$.

Пример 3.20. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$.

Решение. Рассматривая данную функцию как дробную, со знаменателем, равным единице, избавляемся от иррациональности в числителе и затем делим числитель и знаменатель дроби на x:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=\Big(\infty-\infty\Big)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=-\frac{5}{2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=-\frac{5}{2}$.

V. Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель - к бесконечности (случай неопределенности 1^∞).

В этом случае для нахождения предела функции используется II замечательный предел.

Пример 3.21. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

Решение. Полагаем функцию $u(x)=1-2x$, а функцию $v(x)=\frac{1}{x}$. Вычисляем $\lim\limits_{x\to 0}v(x)\cdot\Big(u(x)-1\Big)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\Big(1-2x-1\Big)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2x}{x}=-2.$

Получаем:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x} = \left(1^{\infty}\right) = e^{-2}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x} = e^{-2}$.

Пример 3.22. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}$.

Решение. Полагаем функцию $u(x) = \frac{x-3}{x+2}$, а функцию $v(x) = 2x+1$. Вычисляем

$$\lim_{x\to\infty} v(x)\cdot\Big(u(x)-1\Big) = \lim_{x\to\infty}(2x+1)\cdot\left(\frac{x-3}{x+2}-1\right) = \lim_{x\to\infty}(2x+1)\cdot\left(\frac{-5}{x+2}\right) =$$

$$= -5\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -5\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}} = -5\cdot 2 = -10.$$

Получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1} = \left(1^{\infty}\right) = e^{-10}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1} = e^{-10}$.

Задания для самостоятельного выполнения.

Задание 1. С помощью преобразований графиков элементарных функций построить график функции $f(x)$.

1.1 $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$

1.2 $f(x) = x + \sin x$

1.3 $f(x) = x \cdot \sin x$

1.4 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

1.5 $f(x) = -4\cos|2x - \frac{\pi}{4}| + 1$

1.6 $f(x) = \sqrt{\sin x}$

1.7 $f(x) = \sin|x + \frac{\pi}{3}|$

1.8 $f(x) = |e^{x-1} - \frac{3}{2}|$

1.9 $f(x) = x \cdot \cos x$

1.10 $f(x) = x - \cos x$

1.11 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

1.12 $f(x) = \sqrt{\cos x}$

1.13 $f(x) = \cos|x - \frac{\pi}{3}|$

1.14 $f(x) = |\cos|x + \frac{\pi}{4}||$

1.15 $f(x) = \left|\frac{x-2}{x+3}\right|$

1.16 $f(x) = x^2 - 2|x| + 5$

1.17 $f(x) = x^2 + |3x - 1|$

1.18 $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$

1.19 $f(x) = \operatorname{tg}|x + \frac{\pi}{2}|$

1.20 $f(x) = |x^2 + x| - 2$

1.21 $f(x) = e^{-|x+3|}$

1.22 $f(x) = \sin(3|x - \frac{\pi}{4}|)$

1.23 $f(x) = |\cos(\frac{x}{2}) + \pi|$

1.24 $f(x) = \left|\frac{x+1}{x-3}\right|$

1.25 $f(x) = \frac{|x-2|}{x+2}$

1.26 $f(x) = \frac{|x|+3}{x-3}$

1.27 $f(x) = -\sqrt{x^2 - x + 5}$

1.28 $f(x) = 2x^2 - |3x| + 1$

1.29 $f(x) = x^2 - |2x + 4|$

1.30 $f(x) = \cos(2|\frac{\pi}{3} - x|)$

Задание 2. Показать, что последовательность $\{\alpha_n\}$ имеет пределом число A. Определить, начиная с какого номера N значения последовательности становятся и остаются меньше 0,005.

2.1 $\alpha_n = \frac{2n^3}{n^3-2}$, $A = 2$.

2.2 $\alpha_n = \frac{3n^2+2}{4n^2-1}$, $A = \frac{3}{4}$.

2.3 $\alpha_n = \frac{1+3n}{6-n}$, $A = -3$.

2.4 $\alpha_n = \frac{2-2n}{3+4n}$, $A = -\frac{1}{2}$.

2.5 $\alpha_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2}$, $A = -\frac{3}{5}$.

2.6 $\alpha_n = \frac{2n+3}{n+5}$, $A = 2$.

2.7 $\alpha_n = \frac{5-4n}{2-n}$, $A = 4$.

2.8 $\alpha_n = \frac{5n+1}{10n-3}$, $A = \frac{1}{2}$.

2.9 $\alpha_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $A = -\frac{1}{2}$.

2.10 $\alpha_n = \frac{3n-1}{5n+1}$, $A = \frac{3}{5}$.

2.11 $\alpha_n = \frac{3-n^2}{1+2n^2}$, $A = -\frac{1}{2}$.

2.12 $\alpha_n = \frac{4+2n}{1-3n}$, $A = -\frac{2}{3}$.

2.13 $\alpha_n = \frac{4n-3}{2n+1}$, $A = 2$.

2.14 $\alpha_n = \frac{2n-1}{2-3n}$, $A = -\frac{2}{3}$.

2.15 $\alpha_n = \frac{5n+15}{6-n}$, $A = -5$.

2.16 $\alpha_n = \frac{3n^3}{n^3-1}$, $A = 3$.

2.17 $\alpha_n = \frac{n}{3n-1}$, $A = \frac{1}{3}$.

2.18 $\alpha_n = \frac{1-2n^2}{n^2+3}$, $A = -2$.

2.19 $\alpha_n = \frac{n+1}{1-2n}$, $A = -\frac{1}{2}$.

2.20 $\alpha_n = \frac{3n^2}{2-n^2}$, $A = -3$.

2.21 $\alpha_n = \frac{2n+1}{3n-5}$, $A = \frac{2}{3}$.

2.22 $\alpha_n = -\frac{5n}{n+1}$, $A = -5$.

2.23 $\alpha_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2}$, $A = -\frac{1}{2}$.

2.24 $\alpha_n = \frac{4n-3}{2n+1}$, $A = 2$.

2.25 $\alpha_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$, $A = \frac{4}{3}$.

2.26 $\alpha_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3}$, $A = -\frac{1}{2}$.

2.27 $\alpha_n = \frac{7n-1}{n+1}$, $A = 7$.

2.28 $\alpha_n = \frac{7n+4}{2n+1}$, $A = \frac{7}{2}$.

2.29 $\alpha_n = \frac{3n-2}{2n-1}$, $A = \frac{3}{2}$.

2.30 $\alpha_n = \frac{4n-1}{2n+1}$, $A = 2$.

Задание 3. Найти предел функции.

3.1 $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-3x-10}{3x^2-16x+5}$

3.2 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3-4x}{x^4-x^3-6x^2}$

3.3 $\lim\limits_{x\to7}\frac{x^2-2x-35}{x^3-8x^2+7x}$

3.4 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2+3x-3}{x^2-1}$

3.5 $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+8x+15}{x^3+3x^2-7x-21}$

3.6 $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^2-7x-4}{5x^2-19x-4}$

3.7 $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^4-x^3-2x^2}{x^2-7x+10}$

3.8 $\lim\limits_{x\to-5}\frac{4x^2+21x+5}{2x^2+9x-5}$

3.9 $\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^2-10x+3}{5x^2-14x-3}$

3.10 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+x^2+5x+5}$

3.11 $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-5x-6}{x^4-6x^3-x+6}$

3.12 $\lim\limits_{x\to-4}\frac{3x^2+13x+4}{x^3+4x^2+2x+8}$

3.13 $\lim\limits_{x\to-7}\frac{x^2+3x-28}{5x^2+36x+7}$

3.14 $\lim\limits_{x\to8}\frac{x^3-8x^2-2x+16}{x^2-5x-24}$

3.15 $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-x-6}{x^3-2x^2-x+2}$

3.16 $\lim\limits_{x\to9}\frac{x^2-81}{x^2-10x+9}$

3.17 $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x^3-x^2-6x}$

3.18 $\lim\limits_{x\to-8}\frac{x^2+9x+8}{x^2+8x}$

3.19 $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^3+4x^2-2x-8}{x^2+8x+16}$

3.20 $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-4x+1}{4x^2-5x+1}$

3.21 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

3.22 $\lim\limits_{x\to-9}\frac{3x^2+28x+9}{x^3+9x^2+x+9}$

3.23 $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-16}$

3.24 $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-8x+15}{5x^2-26x+5}$

3.25 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-2x-3}{x^3+x^2+x+1}$

3.26 $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}$

3.27 $\lim\limits_{x\to6}\frac{3x^2-19x+6}{2x^2-13x+6}$

3.28 $\lim\limits_{x\to-8}\frac{-x^2-12x-32}{x^2+16x+64}$

3.29 $\lim\limits_{x\to7}\frac{-3x^2+22x-7}{4x^2-26x-14}$

3.30 $\lim\limits_{x\to9}\frac{x^2-10x+9}{-x^2+11x-18}$

Задание 4. Найти предел функции.

4.1 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-\sqrt{6-x}}{x-2}$

4.2 $\lim\limits_{x\to -5}\frac{\sqrt{x+9}}{x+5}$

4.3 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3-\sqrt{4+5x}}{x^2-1}$

4.4 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x-4}-2}{\sqrt{x}-2}$

4.5 $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{x-5}+2}{x^3+27}$

4.6 $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{1+3x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

4.7 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+3x+8}-2}{x^2-x}$

4.8 $\lim\limits_{x\to -8}\frac{3-\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$

4.9 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+4}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$

4.10 $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt[4]{2x+4}-2}{\sqrt{3x-2}-4}$

4.11 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+3x+1}-1+x}{x}$

4.12 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{3x-2}-1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}$

4.13 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}$

4.14 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{8x+3}-3}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3x-3}}$

4.15 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{16x}-x}{\sqrt{x+4}-\sqrt{2x}}$

4.16 $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{\sqrt[3]{x/4}-1/2}{\sqrt{1/2+x}-\sqrt{2x}}$

4.17 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{1-3x}}{\sqrt[3]{1+4x}-\sqrt[3]{1-5x}}$

4.18 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$

4.19 $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt[3]{x^2}-4}$

4.20 $\lim\limits_{x\to 1/3}\frac{\sqrt[3]{x/9}-1/3}{\sqrt{x+2/3}-\sqrt{3x}}$

4.21 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt[5]{x}}$

4.22 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+5x-2x^2}-2}{\sqrt[3]{2x^3+x^2}}$

4.23 $\lim\limits_{x\to 8}\frac{\sqrt{3x+1}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

4.24 $\lim\limits_{x\to 1/4}\frac{\sqrt[3]{x/16}-1/4}{\sqrt{x+1/2}-\sqrt{3x}}$

4.25 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x^2-3x+1}-2x-1}{\sqrt[3]{x}}$

4.26 $\lim\limits_{x\to 16}\frac{\sqrt[3]{x/2}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$

4.27 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{3x-12}}$

4.28 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{2x-2}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$

4.29 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{5x+2}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$

4.30 $\lim\limits_{x\to -8}\frac{10-x-6\sqrt{1-x}}{3+\sqrt[3]{3x-3}}$

Задание 5. Найти предел функции, используя эквивалентность бесконечно малых величин.

5.1 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$

5.2 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$

5.3 $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln \sin x}$

5.4 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x+1}-1}{1+\cos \pi x}$

5.5 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{4x^2}$

5.6 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$

5.7 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$

5.8 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin(2\pi(x+10))}$

5.9 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{\sin^2 x}$

5.10 $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$

5.11 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$

5.12 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$

5.13 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$

5.14 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg} 3x}$

5.15 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos(\pi(x+1)/2)}$

5.16 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$

5.17 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin 3x}$

5.18 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$

5.19 $\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{\sin x-\cos x}{\ln \operatorname{tg} x}$

5.20 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin 3x}$

5.21 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x-2\sin x}{x\ln\cos 5x}$

5.22 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$

5.23 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5(x+\pi))}{e^{3x}-1}$

5.24 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x(1-\cos 2x)}$

5.25 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\cdot \ln 2$

5.26 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$

5.27 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$

5.28 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

5.29 $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x-e}{\sin(x^2-1)}$

5.30 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^{x+1}-3}{\ln(1+x\sqrt{1+xe^x})}$

Задание 6. Найти предел функции.

6.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x^3+2}}{\sqrt[7]{x+2}-\sqrt[5]{x^5+2}}$

6.2 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^6+2}-x}$

6.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x-5^{x+1}}{2^{x+1}+5^{x+2}}$

6.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+2}-5x^2}{x-\sqrt{x^4-x+1}}$

6.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[5]{x^5+1}}$

6.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+1)!+(2x+2)!}{(2x+3)!}$

6.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^6+x^3+1}-5x}$

6.8 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-7}+\sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt[4]{x^5+5}+\sqrt{x}}$

6.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+4)!-(x+2)!}{(x+3)!}$

6.10 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^5+3}-\sqrt{x-3}}{\sqrt[5]{x^5+3}+\sqrt{x-3}}$

6.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[5]{x^7}-\sqrt{x+1}}$

6.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}$

6.13 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[4]{9x^8+1}}{(x+\sqrt{x})\sqrt{7-x+x^2}}$

6.14 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x-1}}$

6.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-1)!+(3x+1)!}{(3x)!(x-1)}$

6.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6+4}+\sqrt{x-4}}{\sqrt[5]{x^6+6}-\sqrt{x-6}}$

6.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{8x^3+3}}{\sqrt[4]{x+4}-\sqrt[5]{x^5+5}}$

6.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x-2^x}{3^{x-1}+2^x}$

6.19 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[4]{4x^4+1}-\sqrt[3]{x^4-1}}$

6.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^3-\sqrt{x^5+1}}{\sqrt{4x^6+3}-x}$

6.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+1)!+(2x+2)!}{(2x+3)!-(2x+2)!}$

6.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{3x^3+3}+\sqrt[4]{x^5+1}}$

6.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-1}+7x^3}{\sqrt[4]{x^12+x+1}-x}$

6.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x!+(x+2)!}{(x-1)!+(x+2)!}$

6.25 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt[4]{x^4+2}+\sqrt{x-2}}$

6.26 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5x+2}-\sqrt[3]{8x^3+5}}{\sqrt[4]{x+7}-x}$

6.27 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x+7^x}{2^x-7^{x-1}}$

6.28 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^5-4}-\sqrt[4]{x^4+1}}$

6.29 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-9x^2}{3x-\sqrt[4]{9x^8+1}}$

6.30 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[3]{7x}-\sqrt[4]{81x^8-1}}{(x+4\sqrt{x})\sqrt{x^2-5}}$

Задание 7. Найти предел функции.

7.1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)$

7.2 $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}$

7.3 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\sqrt{x(x^4-1)}-\sqrt{x^5-8}\right)$

7.4 $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2}\right)$

7.5 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$

7.6 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x^3-8}\right)$

7.7 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\sqrt{(x^4+1)(x^2-1)}-\sqrt{x^6-1}\right)$

7.8 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-3}\right)$

7.9 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{4}{x^2-9}\right)$

7.10 $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$

7.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x^2+1)(x^2-4)}-\sqrt{x^4-9}\right)$

7.12 $\lim\limits_{x\to -4}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{8}{16-x^2}\right)$

7.13 $\lim\limits_{x\to\pi/2}(x-\pi/2)\operatorname{tg} x$

7.14 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{5+8x^3}-2x\right)$

7.15 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)$

7.16 $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}(x/3)$

7.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-2}-\sqrt{x^2-3}\right)$

7.18 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-3)^2}\right)$

7.19 $\lim\limits_{x\to 2}\left(2-x\right)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$

7.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$

7.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+5)}-x\right)$

7.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x(x-1)(x-3)}\right)$

7.23 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x(x-1)}\right)$

7.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x(x-1)}\right)$

7.25 $\lim\limits_{x\to\pi}\sin 2x\operatorname{ctg}x$

7.26 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\sqrt[3]{5+x^3}-\sqrt[3]{3+x^3}\right)$

7.27 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$

7.28 $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)^{\frac{1}{\sin(3\pi/4+x)}}$

7.29 $\lim\limits_{x\to -5}\left(\frac{1}{x+5}-\frac{3}{25-x^2}\right)$

7.30 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^4+3}-\sqrt{x^4-2}\right)$

Задание 8. Найти предел функции.

8.1 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2\cdot 2^x}{1+x^2\cdot 5^x}\right)^{1/\sin^3 x}$

8.2 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}\right)^{2/\sin x}$

8.3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$

8.4 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos 2x}{1+\sin x\cos 3x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$

8.5 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\pi x\right)^{1/(x\sin\pi x)}$

8.6 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x+6}{x^2+5x+1}\right)^{x/2}$

8.7 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln(1+x^3)\right)^{3/(x^2\arcsin x)}$

8.8 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}}\right)^{3/x}$

8.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-10}{x+1}\right)^{3x+1}$

8.10 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln(1+\sqrt[3]{x})\right)^{x/\sin^4\sqrt[3]{x}}$

8.11 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2 3x\right)^{1/\ln\cos x}$

8.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+4x-1}{3x^2+2x+7}\right)^{2x+5}$

8.13 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 3^x}{1+x\cdot 7^x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$

8.14 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$

8.15 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+x+1}{x^3+2}\right)^{2x^2}$

8.16 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-5^{\arcsin x^3}\right)^{\frac{1}{x\sin^2 x}}$

8.17 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x\cos 5x}\right)^{1/x^3}$

8.18 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{3x^2-5x}{3x^2-5x+7}\right)^{x+1}$

8.19 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{1/x^2}$

8.20 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x\sin^2 x\right)^{1/\ln(1+\pi x^3)}$

8.21 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{2x^2+2x+3}{2x^2+2x+1}\right)^{3x^2-7}$

8.22 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{\operatorname{ctg} \pi x}$

8.23 $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-2\cos x\right)^{-1/\sin^2 x}$

8.24 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^2-6x+5}{x^2-5x+5}\right)^{3x+2}$

8.25 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^{x^2}\right)^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2(\pi x/3))}$

8.26 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos 3x}{1+\sin x\cos 5x}\right)^{1/\sin x^3}$

8.27 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{13x+3}{13x-10}\right)^{x-3}$

8.28 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\cos 3x\right)^{1/\ln(1+x^2)}$

8.29 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^6\sqrt{x})\right)^{1/x^3}$

8.30 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{4x^2+4x-1}{4x^2+2x+3}\right)^{1-2x}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЛЯКОВА Татьяна Владимировна
ТИМОФЕЕВА Вера Анатольевна
ШУТКИНА Татьяна Сергеевна

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
И ЗАДАНИЯ К ТИПОВЫМ РАСЧЕТАМ
Практикум

Подписано в печать.....
Формат...
Заказ
Издательство Владимирского государственного университета.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.