РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Задание:

Найти решение уравнения с точностью $\varepsilon = 0.0001$ следующими методами:

– дихотомии;
– пропорциональных частей (хорд);
– касательных (Ньютона);
– модифицированным методом Ньютона;
– комбинированным методом;
– итерационным.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Для решения уравнения использовать систему MathCad (методические указания по работе в этой системе можно найти в файле Методичка по MathCAD.pdf)

2. Файл с решением высылается преподавателю

3. Номер варианта соответствует последней цифре в номере зачетной книжки.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ:

Решение уравнения $f(x) = 0$ складывается из двух этапов.

1. Отделение корней - нахождение интервалов (a, b), каждый из которых содержит один и только один корень уравнения.
2. Уточнение приближенных значений корней .

Отделение корней может быть проведено путем анализа знаков функции $f(x)$ в выбранных точках области определения функции.

Пример 1. Отделим корни уравнения, левая часть которого равна $f(x) = x^3 - 6x + 2$. Для этого построим таблицу:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
Знак $f(x)$	–	–	+	+	–	+	+

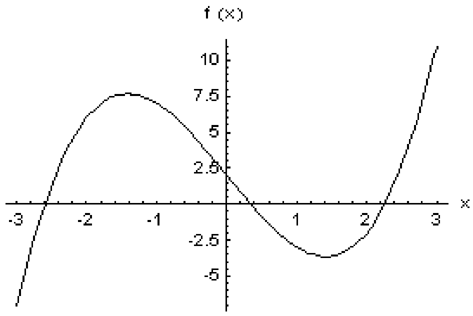
Заключаем из таблицы, что корни уравнения находятся в интервалах: (-3,-1), (0,1) и (1,3).

Для разделения корней алгебраических уравнений можно использовать правило Декарта:

Количество положительных корней многочлена

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

равно числу перемен знака в последовательности коэффициентов $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ или меньше этого числа на четное число.



Соответственно, анализ коэффициентов многочлена $P_n(x+h)$ позволяет узнать число корней многочлена $P_n(x)$, превышающих значение h, а число перемен знака в последовательности коэффициентов многочлена $P_n(-x)$ определяет число отрицательных корней исходного многочлена.

Пример 2. Для рассмотренной выше функции $f(x) = x^3 - 6x + 2$ знак в последовательности коэффициентов $(1,-6,2)$ меняется дважды, следовательно, уравнение $f(x) = 0$ может иметь не более двух положительных корней. Для многочлена $f(x+1) = x^3 + 3x^2 - 3x - 4$ знак в последовательности коэффициентов меняется один раз, следовательно, исходное уравнение имеет один корень больше 1. Знак коэффициентов многочлена $f(-x) = -x^3 + 6x + 2$ также меняется лишь один раз, следовательно, имеется только один отрицательный корень.

Наиболее наглядный способ отделения корней - анализ графика функции $f(x)$.

Второй этап решения - уточнение найденного приближенного значения корня - осуществляется с помощью итерационных методов: исходное значение уточняется в ходе повторяющихся итераций. Для реализации этих методов необходимо иметь оценку погрешности найденного значения корня. Наиболее универсальный способ оценки дает следующая теорема.

Пусть ξ - корень уравнения $f(x) = 0$, а $\bar{x}$ - приближенное значение этого корня; пусть ξ и $\bar{x}$ находятся внутри отрезка $[a,b]$ и $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ при $a \leq x \leq b$; тогда

$$|\bar{x} - \xi| \leq |f(\bar{x})| / m_1. \quad (1)$$

Отметим, что чем уже отрезок $[a,b]$, тем точнее эта оценка. Для конкретных итерационных методов существуют также свои специфические методы оценки погрешности.

Метод дихотомии (***метод половинного деления***) состоит в последовательном делении начального отрезка $[a,b]$ пополам и выборе на каждом шаге деления подотрезка, содержащего корень. Так, если на некотором шаге найден отрезок $[a_i, b_i]$, то вычисляем далее $f(\bar{x}) = f((a_i + b_i)/2)$; если $f(\bar{x}) = 0$, то процесс итераций заканчивается - найдено точное значение корня уравнения $\xi = \bar{x}$; если $f(a_i)f(\bar{x}) < 0$, то выбираем для следующего шага отрезок $[a_i, \bar{x}]$, иначе выбираем отрезок $[\bar{x}, b_i]$.

В качестве приближенного значения корня можно взять любое значение внутри найденного отрезка. Очевидно, что погрешность при этом не превышает длины отрезка. Поскольку длина отрезка после n шагов равна $(b-a)/2^n$, то количество итераций, требуемое для достижения заданной точности, может быть вычислено заранее.

Метод хорд (***метод секущих, метод пропорциональных частей***) - процесс итераций осуществляется в соответствии с формулой

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)(X - x_n)/(f(X) - f(x_n)) \tag{2}$$

В этой формуле X - та из граничных точек отрезка $[a,b]$, в которой выполнено условие

$$f(X)f''(X) > 0 \tag{3}$$

(предполагается, что вторая производная $f''(x)$ на отрезке $[a,b]$ не меняет знак). В качестве начального приближения выбирается противоположная граничная точка отрезка.

С геометрической точки зрения процесс, описываемый формулой (2), можно пояснить следующим образом:

- на первом шаге проводится прямая линия через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$; точка пересечения этой прямой с осью x определяет точку x_1;

- на втором шаге проводится прямая через точки $(X, f(X))$, $(x_1, f(x_1))$ и точка пересечения с осью x определяет точку x_2 и т.д.

Точка X является неподвижной, а точки $x_0, x_1, x_2, \cdots$ образуют монотонную последовательность, пределом которой является точка ξ - корень уравнения $f(x) = 0$.

Для остановки процесса итераций по достижении необходимой точности может быть использована оценка (1).

Метод Ньютона (***метод касательных***) - процесс итераций проводится по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n). \tag{4}$$

В качестве начального приближения должна быть выбрана граничная точка отрезка $[a,b]$, в которой выполняется условие (3). Геометрически процесс, осуществляемый по формуле (4), означает последовательное проведение касательных к кривой $f(x)$:

- сначала проводится касательная в точке x_0 и пересечение касательной с осью x дает точку x_1,

- затем проводится касательная в точке x_1 и т.д.

В результате получаем монотонную последовательность $x_0, x_1, \cdots$, пределом которой является точное значение корня уравнения. Отметим, что приближение к пределу происходит с противоположной стороны по сравнению с приближением к пределу в методе хорд.

Для остановки процесса итераций в методе Ньютона может быть использована оценка погрешности (1). Для метода Ньютона справедлива также следующая оценка погрешности найденного значения корня:

$$|x_n - \xi| \le (x_n - x_{n-1})^2 M_2 / (2m_1), \qquad (5)$$

где M_2 - наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a,b]$. Поскольку при увеличении n $x_n - x_{n-1} \to 0$, то, начиная с некоторого номера шага, $M_2|x_n - x_{n-1}| / (2m_1) < 1$; в этом случае справедлива более простая оценка погрешности:

$$|x_n - \xi| \le |x_n - x_{n-1}|.$$

Модифицированный метод Ньютона - процесс итераций производится в соответствии с формулой $x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_0)$.

Поскольку в этой формуле используется значение производной лишь в одной точке, данный метод требует меньшего объема вычислений на каждом шаге, чем обычный метод Ньютона (4). Однако, данный процесс итераций сходится медленнее. Начальная точка выбирается также, как и в обычном методе Ньютона. В качестве критерия остановки процесса итераций может использоваться оценка погрешности, вычисляемая по формуле (1).

Комбинированный метод - на каждом шаге итераций используются два метода: метод Ньютона и метод хорд. В качестве начального значения для метода Ньютона используется граничная точка исходного отрезка $[a,b]$, в которой выполняется условие (3); в качестве начальной точки для метода хорд используется противоположная граничная точка, назовем ее y_0. На каждом шаге итераций вначале вычисляется очередное приближенное значение с помощью метода Ньютона по формуле (4). Затем вычисляется приближенное значение в соответствии с методом хорд по формуле

$$y_{n+1} = y_n - f(y_n)(x_{n+1} - y_n) / (f(x_{n+1}) - f(y_n)).$$

В этой формуле роль “неподвижной” точки выполняет точка x_{n+1}, найденная с помощью метода Ньютона. В ходе выполнения итераций получаем две последовательности: $x_0, x_1, x_2, \cdots$ и $y_0, y_1, y_2, \cdots$, сходящиеся с разных сторон к истинному значению корня. В качестве приближенного значения корня на шаге с номером n может быть взято любое значение между x_n и y_n, например, среднее арифметическое $(x_n + y_n) / 2$. Очевидно, что погрешность при этом не превышает величины $|x_n - y_n|$.

Метод итераций - исходное уравнение $f(x) = 0$ переписывается в эквивалентном виде $x = \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ выбрана таким образом, чтобы для всех x, принадлежащих исходному отрезку $[a,b]$, выполнялось условие $|\varphi'(x)| \le q < 1$. При выполнении этого условия итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ сходится независимо от начального значения x_0, принадлежащего исходному отрезку, и пределом последовательности $x_0, x_1, x_2, \dots$ является точка ξ - корень уравнения $f(x)=0$. При этом, если $\varphi'(x)>0$, то процесс приближения - монотонный: все точки $x_0, x_1, x_2, \dots$ расположены с одной стороны от точки ξ. Если $\varphi'(x)<0$, то последовательные значения расположены по разные стороны от точки ξ.

Для метода итераций справедлива следующая оценка погрешности найденного значения корня:

$$|x_n-\xi| \le |x_n-x_{n-1}| \cdot q/(1-q). \qquad (6)$$

Из этого неравенства следует, что метод итераций сходится тем быстрее, чем меньше значение q. Если $\varphi'(x)<0$, то справедлива также более простая оценка:

$$|x_n-\xi| \le |x_n-x_{n-1}|. \qquad (7)$$

Существует следующий способ выбора итерирующей функции $\varphi(x)$. Пусть на исходном отрезке $[a,b]$ производная функции $f(x)$ принимает положительные значения: $0<m_1 \le f'(x) \le M_1$; тогда можно положить $\varphi(x)=x-f(x)/M_1$. Отметим, что для улучшения сходимости целесообразно сужать отрезок $[a,b]$.

Пример 3. Найдем подходящую итерирующую функцию для нахождения положительного корня уравнения $f(x)=0$, где $f(x)=x^3+x-1000$. Поскольку $f(9)<0$, а $f(10)>0$, то искомый корень лежит на отрезке $[9;10]$. На этом отрезке $244 \le f'(x) \le 301$, следовательно, в качестве искомой функции можно выбрать функцию $\varphi(x)=x-f(x)/301$.

Другой способ нахождения подходящей итерирующей функции основан на свойстве производной обратной функции:

Пусть функция $\varphi(x)$ дифференцируема и монотонна на отрезке $[a,b]$ и производная $\varphi'(x_0)\neq 0$ при $a<x_0<b$; тогда производная обратной функции $g(x)$ в точке $y_0=\varphi(x_0)$ равна $g'(y_0)=1/f'(x_0)$.

Пусть для исходного уравнения найдено эквивалентное уравнение $x=\varphi(x)$ и $|\varphi'(x)|\ge k>1$. Тогда данное уравнение можно заменить уравнением $x=g(x)$, где $g(x)$ - функция, обратная к функции $\varphi(x)$; итерационный процесс, построенный на основе этого уравнения, сходится.

Пример 4. Найдем иной вариант итерирующей функции для нахождения положительного корня уравнения $x^3+x-1000=0$. Если записать это уравнение в виде $x=\varphi(x)$, где $\varphi(x)=1000-x^3$, то на отрезке $[9;10]$, заключающем искомый корень, $|\varphi'(x)|=3x^2 \ge 243$, следовательно, функция $\varphi(x)$ не удовлетворяет условию сходимости. Выберем функцию, обратную к функции $\varphi(x)$:

$g(x) = \sqrt[3]{1000 - x}$. На отрезке $9 \le x \le 10$ $|g'(x)| < 1/300$, следовательно, функция $g(x)$ может быть использована для построения сходящегося итерационного процесса. Отметим, что $g'(x) < 0$, так что процесс сходимости - немонотонный и для оценки погрешности можно использовать простую формулу (7).

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ

0. Найти наименьший положительный корень уравнения $tg(x) = x$.
1. Найти наименьший корень уравнения $x^5 - x - 0.2 = 0$.
2. Найти положительный корень уравнения $x^5 + x - 0.2 = 0$.
3. Найти наименьший положительный корень уравнения $e^x = 5x^2$.
4. Найти корень уравнения $x^5 - x - 0.2 = 0$, ближайший к точке $x = 0$.
5. Найти наименьший корень уравнения $x^3 - 10x + 2 = 0$.
6. Найти положительный корень уравнения $x^4 - x^2 + 5x - 10 = 0$.
7. Найти наибольший корень уравнения $x^3 - 10x + 2 = 0$.
8. Найти наименьший корень уравнения $e^x = 3x^2$.
9. Найти корень уравнения $x^3 - 10x + 2 = 0$, ближайший к точке $x = 0$.